

# Influence de la dynamique de la rupture sur l'exposant de rugosité dans les fractures 1D.

Nicolas MALLICK<sup>1</sup>, Pierre-Philippe CORTET<sup>1</sup>, Stéphane SANTUCCI<sup>2</sup>, Loïc VANEL<sup>1</sup>, Stéphane G. ROUX<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique, CNRS UMR 5672

École Normale Supérieure de Lyon  
46, allée d'Italie 69364 Lyon, France

<sup>2</sup>Fysisk Institutt

Universitetet i Oslo

PostBoks 1048 Blindern, 0316 Oslo, Norvège

Nicolas.Mallick@ens-lyon.fr, Stephane.Roux@ens-lyon.fr

**Résumé** – Nous déterminons l'exposant de rugosité de fractures en utilisant plusieurs estimateurs de lois d'échelle existant dans la littérature dont un récent : les coefficients dominants [1]. A partir d'un large jeu de réalisations d'une expérience de rupture d'une feuille de papier (102 fronts), nous comparons les exposants estimés dans deux régimes de croissance différents. Les résultats montrent un écart significatif à l'invariance d'échelle et une différence significative entre la valeur des exposants estimés dans le régime de croissance lente (sous-critique) et le régime de croissance rapide.

**Abstract** – We determine the roughness exponent of fractures using several estimators of scaling laws found in the literature including a recent one: the leaders [1]. Using a large data set for the rupture of a paper sheet (102 fronts), we compare the scaling exponents obtained in two different crack growth regimes. The results show a significant departure from scaling laws and a difference in fracture roughness between the slow (sub-critical) and the fast growth regime.

## 1 Introduction

Depuis les années 80, les surfaces issues de la rupture des matériaux sont considérées comme des objets autosimilaires [2], présentant une invariance d'échelle caractérisée par un exposant de Hurst, appelé exposant de rugosité dans le domaine de la physique des surfaces. La mesure expérimentale de l'exposant de rugosité des fronts de fractures dans les milieux élastiques désordonnés présente un grand intérêt théorique en permettant de valider ou non les modèles de croissance de fractures [3]. Dans ce contexte, l'existence d'exposants de rugosité universels a été et est toujours débattue [4]. Récemment, plusieurs expériences ont mis en évidence une variation de ces exposants avec la direction de la fracture [5] ou la nature du matériau [6]. D'autre part, la présence d'un effet de quantification à petite échelle, lié à la numérisation des signaux [7], et d'un effet de taille finie [8] des échantillons fracturés rendent difficiles les mesures de l'exposant de rugosité. De plus, les techniques développées dans la communauté de la fracture sont souvent rudimentaires et appliquées parfois sans précautions (plusieurs références dans [3]). Enfin, la plupart des expériences n'ont montré aucune variation de l'exposant de rugosité avec la vitesse de croissance dans les fractures rugueuses [9].

Nous avons mis en évidence récemment qu'il existe des variations de l'exposant de rugosité en fonction du régime de croissance : croissance **sous-critique** (vitesse très faible) ou **rapide** (vitesse plus élevée proche de la vitesse des ondes de Rayleigh) [10]. Dans cet article, nous poursui-

vons cette étude en analysant plus précisément l'influence des paramètres de contrôle de l'expérience et en comparant les résultats obtenus avec les différents estimateurs les plus couramment utilisés.

## 2 Données expérimentales

Nous déchirons des feuilles de papier ( $21 \times 24\text{cm}^2$ ) à l'aide d'une machine de traction ce qui permet une bonne reproductibilité des expériences [11]. Les échantillons sont placés dans la machine, et après qu'une fracture a été initiée en leur centre, une force constante est appliquée, conduisant à une contrainte locale à la pointe de la fissure sensiblement inférieure à la contrainte de rupture du papier. Du fait d'un processus d'activation thermodynamique [11], la fracture grandit néanmoins, mais très lentement ( $10^{-6} - 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$ ). C'est le régime **sous-critique**. La contrainte (locale) augmentant avec la taille de la fracture puisque la force (globale) est fixée, la fracture atteint finalement une longueur critique  $l_c$  où la contrainte locale atteint le seuil de rupture. La fracture se développe alors beaucoup plus rapidement ( $10^2 - 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ ). C'est le régime **rapide** où l'instabilité mécanique du système provoque la croissance. Les échantillons *post-mortem* sont ensuite scannés, puis les profils de fracture sont extraits des images. La longueur  $l_c$  étant déterminée expérimentalement, nous sommes à même d'extraire les parties sous-critique et rapide d'un front de fracture. Nous disposons de 102 fronts de fracture indépendants obtenus

au cours de quatre séries d'expériences réalisées avec différentes forces appliquées [11]. La résolution du scanner (1600 dpi) a été choisie de manière à ce que la taille d'un pixel ( $17,6 \mu m$ ) corresponde au diamètre des fibres de cellulose, les échelles plus petites n'ayant aucun intérêt. En conséquence, la taille des signaux est d'environ 8000 points pour la partie rapide et 2000 points pour la partie lente. Etant donnée la faible longueur des signaux il apparaît primordial de posséder un large ensemble de réalisations et de vérifier la robustesse des résultats en utilisant différents estimateurs.

### 3 Analyse multifractale

#### 3.1 Invariance d'échelle

Le phénomène d'invariance d'échelle d'un processus  $s(x)$  correspond à une absence d'échelle caractéristique. Les propriétés d'invariance sont couramment définies en introduisant des coefficients multirésolution  $T_s(a, x)$  qui dépendent conjointement du temps  $t$  et de l'échelle  $a$  (voir par exemple [12]). L'invariance d'échelle implique que les moments d'ordre  $q$  des coefficients multirésolution obtenus à chaque échelle  $a$  se comportent en lois de puissance :

$$M_q(a) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T_X(a, t(k))|^q \sim a^{\zeta(q)}, \quad (1)$$

où  $n_a$  désigne le nombre de coefficients à l'échelle  $a$ . Le formalisme multifractal relie le spectre des exposants  $\zeta(q)$  au spectre de singularité qui décrit de manière statistique la régularité ou rugosité locale du signal étudié [13]. Si le spectre  $\zeta(q)$  est linéaire ( $\zeta(q) = Hq$ ), le signal est monofractal et la rugosité est uniforme. On peut alors définir un exposant de rugosité global  $H$ . Si le spectre est non linéaire,  $\zeta(q) = c_1q - c_2q^2/2 + \dots$ , le signal est multifractal et la rugosité évolue en fonction de la position. Le spectre de singularité est alors une fonction concave de moyenne  $c_1$  et d'écart-type  $c_2$ . L'exposant de rugosité global est défini naturellement comme la valeur de la rugosité locale la plus probable  $H = c_1$ .

L'analyse pratique consiste à mettre en évidence ces lois de puissance et à mesurer les exposants  $\zeta(q)$  correspondants. Souvent, cette estimation est réalisée à partir de la mesure de la pente d'une droite observée dans le diagramme  $\ln M_q(a)$  versus  $\ln a$ . Ensuite, un ajustement polynomial  $\zeta(q) = c_1q - c_2q^2/2$  est réalisé pour décrire continûment ce spectre et estimer  $c_1$  et  $c_2$ . Une alternative à cette méthode a été introduite récemment : la méthode des log-cumulants [14]. Elle consiste à estimer les coefficients  $c_i$  de la fonction  $\zeta(q)$  directement à partir du comportement linéaire des cumulants  $C_i(a)$  du logarithme de la valeur absolue des coefficients multirésolution. Pour le premier cumulants, on a :

$$C_1(a) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} (\ln |T_X(a, t(k))|)^q \sim c_1 \ln a. \quad (2)$$

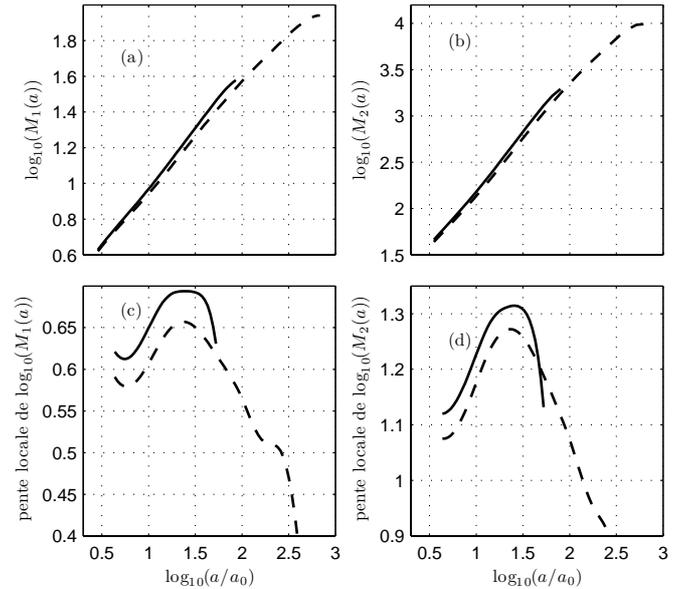


FIG. 1 – (a) et (b) : Logarithme de  $M_1(a)$  et  $M_2(a)$  moyennés sur l'ensemble des réalisations pour la partie rapide (pointillés) et sous critique (trait plein) en fonction  $\log_{10} a$ . (c) et (d) : Pentés locales correspondantes. Les résultats sont obtenus en utilisant la TOC.

#### 3.2 Estimateurs

Les coefficients multirésolution les plus utilisés dans l'analyse multifractale reposent sur les coefficients en ondelettes qui se définissent à partir du produit scalaire du signal avec des dilatées (d'un facteur  $a$ ) et translatées (d'un facteur  $t$ ), d'une fonction  $\psi$ . L'ondelette mère est principalement caractérisée par un entier  $N \geq 1$  appelé le nombre de moments nuls. Dans ce travail, nous utiliserons les cinq grandes classes suivantes : (i) les coefficients de la transformée en ondelettes continue (TOC) ; (ii) les coefficients de la transformée en ondelettes discrète (TOD), qui consistent essentiellement en une restriction de ceux de la TOC à une grille dyadique ; (iii) une version squelettisée de la TOC ou coefficients MMTO, développée par A. Arnéodo et largement utilisée (voir par exemple [15]) ; (iv) la méthode des coefficients dominants (CD) définie à partir de la TOD et reposant sur des résultats théoriques récents [1, 16] ; (v) la méthode des fonctions de structure (FS), qui peut être vue comme une TOC avec pour ondelette mère une somme de fonctions de Dirac telle que les coefficients en ondelettes correspondent aux incréments successifs du signal [15].

Pour l'ondelette mère, nous avons choisi trois types de fonctions avec  $N$  moments nuls : (i) les dérivées  $N + 1$  ième de la Gaussienne pour la TOC et MMTO ; (ii) les ondelettes de Daubechies d'ordre  $N$  pour la TOC et CD ; (iii) les incréments d'ordre  $N$  pour FS.

Nous estimons les fonctions  $M_q(a)$  et  $C_1(a)$  puis les coefficients  $\zeta(q)$  ( $q = 1, 2$ ), et  $c_1$  par régression linéaire pour chaque front de fracture. Ensuite nous calculons la moyenne et l'écart-type ( $\sigma$ ) de ces quantités sur nos  $N$  fronts. Les barres d'erreurs dans les figures de ce manuscrit correspondent à l'erreur statistique asymptotique  $\sigma/\sqrt{N}$ .

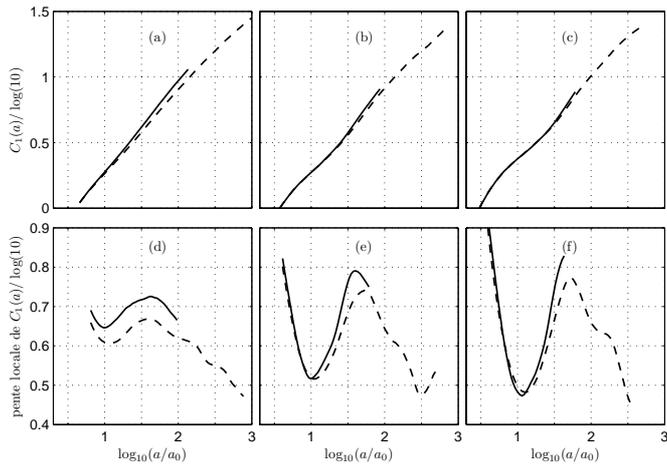


FIG. 2 – Cumulant d'ordre 1 en fonction de  $\log_{10}(a/a_0)$  pour la partie rapide (pointillés) et sous-critique (trait plein) pour différents ordre d'ondelette : 1 (a), 2 (b), 3 (c). Les résultats sont obtenus en utilisant la TOC.

## 4 Estimation de la rugosité

### 4.1 À partir des moments

Nous montrons les moments d'ordre 1 et 2 moyennés sur l'ensemble des réalisations (fig. 1(a) et (b)), ainsi que leurs pentes locales (fig. 1(c) et (d)) pour les parties lente et rapide. Les erreurs sur l'estimation de la pente locale sont très faibles, de l'ordre de l'épaisseur de la courbe. On observe tout d'abord la présence d'une échelle caractéristique, aux alentours de  $\log a/a_0 = 1.5$ , soit  $500 \mu\text{m}$ . Cette échelle est de l'ordre de la longueur caractéristique des fibres. De plus, on voit nettement figure 1 (c) et (d) qu'il existe des exposants différents pour la partie rapide et la partie sous-critique. Néanmoins, la différence entre les pentes locales ne semble pas stable à travers les échelles. On voit aussi que  $\zeta(2) \neq 2\zeta(1)$  ce qui conduirait à des exposants de rugosité différents. Ceci pourrait être dû à la présence de multifractalité, comme cela a été récemment suggéré [17]. Dès lors, les moments n'apparaissent pas comme un bon outil pour estimer de façon univoque l'exposant de rugosité. On leur préférera donc dans la suite le cumulant d'ordre 1.

### 4.2 À partir du cumulant d'ordre 1

Nous comparons figure 2 le cumulant d'ordre 1 pour la partie sous-critique et la partie rapide. L'échelle caractéristique de  $500 \mu\text{m}$  est toujours présente. On constate (fig. 2 (a) et (d)) qu'il existe une différence régulière entre les pentes des cumulants des deux régimes, qui ne semble pas dépendre de l'échelle, contrairement à ce qui est observé pour les moments. Ainsi, même si l'invariance d'échelle est imparfaite, il apparaît clairement que l'exposant de rugosité diffère selon le régime de croissance.

On constate aussi que les variations de la pente de  $C_1(a)$  sont de plus en plus fortes lorsque l'ordre de l'ondelette augmente (fig. 2 (d), (e), (f)), jusqu'à devenir clairement visibles (fig. 2 (b) et (c)). Les ondelettes d'ordres élevés semblent donc être plus sensibles à l'échelle caractéristique

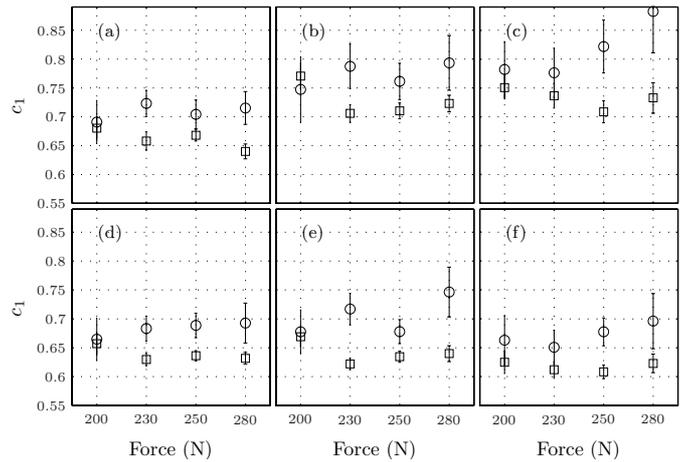


FIG. 3 – Moyenne et écart-type des estimés  $c_1$  pour la partie sous critique (o) et rapide (□) en fonction de la force de traction. Méthode TOC (a, b et c) et MMTO (d, e et f) en utilisant des ondelettes d'ordre 1 (a et d), 2 (b et e) et 3 (c et f).

présente dans les fronts de fracture. Il semble aussi que la différence entre régime sous-critique et régime rapide ne soit effective qu'à partir d'une certaine échelle, qui augmente avec l'ordre de l'ondelette. Nous n'avons pour le moment aucun argument quantitatif permettant d'expliquer ces faits. Ceci nous a guidé lors du choix des échelles à considérer pour l'estimation de  $c_1$ . Nous nous sommes limités aux échelles où la différence était nette pour les trois ordres utilisés ( $a \geq 10^{1.4}$ ).

Afin de tester la robustesse de ce résultat, nous estimons  $c_1$  pour des expériences réalisées à différentes forces, en utilisant les méthodes TOC et MMTO, pour différents ordres d'ondelettes. Pour les quatre forces considérées (fig. 3), l'estimation pour la partie lente et rapide montre une différence très claire entre leurs deux exposants de rugosité, et ceci quel que soit l'ordre de l'ondelette utilisée. De plus, les estimations dépendent peu des paramètres de l'expérience.

Le tableau 1 montre les exposants de rugosité obtenus pour tous les estimateurs utilisés, et ce pour différents ordres. Même si la valeur des coefficients fluctue avec la nature de l'estimateur utilisé, ceux-ci présentent tous une différence claire et systématique entre partie sous-critique et partie rapide. Nous montrons aussi une estimation de cette différence, qui apparaît robuste et peu influencée par la nature de l'estimateur avec une valeur de l'ordre de 0.05.

### 4.3 Influence de la statistique

La figure 4 présente les résultats obtenus en fonction du nombre de réalisations prises en compte dans l'estimation, en mélangeant toutes les réalisations quels que soient les paramètres expérimentaux. On voit ainsi que lorsque le nombre de réalisations prises en compte dans l'estimation est trop faible, la différence entre les deux exposants de rugosité n'est pas claire, du fait de la grande dispersion des coefficients obtenus pour chaque réalisation. Néanmoins, lorsqu'on prend en compte suffisamment de réalisations (environ 40), l'estimateur converge, et cette différence ressort

		FS	TOC	MMTO	TOD	CD
ordre 1	Sous-critique	$0.68 \pm 0.02$	$0.70 \pm 0.01$	$0.68 \pm 0.01$	$0.77 \pm 0.03$	$0.67 \pm 0.02$
	Rapide	$0.64 \pm 0.01$	$0.66 \pm 0.01$	$0.64 \pm 0.01$	$0.65 \pm 0.01$	$0.61 \pm 0.01$
	Différence	$0.05 \pm 0.02$	$0.05 \pm 0.02$	$0.05 \pm 0.02$	$0.12 \pm 0.03$	$0.06 \pm 0.02$
ordre 2	Sous-critique	$0.78 \pm 0.02$	$0.77 \pm 0.02$	$0.69 \pm 0.01$	$0.81 \pm 0.04$	$0.66 \pm 0.02$
	Rapide	$0.70 \pm 0.01$	$0.72 \pm 0.01$	$0.64 \pm 0.01$	$0.69 \pm 0.02$	$0.63 \pm 0.01$
	Différence	$0.08 \pm 0.03$	$0.05 \pm 0.02$	$0.05 \pm 0.02$	$0.12 \pm 0.04$	$0.03 \pm 0.02$
ordre 3	Sous-critique	$0.85 \pm 0.03$	$0.82 \pm 0.03$	$0.67 \pm 0.02$	$0.80 \pm 0.06$	–
	Rapide	$0.73 \pm 0.01$	$0.73 \pm 0.01$	$0.62 \pm 0.01$	$0.70 \pm 0.02$	$0.63 \pm 0.01$
	Différence	$0.12 \pm 0.03$	$0.09 \pm 0.03$	$0.05 \pm 0.02$	$0.10 \pm 0.06$	–

TAB. 1 – Moyenne et écart-type asymptotique des estimés  $c_1$  obtenus à partir des 102 réalisations pour chaque estimateur. Dans les lignes "Différence", sont donnés la moyenne et l'écart-type asymptotique calculés par la même méthode statistique à partir de la différence des estimés  $c_1$  entre parties sous-critique et rapide.

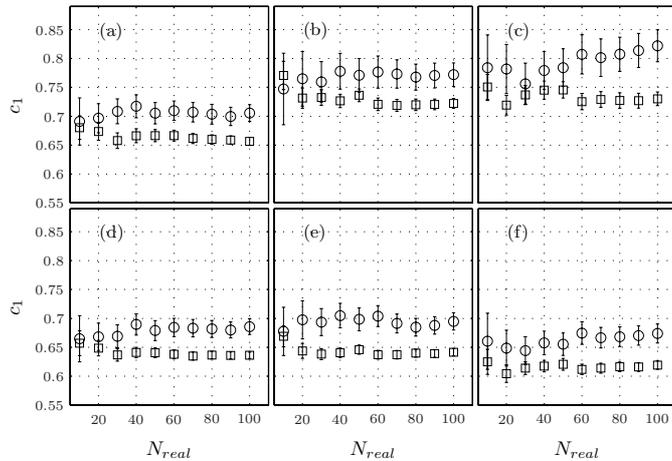


FIG. 4 – Moyenne et écart-type des estimés  $c_1$  pour la partie sous-critique (o) et rapide ( $\square$ ) en fonction du nombre de réalisations. Méthode TOC (a, b et c) et MMTO (d, e et f) en utilisant des ondelettes d'ordre 1 (a et d), 2 (b et e) et 3 (c et f).

alors nettement. C'est donc grâce à notre large jeu de réalisations que cette différence fine a pu être mise en évidence.

## 5 Conclusion

Nous avons montré l'existence d'une différence claire entre la rugosité de la partie sous-critique et celle de la partie rapide. Ce résultat remet ainsi encore plus en cause l'existence d'exposants de rugosité universels. L'utilisation des différentes techniques accessibles pour l'analyse de l'invariance d'échelle montre la robustesse de ces résultats. Cette différence s'explique sans doute par des processus physiques très différents : dans le régime sous-critique, la croissance grandit par activation thermique, et est caractérisée par des sauts brusques et de longs temps d'arrêt ; alors que dans le régime rapide, la fracture est instable mécaniquement, et grandit d'un seul coup. Nous montrons aussi que les cumulants doivent être préférés aux moments pour l'estimation de l'exposant de rugosité des fractures. Enfin, nous avons mis en évidence la présence d'une échelle caractéristique, dont l'origine reste à déterminer.

## Références

- [1] S. Jaffard, B. Lashermes, and P. Abry, Wavelet Analysis and Appl., Univ. of Macau, China, 2005.
- [2] B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja and A. J. Paullay, Nature **308**, 721, 1984.
- [3] M. J. Alava, P. K. V. V. Nukala, and S. Zapperi, Adv. in Phys. **55**, 349, 2006.
- [4] E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planès, Eur. Phys. Lett. **13**, 73, 1990 ; E. Bouchaud, J. Phys. : Condens. Matter **9**, 4319, 1997.
- [5] L. Ponson, D. Bonamy, and E. Bouchaud, Phys. Rev. Lett. **96**, 035506, 2006.
- [6] I. L. Menezes-Sobrinho, M. S. Couto, and I. R. B. Ribeiro, Phys. Rev. E **71**, 066121, 2005.
- [7] S. J. Mitchell, Phys. Rev. E **72**, 065103(R), 2005.
- [8] J. M. Lopez, M. A. Rodriguez, and R. Cuerno, Phys. Rev. E **56**, 3993, 1997.
- [9] J. Schmittbuhl, and K. J. Måløy, Phys. Rev. Lett. **78**, 3888, 1997 ; P. Daguiet, B. Nghiem, E. Bouchaud, and F. Creuzet, Phys. Rev. Lett. **78**, 1062, 1997 ; J. M. Boffa, C. Allain, R. Chertcoff, J.-P. Hulin, F. Plouraboué, and S. Roux, Eur. Phys. J. B **7**, 179, 1999.
- [10] N. Mallick, P.P. Cortet, S. Santucci *et al.*, Phys. Rev. Lett. (in press), 2007.
- [11] S. Santucci, P.P. Cortet, S. Deschanel *et al.*, Europhys. Lett. **74**, 595, 2006.
- [12] S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, Boston, 1997.
- [13] G. Parisi, and U. Frisch in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics*, ed. M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi, North-Holland, Amsterdam, 84, 1985.
- [14] J. Delour, J. F. Muzy and A. Arneodo, Eur. Phys. J. B **23**, 243, 2001.
- [15] J. F. Muzy, E. Bacry et A. Arneodo, Phys. Rev. E **47**, 875-884, 1993.
- [16] S. Jaffard, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 72(2), AMS, 91-152, 2004.
- [17] E. Bouchbinder, I. Procaccia, S. Santucci and L. Vanel, Phys. Rev. Lett. **96**, 055509, 2006.