

# Goniométrie aux ordres supérieurs pour réseaux d'antennes à polarisation multiple

Pascal CHEVALIER<sup>1</sup>, Anne FERRÉOL<sup>1</sup>, Laurent ALBERA<sup>2,3</sup>, Gwénaél BIROT<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>THALES Communications, EDS/SPM  
146 Bvd de Valmy, BP 82, F-92704 Colombes, France

<sup>2</sup>INSERM, U 642, Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image, Rennes, F-35042, France

<sup>3</sup>Université de Rennes 1, LTSI, Rennes, F-35042, France

Pascal.CHEVALIER@fr.thalesgroup.com, Anne.FERREOL@fr.thalesgroup.com  
laurent.albera@univ-rennes1.fr, gwenael.biro@univ-rennes1.fr

**Résumé** – Des extensions de la méthode MUSIC, comme  $2q$ -MUSIC ( $q \geq 2$ ), qui exploitent l'information contenue dans les statistiques d'ordre  $2q$  des observations ont été proposées récemment pour la recherche de directions d'arrivée de sources non gaussiennes. Ces méthodes sont asymptotiquement robustes à un bruit de fond gaussien dont la cohérence spatiale est inconnue. Elles sont également robustes à la présence d'erreur de modèle et offrent une meilleure résolution d'estimation, et ce d'autant plus que  $q$  est grand. Les méthodes  $2q$ -MUSIC ont cependant été développées principalement pour des réseaux d'antennes à diversité spatiale uniquement (c-à-d des réseaux dont les capteurs sont placés à différents endroits) ne pouvant s'accomoder de réseaux à diversité de polarisation (c-à-d des réseaux dont les capteurs sont polarisés différemment). L'objectif de cet article est de présenter trois extensions des algorithmes  $2q$ -MUSIC, baptisées PD- $2q$ -MUSIC (Polarization Diversity  $2q$ -MUSIC), capables d'exploiter une éventuelle diversité de polarisation du réseau de capteurs. On montre que ces algorithmes accroissent la résolution, la robustesse aux erreurs de modélisation et la capacité de traitement des méthodes  $2q$ -MUSIC en présence de sources polarisées différemment et à partir d'un réseau de capteurs à diversité de polarisation.

**Abstract** – Some  $2q$ -th ( $q \geq 2$ ) order extensions of the MUSIC method, exploiting the information contained in the  $2q$ -th ( $q \geq 2$ ) order statistics of the data and called  $2q$ -MUSIC methods, have been proposed recently for direction finding of non Gaussian signals. These methods are asymptotically robust to a Gaussian background noise whose spatial coherence is unknown and offer increasing resolution and robustness to modeling errors jointly with an increasing processing capacity as  $q$  increases. However,  $2q$ -MUSIC methods have been mainly developed for arrays with space diversity only and cannot put up with arrays of sensors diversely polarized. The purpose of this paper is to introduce, for arbitrary values of  $q$  ( $q \geq 1$ ), three extensions of the  $2q$ -MUSIC methods able to put up with arrays having polarization diversity, which gives rise to the so-called PD- $2q$ -MUSIC (Polarization Diversity  $2q$ -MUSIC) algorithms. These algorithms are shown to increase resolution, robustness to modeling errors and processing capacity of  $2q$ -MUSIC methods in the presence of diversely polarized sources from arrays with polarization diversity.

## 1 Introduction

Des extensions de l'algorithme MUSIC [14] qui exploitent l'information contenue dans les statistiques d'ordre  $2q$  ( $q \geq 2$ ) des observations pour un rangement particulier de ces statistiques ont été proposées récemment sous le nom de  $2q$ -MUSIC [4]. Par exemple, l'algorithme 4-MUSIC, introduit dans [13][1], est un cas particulier de  $2q$ -MUSIC où  $q = 2$  et pour lequel les statistiques d'ordre 4 sont rangées d'une certaine manière dans la matrice de quadricovariance. La méthode  $2q$ -MUSIC, avec  $q \geq 2$ , est asymptotiquement robuste à un bruit gaussien dont la cohérence spatiale est inconnue. De plus, l'utilisation des ordres supérieurs donne naissance à des capteurs virtuels, ce qui augmente la diversité du réseau d'antennes considéré. Cette notion de réseau d'antennes virtuel à l'ordre  $2q$  a été introduite dans [2], généralisant les réseaux d'antennes virtuels d'ordre 4 présentés dans [6] et [3]. Il a été montré, en dépit d'une plus grande variance des estimateurs de statistiques d'ordre supérieur, que  $2q$ -MUSIC augmentait la résolution du spectre, la robustesse aux erreurs de modèle ainsi que le nombre de sources traitables, et ce d'autant plus que  $q$  est grand. Cependant  $2q$ -MUSIC ( $q \geq 2$ ) a été développé pour des réseaux d'antennes uniquement à diversité spatiale, ne permettant donc pas d'exploiter une éventuelle diversité de polarisation des ondes élec-

tromagnétiques incidentes. La prise en compte de cette diversité, couplée à une diversité spatiale le cas échéant, est pourtant très avantageuse puisque les signaux arrivant sur chaque capteur peuvent être traités sur la base de leur polarisation et de leur direction d'arrivée (DA). Or la plupart des méthodes actuelles qui exploitent la diversité de polarisation [7][11, 12], n'utilisent que les statistiques d'ordre deux (SO) des observations. Rares sont les techniques qui utilisent les ordres supérieurs [8, 9, 10]. L'objectif des travaux décrits dans le présent document est donc d'introduire trois extensions de  $2q$ -MUSIC ( $q \geq 2$ ) capables de prendre en compte la diversité de polarisation du réseau d'antennes, ceci dans le but d'accroître les performances de  $2q$ -MUSIC en présence de sources polarisées différemment. Cette extension donnera naissance à une famille de méthodes baptisées PD- $2q$ -MUSIC. Nous montrons dans ce papier que ces algorithmes accroissent la résolution et la robustesse aux erreurs de modèle de  $2q$ -MUSIC en présence de sources polarisées différemment et à partir d'un réseau d'antennes à diversité de polarisation.

## 2 Hypothèses, notations, et statistiques

Nous considérons un réseau de  $N$  capteurs potentiellement différents dont les réponses aux signaux incidents sont rangées dans un vecteur d'observations  $\mathbf{x}(t)$ . On suppose que chaque capteur reçoit un mélange instantané de  $P$  sources stationnaires, statistiquement centrées et éventuellement corrélées les unes aux autres (mais pas totalement), auquel s'ajoute un bruit. Les  $P$  sources peuvent être séparées en  $G$  groupes contenant chacun  $P_g$  sources corrélées, les sources de différents groupes étant mutuellement indépendantes. En particulier,  $G = P$  correspond au cas où toutes les sources sont indépendantes, et  $G = 1$  correspond au cas où toutes les sources sont corrélées. Le vecteur d'observations peut alors s'écrire :

$$\mathbf{x}(t) \approx \sum_{i=1}^P s_i(t) \mathbf{a}(\theta_i, \beta_i) + \nu(t) = \sum_{g=1}^G \mathbf{A}_g \mathbf{s}_g(t) + \nu(t)$$

où  $\nu(t)$  est le vecteur de bruit, considéré comme étant centré, stationnaire et gaussien, où  $s_i(t)$  est l'enveloppe complexe de la  $i$ -ième source, où  $\theta_i = (\theta_i, \varphi_i)$  avec  $\theta_i$  et  $\varphi_i$  les angles d'azimut et de site de la  $i$ -ième source, où  $\beta_i$ , que nous définirons dans la suite, est le vecteur à deux composantes caractérisant la polarisation de la  $i$ -ième source, où  $\mathbf{A}_g$  est la matrice ( $N \times P_g$ ) contenant les vecteurs directeurs des sources appartenant au groupe  $g$ , et où  $\mathbf{s}_g(t)$  est le vecteur de longueur  $P_g$  contenant les enveloppes complexes  $s_i(t)$  correspondantes. En l'absence de couplage entre les capteurs, et en considérant des ondes planes, la  $n$ -ième composante du vecteur colonne  $\mathbf{a}(\theta_i, \beta_i)$  s'écrit :

$$a_n(\theta_i, \beta_i) = f_n(\theta_i, \beta_i) e^{\frac{2j\pi}{\lambda} (x_n \cos \theta_i \cos \varphi_i + y_n \sin \theta_i \cos \varphi_i + z_n \sin \varphi_i)}$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde, où  $(x_n, y_n, z_n)$  sont les coordonnées cartésiennes du  $n$ -ième capteur, et où  $f_n(\theta_i, \beta_i)$  est la réponse du  $n$ -ième capteur à un champ électrique unitaire arrivant de la direction  $\theta_i$  et ayant un état de polarisation  $\beta_i$  [5]. Soient à présent  $\beta_{i_1}$  et  $\beta_{i_2}$  deux polarisations distinctes de la  $i$ -ième source (par exemple horizontale et verticale), et soient  $\mathbf{a}_1(\theta_i) = \mathbf{a}(\theta_i, \beta_{i_1})$  et  $\mathbf{a}_2(\theta_i) = \mathbf{a}(\theta_i, \beta_{i_2})$  les vecteurs correspondants au vecteur directeur de la DA  $\theta_i$ . La forme analytique de ces vecteurs est supposée connue (par calibration le cas échéant). Pour une polarisation  $\beta_i$ , le champ électrique est la somme de deux champs arrivant de la même direction et ayant des polarisations  $\beta_{i_1}$  et  $\beta_{i_2}$  [5]. Dans ces conditions, le vecteur directeur  $\mathbf{a}(\theta_i, \beta_i)$  est la somme pondérée des vecteurs  $\mathbf{a}_1(\theta_i)$  et  $\mathbf{a}_2(\theta_i)$  :

$$\mathbf{a}(\theta_i, \beta_i) = \beta_{i_1} \mathbf{a}_1(\theta_i) + \beta_{i_2} \mathbf{a}_2(\theta_i) = \mathbf{A}_{12}(\theta_i) \beta_i \quad (1)$$

où  $\mathbf{A}_{12} = [\mathbf{a}_1(\theta_i) \ \mathbf{a}_2(\theta_i)]$ , et où

$$\beta_i = [\beta_{i_1} \ \beta_{i_2}]^T = [\cos \gamma_i, \ e^{j\phi_i} \sin \gamma_i]^T$$

avec  $\|\beta_i\| = 1$ ,  $\gamma_i$  et  $\phi_i$  étant les deux angles qui caractérisent la polarisation de la  $i$ -ième source tels que  $0 \leq \gamma_i \leq \pi/2$  et  $\pi \leq \phi_i < \pi$ .

Les méthodes décrites dans ce papier exploitent les statistiques d'ordre supérieur, i.e. les cumulants d'ordre  $2q$  ( $q \geq 2$ ) des observations, notés

$$C_{i_1 \dots i_q, \mathbf{x}}^{i_q+1 \dots i_2q} = \text{Cum}\{x_{i_1}(t), \dots, x_{i_q}(t), x_{i_{q+1}}(t)^*, \dots, x_{i_{2q}}(t)^*\}$$

avec ( $1 \leq i_j \leq N$ ) ( $1 \leq j \leq 2q$ ) [4]. Ces derniers peuvent être rangés de différentes manières, indexés par  $\ell$  ( $0 \leq \ell < q$ ),

dans la matrice statistique  $\mathcal{C}_{2q, \mathbf{x}}^\ell$  [2, 4] telles que  $C_{2q, \mathbf{x}}^\ell(I_\ell, J_\ell) = C_{i_1 \dots i_q, \mathbf{x}}^{i_q+1 \dots i_2q}$  désigne la  $(I_\ell, J_\ell)$ -ième composante de  $\mathcal{C}_{2q, \mathbf{x}}^\ell$  avec :

$$I_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} N^{q-\ell} (i_j - 1) + \sum_{j=1}^{q-\ell} N^{q-\ell-j} (i_{q+j} - 1) + 1$$

$$J_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} N^{q-\ell} (i_{2q-\ell+j} - 1) + \sum_{j=1}^{q-\ell} N^{q-\ell-j} (i_{\ell+j} - 1) + 1$$

Il a par ailleurs été montré dans [2] que l'indice  $\ell$  détermine le nombre maximal de sources traitables par PD-2q-MUSIC. Notons que l'estimation des cumulants est détaillée dans [4].

## 3 Les algorithmes PD-2q-MUSIC

On pose pour commencer les hypothèses suivantes:

$$\text{H1)} \forall 1 \leq g \leq G, P_g < N$$

$$\text{H2)} \forall 1 \leq g \leq G, \mathcal{A}_{g, 2q}^\ell = \mathbf{A}_g^{\otimes \ell} \otimes \mathbf{A}_g^{*\otimes (q-\ell)}$$
 est de rang plein  $P_g^q$

$$\text{H3)} P(G, q) = \sum_{g=1}^G P_g^q < N^q$$

$$\text{H4)} \mathcal{A}_{2q}^\ell = [\mathcal{A}_{1, 2q}^\ell, \dots, \mathcal{A}_{G, 2q}^\ell]$$
 est de rang plein  $P(G, q)$ .

D'après la propriété de multilinéarité des cumulants et sous l'hypothèse d'un bruit gaussien indépendant des sources d'intérêt, la matrice statistique d'ordre  $2q$  ( $q \geq 2$ ) des observations s'écrit:

$$\mathcal{C}_{2q, \mathbf{x}}^\ell \simeq \mathcal{A}_{2q}^\ell \mathcal{C}_{2q, \mathbf{s}}^\ell \mathbf{A}_{2q}^{\ell \text{H}} \quad (2)$$

### 3.1 L'algorithme KP-PD-2q-MUSIC

En utilisant les hypothèses précitées et l'équation (2), le rang de la matrice statistique des observations,  $\mathcal{C}_{2q, \mathbf{x}}^\ell$ , est le même que celui de la matrice statistique des sources,  $\mathcal{C}_{2q, \mathbf{s}}^\ell$ . Nous noterons ce rang  $r_{2q, \mathbf{s}}^\ell$ . La matrice  $\mathcal{C}_{2q, \mathbf{x}}^\ell$  admet donc  $N^q - r_{2q, \mathbf{s}}^\ell$  valeurs propres nulles et  $r_{2q, \mathbf{s}}^\ell$  valeurs propres non nulles ( $q \geq 2$ ). De plus, étant hermitienne, la matrice  $\mathcal{C}_{2q, \mathbf{x}}^\ell$  admet la décomposition en éléments propres (EVD) suivante :

$$\mathcal{C}_{2q, \mathbf{x}}^\ell = \mathbf{U}_{2q, \mathbf{s}}^\ell \mathbf{\Lambda}_{2q, \mathbf{s}}^\ell [\mathbf{U}_{2q, \mathbf{s}}^\ell]^\text{H} + \mathbf{U}_{2q, \nu}^\ell \mathbf{\Lambda}_{2q, \nu}^\ell [\mathbf{U}_{2q, \nu}^\ell]^\text{H} \quad (3)$$

où  $\mathbf{\Lambda}_{2q, \mathbf{s}}^\ell$  est la matrice diagonale des valeurs propres non nulles,  $\mathbf{U}_{2q, \mathbf{s}}^\ell$  est la matrice unitaire des vecteurs propres associés, la matrice  $\mathbf{\Lambda}_{2q, \nu}^\ell$  désigne la matrice diagonale des valeurs propres nulles et  $\mathbf{U}_{2q, \nu}^\ell$  est la matrice unitaire des vecteurs propres associés. Etant donné que  $\mathcal{C}_{2q, \mathbf{x}}^\ell$  est hermitienne, chaque colonne de  $\mathbf{U}_{2q, \mathbf{s}}^\ell$  est orthogonale à toutes les colonnes de  $\mathbf{U}_{2q, \nu}^\ell$ . On a de plus  $\text{Span}\{\mathbf{U}_{2q, \mathbf{s}}^\ell\} \subseteq \text{Span}\{\mathcal{A}_{g, 2q}^\ell\}$ . En définissant le vecteur  $\mathbf{a}_{2q}^\ell(\theta, \beta) = \mathbf{a}(\theta, \beta)^{\otimes \ell} \otimes \mathbf{a}(\theta, \beta)^{* \otimes (q-\ell)}$  et en notant  $(\theta_{ig}, \beta_{ig})$  les paramètres de DA et de polarisation de la  $i$ -ième source du  $g$ -ième groupe, il peut être facilement vérifié que tous les vecteurs  $\mathbf{a}_{2q}^\ell(\theta_{ig}, \beta_{ig})$  appartiennent à  $\text{Span}\{\mathbf{U}_{2q, \mathbf{s}}^\ell\}$ . Par conséquent ces mêmes vecteurs sont orthogonaux aux colonnes de  $\mathbf{U}_{2q, \nu}^\ell$ . Les paramètres  $(\theta_{ig}, \beta_{ig})$  sont donc solutions de l'équation suivante :

$$\mathbf{a}_{2q}^\ell(\theta_{ig}, \beta_{ig})^\text{H} \mathbf{U}_{2q, \nu}^\ell \mathbf{U}_{2q, \nu}^{\ell \text{H}} \mathbf{a}_{2q}^\ell(\theta_{ig}, \beta_{ig}) = 0 \quad (4)$$

En utilisant l'équation (1) de factorisation, en enlevant les termes redondants de  $\beta_q^\ell = \beta^{\otimes \ell} \otimes \beta^{*\otimes (q-\ell)}$  et en normalisant

l'équation (4), les paramètres  $(\theta_{ig}, \beta_{ig})$  sont également solutions de l'équation suivante :

$$\tilde{\beta}_q^{\ell H} \mathbf{Q}_{q,1}^{\ell}(\theta) \tilde{\beta}_q^{\ell} [\tilde{\beta}_q^{\ell H} \mathbf{Q}_{q,2}^{\ell}(\theta) \tilde{\beta}_q^{\ell}]^{-1} = 0 \quad (5)$$

avec

$$\mathbf{Q}_{q,1}^{\ell}(\theta) = [\mathbf{B}_{\ell} \otimes \mathbf{B}_{q-\ell}]^H \mathbf{A}_{12,q}^{\ell}(\theta)^H \mathbf{U}_{2q,\nu}^{\ell} \mathbf{U}_{2q,\nu}^{\ell H} \mathbf{A}_{12,q}^{\ell}(\theta) [\mathbf{B}_{\ell} \otimes \mathbf{B}_{q-\ell}]$$

$$\mathbf{Q}_{q,2}^{\ell}(\theta) = [\mathbf{B}_{\ell} \otimes \mathbf{B}_{q-\ell}]^H \mathbf{A}_{12,q}^{\ell}(\theta)^H \mathbf{A}_{12,q}^{\ell}(\theta) [\mathbf{B}_{\ell} \otimes \mathbf{B}_{q-\ell}]$$

où  $\mathbf{A}_{12,q}^{\ell}(\theta) = \mathbf{A}_{12}^{\otimes \ell}(\theta) \otimes \mathbf{A}_{12}^{*\otimes(q-\ell)}(\theta)$ , où  $\tilde{\beta}_q^{\ell} = \tilde{\beta}^{\ell} \otimes \tilde{\beta}^{*(q-\ell)}$  est le vecteur de polarisation d'ordre supérieur réduit avec  $\tilde{\beta}^{\ell}$  vecteur  $((\ell+1) \times 1)$  de composantes  $\beta_1^{\ell-j+1} \beta_2^{j-1}$ , et où  $\mathbf{B}_{\ell}$  est une matrice telle que  $\beta^{\otimes \ell} = \mathbf{B}_{\ell} \tilde{\beta}^{\otimes \ell}$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{B}_{\ell} = [\mathbf{B}_{\ell-1} \otimes \mathbf{I}_2] ([\mathbf{I}_{\ell} \otimes \mathbf{c}_1] [\mathbf{I}_{\ell} \ \mathbf{0}_{\ell}] + [\mathbf{I}_{\ell} \otimes \mathbf{c}_2] [\mathbf{0}_{\ell} \ \mathbf{I}_{\ell}])$$

où  $\mathbf{I}_r$  est la matrice identité  $(r \times r)$ ,  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  sont des vecteurs tels que  $\mathbf{c}_1 = [1 \ 0]^T$  et  $\mathbf{c}_2 = [0 \ 1]^T$ , et  $\mathbf{0}_{\ell+1}$  est un vecteur colonne de  $\ell+1$  zeros.

Pour les sources dont la polarisation est inconnue, nous devons implémenter un algorithme qui minimise le critère par rapport à la DA et à la polarisation en même temps, procédure extrêmement coûteuse puisque le critère est alors 4-dimensionnel. Nous limitons donc cet algorithme, que l'on nommera KP-PD-2q-MUSIC (*Known Polarization - Polarization Diversity - 2q-MUSIC*) par la suite, aux cas où la polarisation est connue.

### 3.2 UP-PD-2q-MUSIC algorithms

Pour les sources dont la polarisation est inconnue nous allons transformer la très coûteuse minimisation 4-dimensionnel en une minimisation 2-dimensionnel. En effet, la recherche des minima du membre de gauche de (5) par l'annulation de son gradient nous amène à une équation aux éléments propres de la matrice  $\mathbf{Q}_{q,1}^{\ell}(\theta)$  dans la métrique  $\mathbf{Q}_{q,2}^{\ell}(\theta)$  dont les vecteurs propres sont  $\tilde{\beta}_q^{\ell}$  et dont les valeurs propres sont les minima en question. Ainsi, trouvant le minimum par rapport à  $\theta$  de la valeur propre minimale de la matrice  $\mathbf{Q}_{q,1}^{\ell}(\theta)$  dans la métrique  $\mathbf{Q}_{q,2}^{\ell}(\theta)$  il est possible d'isoler la recherche de la DA de la recherche de la polarisation. La paramètre linéaire est ensuite déduit aisément de cette recherche puisqu'il s'agit du vecteur propre associé [7]. Cette décomposition de la recherche de paramètres donne naissance à la méthode UP-PD-2q-MUSIC (*Unknown Polarization - Polarization Diversity - 2q-MUSIC*) dont une première version, UP-PD-2q-MUSIC-1, consiste à trouver les minima  $\theta_{opt}$  du pseudo-spectre suivant :

$$P_{\text{UP-PD-2q-MUSIC-1}}(\theta) = \lambda_{q,\min}^{\ell}(\theta) \quad (6)$$

où  $\lambda_{q,\min}^{\ell}(\theta)$  correspond à la valeur propre minimale de la matrice  $\mathbf{Q}_{q,1}^{\ell}(\theta)$  dans la métrique  $\mathbf{Q}_{q,2}^{\ell}(\theta)$ . Les valeurs de  $\tilde{\beta}_q^{\ell}$  recherchées sont obtenues en calculant les vecteurs propres respectifs des valeurs propres  $\lambda_{q,\min}^{\ell}(\theta_{opt})$  alors le vecteur propre associé. On peut par ailleurs remarquer qu'il est possible de trouver la valeur propre  $\lambda_{q,\min}^{\ell}(\theta)$  en déterminant la racine minimale de  $\det\{\mathbf{Q}_{q,1}^{\ell}(\theta) - \lambda \mathbf{Q}_{q,2}^{\ell}(\theta)\}$ . Ainsi, lorsque  $\mathbf{Q}_{q,2}^{\ell}(\theta)$  est inversible, trouver  $\theta$  tel que  $\lambda = \lambda_{q,\min}^{\ell}(\theta)$  soit nulle est équivalent à trouver  $\theta$  telle que  $\det\{\mathbf{Q}_{q,2}^{\ell}(\theta)^{-1} \mathbf{Q}_{q,1}^{\ell}(\theta)\} = 0$ . On définit alors le pseudo-spectre d'UP-PD-2q-MUSIC-2:

$$P_{\text{UP-PD-2q-MUSIC-2}}(\theta) = \det\{\mathbf{Q}_{q,1}^{\ell}(\theta)\} / \det\{\mathbf{Q}_{q,2}^{\ell}(\theta)\} \quad (7)$$

Ce spectre est moins coûteux à implémenter que (6) puisque l'EVD est remplacée par deux calculs de déterminants.

### 3.3 Identifiabilité

Notons que la méthode KP-PD-2q-MUSIC peut traiter un nombre maximal de sources  $P_{max} = N_{2q}^{\ell} - 1$  et que les deux méthodes à polarisation inconnue UP-PD-2q-MUSIC peuvent traiter au maximum  $P_{max} = N_{2q}^{\ell} - (\ell+1)(q-\ell+1)$  sources. L'entier  $N_{2q}^{\ell}$  est le nombre de capteurs virtuels qu'induit l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur, il dépend de i) du type de réseau, ii) de l'ordre des statistiques, i.e.  $2q$ , iii) du type de rangement matriciel des statistiques (indexé par  $\ell$ ) et iv) du nombre de capteurs réel  $N$  [4]. On donne les valeurs maximales de  $N_{2q}^{\ell}$  pour un type de réseau quelconque composé de deux sous-réseaux polarisés orthogonalement, collocalisés ou non, puis les valeurs de  $N_{2q}^{\ell}$  pour un réseau linéaire (ULA) composé de deux sous-réseaux polarisés orthogonalement et collocalisés.

|      |        | Sous-réseaux non-collocalisés | Sous-réseaux collocalisés | Sous-réseaux collocalisés ULA |
|------|--------|-------------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| $2q$ | $\ell$ | $N_{2q,max}^{\ell}$           | $N_{2q,max}^{\ell}$       | $N_{2q}^{\ell}$               |
| 4    | 2      | $N(N+1)/2$                    | $3N(N+2)/8$               | $3(N-1)$                      |
| 4    | 1      | $N^2 - N + 2$                 | $N^2 - 2N + 4$            | $4(N-1)$                      |

FIG. 1: Borne max de  $N_{2q}^{\ell}$  en fonction de  $N$  pour des réseaux composés de deux sous-réseaux polarisés orthogonalement

## 4 Simulations

On considère premièrement un réseau circulaire de  $N=6$  capteurs coplanaires équiécartés (UCA) de rayon  $r=0.3\lambda$  composé de deux sous-réseaux de  $N=3$  capteurs polarisés verticalement pour l'un et horizontalement pour l'autre. Dans ce contexte, deux QPSK de temps-symbole égal à la période d'échantillonnage et filtrées par un cosinus surélevé de roll-off  $\alpha=0.3$  sont réceptionnées par le réseau avec comme paramètres  $(\theta_1, \gamma_1, \phi_1) = (50^\circ, 45^\circ, 0^\circ)$  et  $(\theta_2, \gamma_2, \phi_2) = (60^\circ, 45^\circ, 10^\circ)$  (on suppose que  $\varphi_i = 0^\circ$ ). La figure 2(b) montre la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) en sortie des trois méthodes exposées dans l'article et celle en sortie de 2q-MUSIC pour  $1 \leq q \leq 3$  en fonction du nombre d'échantillons temporels,  $L$ , utilisé dans l'estimation des matrices statistiques. La figure 2(a) montre la probabilité de bonne détection (PNR) en fonction de  $L$ . Les résultats ont été obtenus à partir de 300 réalisations. Les matrices statistiques sont indexées par  $\ell=1$  pour  $q=2$  et par  $\ell=2$  pour  $q=3$ . Pour les méthodes 2q-MUSIC, les six capteurs n'ont pas de diversité de polarisation. On constate que pour un ordre  $q$  donné les méthodes UP-PD-2q-MUSIC sont plus précises que la méthode 2q-MUSIC. La probabilité de bonne détection converge plus rapidement vers 1 pour les méthodes à diversité de polarisation.

On s'intéresse maintenant au cas d'un mélange de sources sous-déterminé. De ce fait, 4 QPSK de paramètres respectifs  $(\theta_1, \gamma_1, \phi_1) = (15^\circ, 45^\circ, -75^\circ)$ ,  $(\theta_2, \gamma_2, \phi_2) = (45^\circ, 45^\circ, 0^\circ)$ ,  $(\theta_3, \gamma_3, \phi_3) = (95^\circ, 22.5^\circ, 75^\circ)$  et  $(\theta_4, \gamma_4, \phi_4) = (122.5^\circ, 45^\circ, 150^\circ)$  arrivent sur un réseau UCA de  $N=3$  capteurs. La figure 3(a) montre que la PNR est quasi-nulle pour la méthode 2q-MUSIC ( $2 \leq q \leq 3$ ) alors qu'elle converge rapidement vers 1 pour les méthodes PD-2q-MUSIC ( $2 \leq q \leq 3$ ). Vue la faiblesse de la PNR de 2q-MUSIC il est impossible de calculer la RMSE pour cette

méthode. La figure 3(b) affiche donc la RMSE de l'estimation des DAs pour les méthodes à diversité de polarisation uniquement. On montre que la résolution est meilleure pour  $q = 3$ , ce qui indique que celle-ci croît avec  $q$ .

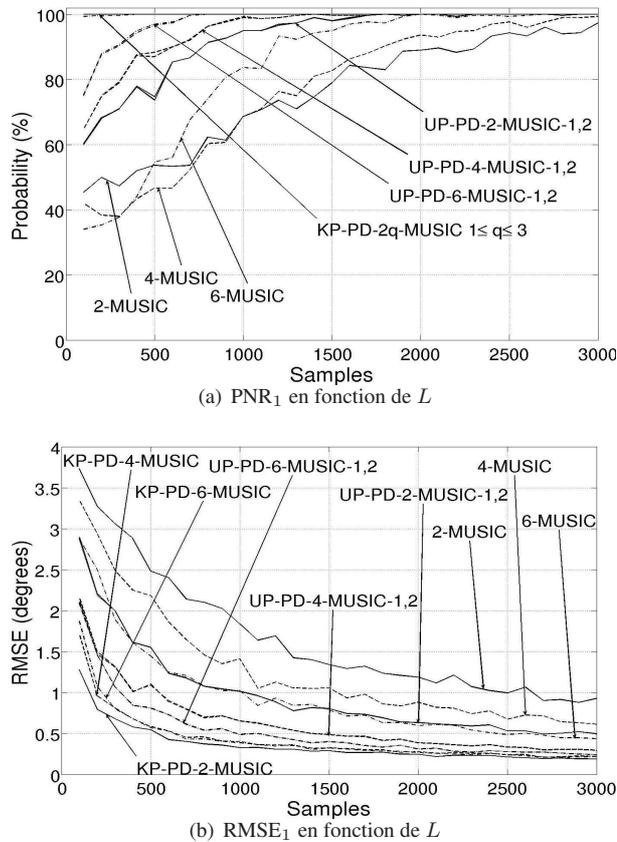


FIG. 2: PNR et RMSE de 2 sources proches arrivant sur un réseau UCA de  $N = 6$  capteurs constitué de deux sous-réseaux non-colocalisés

## 5 Conclusion

Trois nouvelles versions de  $2q$ -MUSIC capables de prendre en compte les polarisations des sources ont été présentées dans ce papier. Il a été montré que ces algorithmes accroissent les performances de la méthode  $2q$ -MUSIC initiale, notamment en terme de résolution et de probabilité de bonne détection, au moins pour des sources faiblement séparées en DA et en polarisation. De plus, la factorisation de la matrice de mélange introduite par Ferrara au second ordre à été étendue à un ordre pair quelconque, diminuant ainsi sévèrement le coût de calcul de l'algorithme et rendant possible une recherche conjointe des paramètres de DA et de polarisation des sources.

## References

- [1] J.-F. CARDOSO, "Localisation et identification par la quadricovariance," *Traitement du Signal*, vol. 7, no. 5, June 1990.
- [2] P. CHEVALIER, L. ALBERA, A. FERREOL, and P. COMON, "On the virtual array concept for higher order array processing," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1254–1271, April 2005.

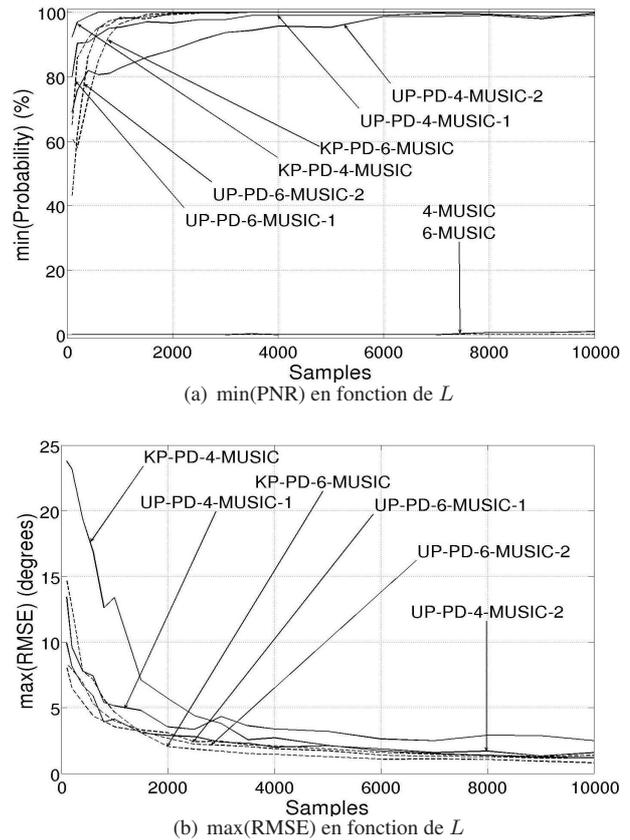


FIG. 3: PNR et RMSE maximale de 4 sources arrivant sur un réseau UCA de  $N = 3$  capteurs non-colocalisés

- [3] P. CHEVALIER and A. FERREOL, "On the virtual array concept for the fourth-order direction finding problem," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 47, no. 9, pp. 2592–2595, September 1999.
- [4] P. CHEVALIER, A. FERREOL, and L. ALBERA, "High resolution direction finding from higher order statistics: the  $2q$ -MUSIC algorithm," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 54, no. 8, pp. 2986–2997, August 2006.
- [5] R. T. COMPTON, *Adaptive Antennas - Concepts and Performance*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 07632, 1988.
- [6] M. DOGAN and J. MENDEL, "Applications of cumulants to array processing — Part I: Aperture extension and array calibration," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 43, no. 5, pp. 1200–1216, May 1995.
- [7] E. FERRARA and T. PARKS, "Direction finding with an array of antennas having diverse polarizations," *IEEE Transactions On Antennas Propagation*, vol. 31, pp. 231–236, March 1983.
- [8] E. GONE and J. MENDEL, "Applications of cumulants to array processing - Part VI: Polarization and direction of arrival estimation with minimally constrained arrays," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 47, no. 9, pp. 2589–2592, September 1999.
- [9] J. L. LACOUPE, F. GLANGEAUD, and J. I. MARS, "Blind separation of polarized waves," in *EUSIPCO-98, Signal Processing IX Theories and Application*, Rhodes, 2002, pp. 1629–1632.
- [10] S. MIRON, N. LE BIHAN, and J. I. MARS, "Vector-sensor MUSIC for polarized seismic sources localization," *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, vol. 10, pp. 74–84, October 2005.
- [11] —, "High resolution vector-sensor array processing based on biquaternions," in *ICASSP 2006, Toulouse, FRANCE, May 14-19 2006*, pp. IV 1077–1080.
- [12] —, "Quaternion music for vector-sensors array," *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol. 54, no. 4, pp. 1218–1229, April 2006.
- [13] B. PORAT and B. FRIEDLANDER, "Direction finding algorithms based on high-order statistics," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 39, no. 9, pp. 2016–2024, September 1991.
- [14] R. O. SCHMIDT, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Transactions On Antennas Propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, March 1986, reprint of the original 1979 paper from the RADCSpectrum Estimation Workshop.