

# Débruitage géométrique d'images dans des bases orthonormées de bandelettes

Erwan LE PENNEC<sup>1</sup>, Charles DOSSAL<sup>2</sup>, Gabriel PEYRÉ<sup>3</sup>, Stéphane MALLAT<sup>4</sup>

<sup>1</sup>LPMA / Université Paris Diderot - Paris 7

<sup>2</sup>LaBAG / Université Bordeaux 1

<sup>3</sup>CEREMADE / Université Paris Dauphine

<sup>4</sup>CMAP / École Polytechnique

lepenne@math.jussieu.fr, charles.dossal@math.u-bordeaux1.fr  
gabriel.peyre@ceremade.dauphine.fr, mallat@cmmap.polytechnique.fr

**Résumé** – Cet article présente le premier estimateur quasi minimax adaptatif pour les images géométriquement régulières dans un modèle de bruit blanc. Cet estimateur combine les capacités d'approximation des bases orthonormées de bandelettes à la théorie de la sélection de modèles. L'estimateur ainsi obtenu est calculable par un algorithme rapide dont l'efficacité théorique peut être prouvée. Ces performances sont confirmées par des expériences numériques sur des images naturelles.

**Abstract** – This article presents the first adaptive quasi minimax estimator for geometrically regular images in the white noise model. This estimator combines the approximation properties of the orthogonal bandlets bases with the model selection theory. The resulting estimator is computed with a fast algorithm whose theoretical performance can be proven. This efficiency is confirmed through numerical experiments on natural images.

L'estimation d'une image  $f$  dans le cadre du modèle de bruit blanc gaussien est un problème classique en statistique. Il s'agit de retrouver une image  $f$  de  $N$  pixels à partir d'une observation bruitée

$$Y = f + \varepsilon W$$

où  $W$  est un bruit blanc gaussien normalisé et  $\varepsilon$  un paramètre de variance supposé connu. Pour les images  $f$  de classe  $\mathbf{C}^\alpha$  en dehors de contours eux-mêmes  $\mathbf{C}^\alpha$ , Korostelev et Tsybakov [KT93] ont montré au début des années 90 que pour tout estimateur  $F$  le risque quadratique  $E(\|F - f\|)^2$  ne peut décroître, en fonction de l'écart type  $\varepsilon$ , plus rapidement que  $\varepsilon^{2\alpha/(\alpha+1)}$ . Cet article présente la construction d'un estimateur atteignant cette vitesse pour les images géométriques à un facteur logarithmique prêt sans connaître le paramètre de régularité  $\alpha$ . Cet estimateur repose sur la combinaison des bases orthonormées de bandelettes qui permettent une représentation optimale de ces fonctions dans des bases adaptées et des algorithmes de sélection de modèles qui permettent de trouver une telle base dans un cadre bruité. L'estimateur obtenu est calculable avec un algorithme rapide et ses performances sur les images naturelles sont étudiées. Les détails théoriques de cette construction sont exposés dans l'article [DPM06].

## 1 Estimation et approximation d'images géométriques

À partir d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = \{b_\nu\}_\nu$ , un estimateur non-linéaire est obtenu par seuillage  $F = S_T(Y, \mathcal{B})$

des observations  $Y$  par l'opérateur  $S_T$

$$S_T(g, \mathcal{B}) = \sum_{|\langle g, b_\nu \rangle| \geq T} \langle g, b_\nu \rangle b_\nu. \quad (1)$$

Donoho et Johnstone [DJ94] ont montré que seuil  $T = \gamma \sqrt{\log_2(N)} \varepsilon$  est optimal quand  $\varepsilon$  tend vers 0, dès que  $\gamma$  est suffisamment grand ( $N$  est le nombre de pixels de l'image  $f$ ). Ils relient de plus la décroissance de l'erreur entre  $f$  et son approximation  $f_M$  avec les  $M$  plus grands coefficients à la performance de l'estimateur

$$\|f - f_M\|^2 \leq C_1 M^{-\alpha'} \quad (2)$$

$$\implies E(\|f - F\|^2) \leq C_2 \log_2(N) \varepsilon^{\frac{2\alpha'}{\alpha'+1}}, \quad (3)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes qui ne dépendent que de  $f$ . Cette relation montre que la construction d'un estimateur par seuillage efficace nécessite une base offrant une bonne représentation des fonctions à estimer.

**Images géométriquement régulières.** Les fonctions de  $L^2([0, 1]^2)$  qui sont de classe  $\mathbf{C}^\alpha$  à l'extérieur de courbes elles-mêmes  $\mathbf{C}^\alpha$  constituent un modèle simple d'images géométriquement régulières. Il a été utilisé par Korostelev et Tsybakov dans leur travaux pionniers sur l'estimation des images [KT93]. Pour modéliser le flou dû à la diffraction lors de l'acquisition des images, ces images peuvent être convoluées par un noyau de lissage quelconque. Ces fonctions sont appelées fonctions géométriquement régulières  $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ . La figure 1 en fournit un exemple.

Korostelev et Tsybakov [KT93] ont montré, en utilisant un argument de complexité, que quelque soit l'estimateur utilisé le risque quadratique de cette estimateur

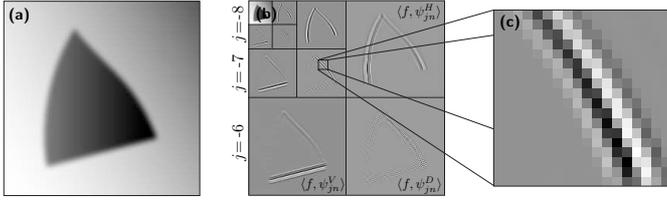


FIG. 1 – (a) Une fonction géométriquement régulière. (b,c) Ses coefficients d’ondelettes, la couleurs gris correspondant au coefficients voisins de zéros. Les coefficients sont organisés par échelles  $2^j$  et orientation  $k$ .

ne peut décroître en fonction de la variance  $\varepsilon^2$  plus vite que  $O(\varepsilon^{2\alpha/(\alpha+1)})$  simultanément sur toutes les fonctions  $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ . A partir de ce résultat, on montre que la vitesse d’approximation optimale pour les fonction  $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$  est  $\|f - f_M\|^2 \leq O(M^{-\alpha})$ . Ce résultat se déduit de la relation (2) à un facteur logarithmique près.

L’approximation en ondelettes atteint cette vitesse pour la classe restrictive des fonction uniformément  $\mathbf{C}^\alpha$ . Les ondelettes fournissent donc un estimateur par seuillage asymptotiquement optimal pour cette classe particulière. L’introduction des discontinuités dans le modèle des fonctions  $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$  fait perdre cette optimalité, l’erreur d’approximation ne satisfaisant plus que  $\|f - f_M\|^2 \leq O(M^{-1})$ .

Les curvelets de Candès et Donoho [CD99] se rapprochent de la vitesse optimale avec une erreur d’approximation en  $O(\log_2(M)^3 M^{-2})$  pour des fonctions géométriquement régulières  $\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^2$ . Elles ne permettent cependant pas d’exploiter des régularités plus grandes. Grâce à une représentation dans un frame adaptatif de bandelettes, Le Pennec et Mallat [LM05] ont obtenu la décroissance optimale  $O(M^{-\alpha})$  pour  $\alpha \geq 1$  à un facteur logarithmique près.

## 2 Bandelettes de seconde génération

La construction des bandelettes a été raffinée par Mallat et Peyré [MP06] pour obtenir des bases orthonormées adaptées aux fonctions géométriquement régulières. Ces bases de bandelettes de seconde génération sont définies à partir d’une représentation en ondelettes en ajoutant une étape de une transformation géométrique sur les coefficients en ondelettes eux-mêmes.

Une base de bandelettes  $\mathcal{B}(\lambda) = \{b_\nu\}_\nu$  est paramétrée par une géométrie  $\lambda \in \Lambda$  qui spécifie pour chaque échelle  $2^j$  et chaque orientation  $k$  d’une transformée en ondelettes :

- une segmentation dyadique des coefficients d’ondelettes correspondants,
- un flot vectoriel indiquant la direction approximative de la géométrie pour chaque carré de la segmentation contenant de l’information géométrique, c’est-à-dire un contour.

Les bandelettes sont obtenues par un changement de bases orthogonal orienté par cette géométrie sur les ondelettes correspondantes à chacun des carrés de la segmentation. La transformée en multi-ondelettes de Alpert [Alp92], produit alors ces fonctions appelées bandelettes  $b_\nu$  qui per-

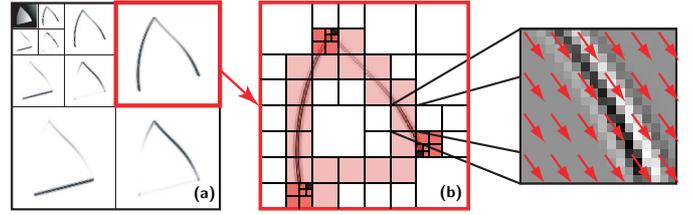


FIG. 2 – (a) Coefficients en ondelettes d’une image. (b) Exemple de segmentation dyadique d’une image géométriquement régulière. (c) Un flot adapté est calculé sur chaque carré.

mettent de capturer la régularité directionnelle des contours. La figure 2 montre un exemple de paramètre  $\lambda \in \Lambda$  possible pour une base de bandelettes adaptée.

Les bandelettes forment ainsi une famille de bases orthonormées indicées par des géométries. L’efficacité de ces bases repose sur l’utilisation de deux algorithmes rapides : le premier permet de calculer la décomposition/reconstruction d’une fonction  $f$  dans une base donnée  $\mathcal{B}(\lambda)$  et le deuxième calcule une base  $\mathcal{B}(\lambda^*)$  adaptée à  $f$ .

### Algorithme d’approximation en bandelettes.

Étant donnée une géométrie  $\lambda \in \Lambda$ , l’algorithme rapide de transformée en bandelettes permet de calculer la décomposition d’une image  $f$  dans la base de bandelettes  $\mathcal{B}(\lambda) = \{b_\nu\}_\nu$ . Cet algorithme, détaillé dans [MP06], calcule une transformée en ondelettes orthogonale puis applique une transformée de Alpert directionnelle sur chaque carré de la segmentation décrite par  $\lambda$ .

La meilleure approximation  $f_M$  de  $f$  avec  $M$  termes dans cette base s’obtient en conservant les  $M$  plus grands coefficients en valeur absolue. Ceci est équivalent à définir  $f_M$  par un opérateur  $S_T$  de seuillage avec un seuil  $T$  adapté

$$f_M = S_T(f, \mathcal{B}(\lambda)) = \sum_{|\langle f, b_\nu \rangle| \geq T} \langle f, b_\nu \rangle b_\nu \quad (4)$$

où  $M = \text{Card}\{\nu, |\langle f, b_\nu \rangle| \geq T\}$  et où l’opérateur  $S_T$  est défini à l’équation (1). L’image  $f_M$  s’obtient par l’algorithme rapide de transformée inverse en bandelettes. Cette algorithme opère de façon similaire à la transformée directe, en calculant une transformée de Alpert directionnelle inverse suivie d’une transformée en ondelettes orthogonale inverse.

**Algorithme de recherche de meilleure base.** L’introduction de ce seuil  $T$  peut paraître artificielle mais elle est nécessaire pour obtenir un algorithme de meilleure base. Le problème sous contrainte de la recherche de la meilleure approximation avec  $M$  termes se transforme en effet par la formulation Lagrangienne en un problème non contraint de minimisation de

$$\mathcal{L}(f, T, \mathcal{B}(\lambda)) = \|f - f_M\|^2 + T^2 M \quad (5)$$

où  $f_M$  est défini dans une base  $\mathcal{B}(\lambda)$  par l’équation (4). L’algorithme de recherche de meilleure base permet d’optimiser le Lagrangien  $\mathcal{L}$  sur l’ensemble des bases  $\mathcal{B}(\lambda)$  pour  $\lambda \in \Lambda$ . Pour un seuil  $T$  fixé et une image  $f$ , cet algorithme fournit la géométrie

$$\lambda^* = \underset{\lambda \in \Lambda}{\text{argmin}} \mathcal{L}(f, T, \mathcal{B}(\lambda)).$$

L'approximation  $f_M$  correspondante dans la base  $\mathcal{B}(\lambda^*)$  est optimale pour le problème sous contrainte pour le nombre  $M$  de coefficients obtenus. Si  $f$  est une image géométriquement régulière  $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ , Peyré et Mallat [MP06] démontrent que

$$\|f - f_M\|^2 = O(M^{-\alpha}). \quad (6)$$

Ce résultat est adaptatif puisqu'il ne nécessite pas la connaissance du paramètre de régularité  $\alpha$  pour obtenir la vitesse optimale.

La minimisation du Lagrangien de l'équation (5) s'effectue par un algorithme rapide qui ne nécessite pas l'exploration exhaustive de toutes les bases [MP06]. Il utilise la structure hiérarchique de la partition dyadique des coefficients de bandelettes et une discrétisation adaptée des géométries dans les carrés. Cet algorithme opère sur une image discrétisée de  $N$  pixels en un temps linéaire en fonction de  $N$  et polynomial en fonction de  $T^{-1}$ .

### 3 Estimation géométrique en bandelettes

Pour l'estimation d'une fonction  $f$  à partir d'observation  $Y = f + \varepsilon W$ , l'équation (2) montre que la performance d'un estimateur par seuillage est liée aux propriétés d'approximation dans la base choisie. Un seuillage de  $Y$  dans la meilleure base de bandelettes associée à la fonction  $f$  et au seuil  $T = \gamma\sqrt{\log_2(N)}\varepsilon$  devrait donc fournir une estimation optimale pour les fonctions  $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ . Cette meilleure base dépend de  $f$  et est donc inaccessible. En revanche, la recherche de la meilleure base pour l'observation  $Y$  permet d'obtenir un estimateur quasi optimal.

**Estimateur en bandelettes.** L'estimateur en bandelettes  $F$  est défini en deux temps. On cherche d'abord la meilleure base  $\mathcal{B}(\lambda^*)$  associée à  $Y$  et  $T$ ,

$$\mathcal{B}(\lambda^*) = \underset{\mathcal{B}(\lambda)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(f, T, \mathcal{B}(\lambda)),$$

où le Lagrangien est introduit à l'équation (5). L'estimateur est défini comme

$$F = S_T(Y, \mathcal{B}(\lambda^*)) \quad \text{avec} \quad T = \gamma\sqrt{\log_2(N)}\varepsilon \quad (7)$$

où  $\gamma$  est une constante suffisamment grande, et l'opérateur de seuillage est défini à l'équation (1). Le calcul de  $\mathcal{B}(\lambda^*)$  s'effectue à l'aide de l'algorithme rapide de recherche de meilleure base comme expliqué à la section 2. La décomposition de  $Y$  dans  $\mathcal{B}(\lambda^*)$  et la reconstruction après seuillage exploitent également les algorithmes rapides.

**Sélection de modèles et bandelettes.** Pour démontrer les propriétés statistiques de cet estimateur, on ne peut pas utiliser la théorie classique du seuillage dans une base orthonormée. Celui-ci s'intègre cependant dans le cadre de la sélection de modèles [BBM99].

Cette théorie décrit un estimateur statistique non-linéaire comme une projection des observations  $Y$  sur un sous-espace vectoriel  $m^*$ , solution d'un problème de minimisation pénalisée

$$m^* = \underset{m \in \mathcal{M}}{\operatorname{argmin}} \|Y - P_m Y\|^2 + T^2 \dim(m).$$

Lorsque l'ensemble  $\mathcal{M}$  des sous-espaces possibles  $m$  est l'ensemble des sous-espaces engendrés par les vecteurs d'une base  $\mathcal{B} = \{b_\nu\}$ , le meilleur modèle se détermine facilement :

$$m^* = \operatorname{vect}\{b_\nu ; |\langle Y, b_\nu \rangle| \geq T\}.$$

Dans le cas général, cette détermination peut être plus complexe. La théorie de la sélection de modèles permet de contrôler le risque quadratique dès que le nombre de vecteurs utilisés pour engendrer  $\mathcal{M}$  est polynomial en la dimension  $M$ . On obtient dans ce cas [BBM99]

$$E(\|f - F\|^2) \leq C \left( \min_{m \in \mathcal{M}} \|f - P_m f\|^2 + \gamma^2 \log_2(N) \varepsilon^2 \dim(m) + N^{-1} \right) \quad (8)$$

Dans le cas des bandelettes, on choisit pour l'ensemble  $\mathcal{M}$  comme l'union des sous-espaces engendrés par les vecteurs des différentes bases de bandelettes  $\mathcal{B}(\lambda)$ . On trouve alors que

$$P_{m^*} Y = S_T(Y, \mathcal{B}(\lambda^*)) = F.$$

Le nombre des bandelettes qui engendrent  $\mathcal{M}$  est polynomial en fonction du nombre  $N$  de pixels de l'image. On peut ainsi appliquer le résultat (8), qui se formule en utilisant le Lagrangien défini en (5)

$$E(\|f - F\|^2) \leq C \left( \min_{\mathcal{B}(\lambda)} \mathcal{L}(f, \gamma\sqrt{\log_2(N)}\varepsilon, \mathcal{B}(\lambda)) + N^{-1} \right).$$

**Théorème d'estimation en bandelettes.** En combinant cette dernière équation au résultat (6) d'approximation dans une base adaptée de bandelettes pour les fonctions  $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ , on déduit le théorème de quasi optimalité de l'estimateur en bandelettes [DPM06].

**Théorème 1** *Pour toute fonction  $f$  géométriquement régulière  $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ , il existe une constante  $C$ , telle que pour tout niveau de bruit  $\varepsilon$  l'estimateur  $F$  en bandelettes satisfait*

$$E(\|f - F\|^2) \leq C \left( \log_2(N) \varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} + N^{-1} \right).$$

L'estimateur exploite l'adaptivité des bandelettes puisqu'il ne nécessite pas la connaissance du paramètre de régularité  $\alpha$ . Ce résultat peut être amélioré pour  $\varepsilon^2$  grand devant  $N^{-1}$  en remplaçant le terme  $\log_2(N)$  par un terme en  $\log_2(\varepsilon)$ .

L'incorporation d'a priori géométrique dans l'estimation semble nécessaire pour obtenir des résultats d'optimalité pour ces fonctions géométriquement régulières. L'utilisation de base ne l'est pas. L'estimateur non adaptatif proposé par Korostelev et Tsybakov est par exemple basé sur une méthode de détection des contours et de noyaux adaptés aux voisinages de ceux-ci. Elle permet cependant une analyse fine des propriétés de l'estimateur et de souligner le lien profond entre l'estimation et l'approximation dans ce cadre. Elle fournit de plus un cadre pratique qui évite le difficile problème de la détection de contours.

### 4 Résultats numériques

La figure 4 quantifie les résultats de débruitage à l'aide du PSNR, défini par

$$\operatorname{PSNR}(f, g) = -20 \log_{10}(\|f - g\|_2 / \|f\|_\infty),$$

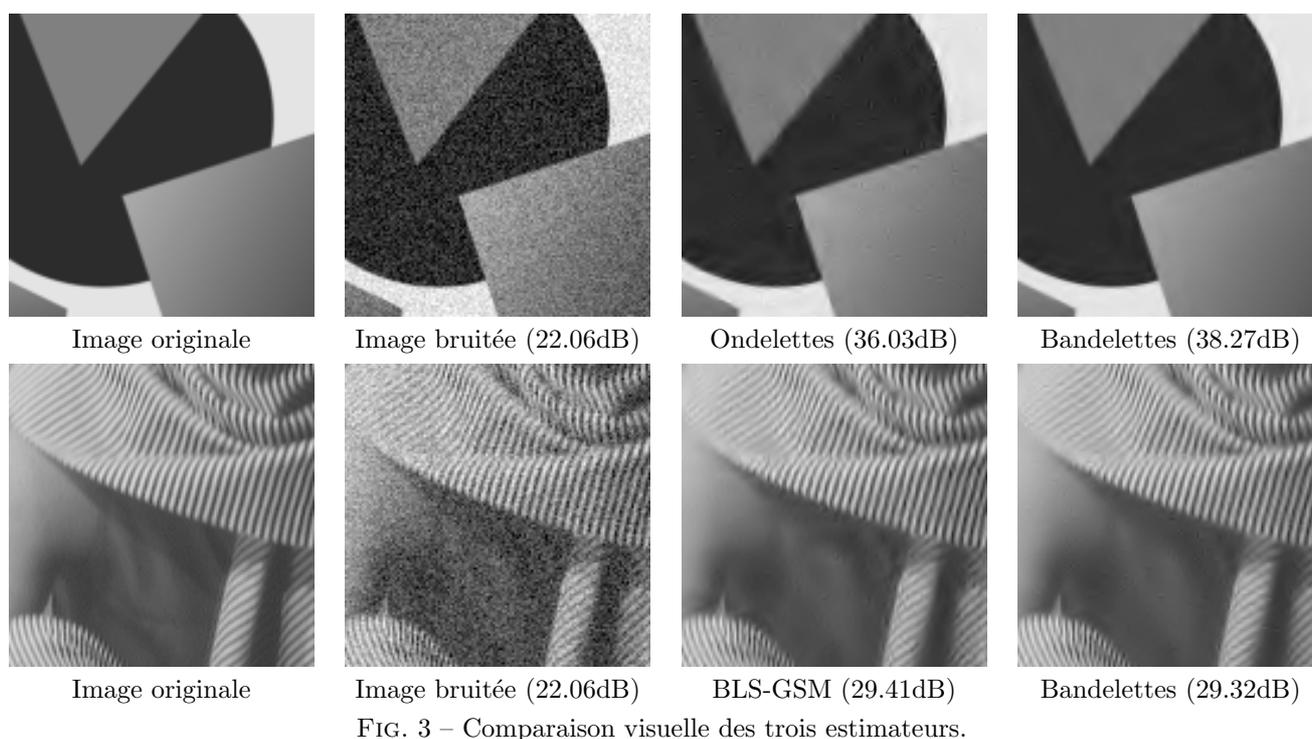


FIG. 3 – Comparaison visuelle des trois estimateurs.

pour  $g = Y$  (PSNR bruité) et  $g = F$  (PSNR débruité). Les débruitages ont été effectués pour trois estimateurs :

- ondelettes invariantes par translation,
- BLS-GSM [PSWS03], qui utilise un modèle statistique avancé pour les coefficients d'ondelettes,
- l'estimateur en bandlettes, qui est appliqué 4 fois sur des versions translattées de l'image pour palier au manque d'invariance par translation.

Pour une image géométrique (figure 4, droite), l'estimateur en bandlettes surpasse les autres estimateurs. Les résultats théoriques de ce papier ne donnent a priori aucune indications sur les performances de l'algorithme pour des images naturelles qui ne sont pas dans la classe des fonctions étudiées. Pour une image complexe, la figure 4, gauche, montre que l'estimateur en bandlettes est au niveau de l'état de l'art. La figure 3 montre une comparaison visuelle entre les différents estimateurs. La reconstruction en bandlettes respecte mieux les contours et les textures directionnelles, mais est moins efficace pour les textures complexes et les parties homogènes, où une modélisation statistique [PSWS03] s'avère plus performante.

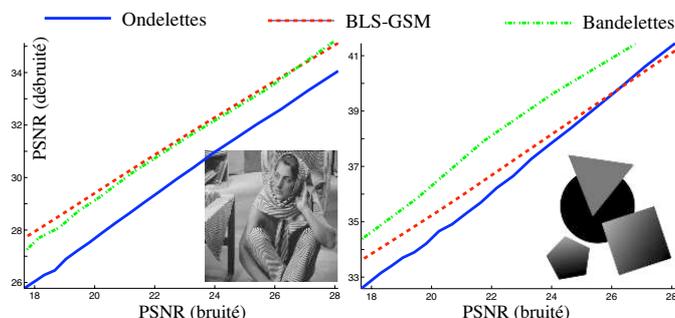


FIG. 4 – Comparaison des trois méthodes pour divers niveaux de bruits.

## Références

- [Alp92] B.K. ALPERT : *Wavelets and Other Bases for Fast Numerical Linear Algebra*, pages 181–216. C. K. Chui, editor, Academic Press, San Diego, CA, USA, 1992.
- [BBM99] A. BARRON, L. BIRGE et P. MASSART : Risk bounds for model selection via penalization. *Probab. Th. Rel. Fields*, 113:301–413, 1999.
- [CD99] E. CANDÈS et D. DONOHO : *Curvelets : A surprisingly effective nonadaptive representation of objects with edges*. Vanderbilt University Press, 1999.
- [DJ94] D. DONOHO et I. JOHNSTONE : Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81:425–455, Dec 1994.
- [DPM06] C. DOSSAL, E. Le PENNEC et S. MALLAT : Denoising with bandlets. *to be submitted*, 2006.
- [KT93] A.P. KOROSTELEV et A.B. TSYBAKOV : *Minimax Theory of Image Reconstruction*, volume 82. Springer, 1993.
- [LM05] E. LE PENNEC et S. MALLAT : Bandlet Image Approximation and Compression. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 4(3):992–1039, 2005.
- [MP06] S. MALLAT et G. PEYRÉ : Orthogonal bandlet bases for geometric image approximation. *In to be submitted*, 2006.
- [PSWS03] J. PORTILLA, V. STRELA, M. WAINWRIGHT et E. P. SIMONCELLI : Image denoising using a scale mixture of Gaussians in the wavelet domain. *IEEE Trans Image Processing*, 12(11): 1338–1351, November 2003.