

# Influence des canaux Gaussien et de Rayleigh sur la distribution du PAPR dans les systèmes MIMO-OFDM

Basel RIHAWI, Yves LOUËT

IETR/Supélec - Campus de Rennes  
Avenue de la Boulaie, CS 47601, F-35576 Cesson-Sévigné cedex, France  
basel.rihawi@rennes.supelec.fr, yves.louet@rennes.supelec.fr

**Résumé** – La combinaison MIMO-OFDM connaît un intérêt grandissant et sera sans aucun doute retenue dans les futurs systèmes de télécommunications haut débits. Cependant, l'inconvénient majeur de ces systèmes réside dans le problème du PAPR en émission du fait de la modulation OFDM. Dans cet article, nous nous plaçons à la réception pour étudier l'influence des systèmes MIMO et du canal de propagation sur la distribution du PAPR du signal reçu, avant l'amplificateur faible bruit. Des expressions mathématiques de la distribution du PAPR sont proposées dans le cas de canaux gaussien et de Rayleigh.

**Abstract** – Multiple-input multiple-output orthogonal frequency division multiplexing systems (MIMO-OFDM) has become a promising candidate for high performance 4G broadband wireless communications. However, like OFDM, one main disadvantage of MIMO-OFDM is that the signals transmitted on different antennas may exhibit a prohibitively large peak-to-average power ratio (PAPR). In this paper, the influence of gaussian and flat Rayleigh fading channel on the PAPR of MIMO-OFDM passband signals at the receiver-side have been analyzed. A mathematical expression for complementary cumulative distribution function (CCDF) of the PAPR has been derived which depends on the number of transmitting antennas and the parameters of the channel.

## 1 Introduction

Depuis Telatar [1], les systèmes MIMO ont fait l'objet d'intérêts considérables, du fait des débits pouvant être atteint dans des canaux sévères de type multitrajets. Ainsi, comparés à des système mono antenne, il a été montré que dans un canal de Rayleigh à évanouissements plats, la capacité des systèmes MIMO pouvait être améliorée d'un facteur dépendant du minimum entre le nombre d'antennes émettrices et réceptrices [2, 3]. De plus, pour des applications à haut débit et à large bande, la combinaison du MIMO avec l'OFDM tend de plus en plus à s'imposer.

Cependant, les verrous technologiques sont importants. En se plaçant dans un contexte MIMO-OFDM, un des inconvénients inhérents à l'OFDM fait l'objet de cet article, à savoir le problème du Peak to Average Power Ratio (PAPR). Classiquement abordé au niveau de l'amplificateur d'émission, le problème du PAPR se repose à la réception, au niveau du Low Noise Amplifier (LNA). Du fait de la multiplication des signaux d'émission propre aux systèmes MIMO, nous pouvons nous attendre à une augmentation du PAPR en réception, en comparaison avec un système SISO classique. Le canal de propagation va donc jouer un rôle important dans l'estimation du PAPR en réception, ce qui fait l'objet de cet article. Les canaux considérés sont des canaux de Gauss et de Rayleigh.

La structure de l'article est ainsi la suivante : la deuxième partie donne quelques définitions liées au PAPR. Dans la troisième partie, le système MIMO-OFDM utilisé dans cette étude est présenté. L'idée principale de ce papier est évoquée dans les quatrième et cinquième parties où l'influence des canaux gaussiens et de Rayleigh à évanouisse-

ments plats sur la distribution du PAPR sont respectivement étudiés. Des résultats de simulation sont présentés et l'article se termine par une conclusion.

## 2 Définitions du signal OFDM et du PAPR

Les notations utilisées dans cet article sont les suivantes. Les vecteurs dans les domaines fréquentiels, temporels en bande de base et en radio fréquence sont respectivement représentés par des lettres majuscules en caractères gras, des lettres minuscules en caractère gras notées ( $\vec{\cdot}$ ) et des lettres minuscules en caractères gras sans ( $\vec{\cdot}$ ). Les scalaires sont représentés par des lettres minuscules normales.

Le principe de la modulation OFDM est le suivant. Un ensemble de  $N$  symboles de données  $S_k$  où  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , rangées dans un vecteur  $\mathbf{S}$ , va être transmit en parallèle de façon à ce que chacun module une sous-porteuse donnée d'un ensemble  $\{f_k, k = 0, 1, \dots, N-1\}$ . Les  $N$  sous-porteuses sont orthogonales, avec  $f_k = k\Delta f$ , où  $\Delta f = 1/T$  et  $T$  est la durée du symbole d'origine. L'enveloppe complexe  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  du signal OFDM sur une durée de symbole  $T$  peut alors être exprimée par :

$$\tilde{\mathbf{s}}(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j2\pi f_k t}, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Le signal radio fréquence émis  $\mathbf{s}(t)$  est alors donné par :

$$\mathbf{s}(t) = \Re[\tilde{\mathbf{s}}(t)e^{j2\pi f_c t}], \quad (2)$$

où  $f_c$  est la fréquence porteuse et  $\Re(\cdot)$  la partie réelle.

Pratiquement, le signal  $\mathbf{s}(t)$  est numérique et suréchantillonné ce qui peut être écrit sous la forme :

$$\tilde{s}(n/L) = \frac{1}{\sqrt{LN}} \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j\frac{2\pi kn}{NL}}, \quad t \in [0, NL - 1], \quad (3)$$

où  $L$  est le facteur de sur-échantillonnage. Ainsi,  $\mathbf{S}$  est obtenu de  $\tilde{\mathbf{s}}$  par une IDFT (transformée discrète de Fourier rapide inverse) selon :

$$\tilde{\mathbf{s}} = \text{IFFT}(\mathbf{S}). \quad (4)$$

Les échantillons complexes du signal OFDM dans le domaine temporel sont approximativement distribués suivant une loi gaussienne à cause de l'indépendance statistique des porteuses (théorème de limite centrale). Du fait de cette loi, le PAPR est une mesure permettant de quantifier l'importance de la valeur instantanée de ces échantillons, relativement à leurs valeurs moyennes. On le calcule généralement sur la puissance du signal. Il est défini par :

$$\text{PAPR}\{\mathbf{s}(t)\} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |\Re[\tilde{\mathbf{s}}(t)e^{j2\pi f_c t}]|^2}{E\{|\Re[\tilde{\mathbf{s}}(t)e^{j2\pi f_c t}]|^2\}}, \quad (5)$$

où  $E\{u\}$  représente l'espérance mathématique de  $u$ .

Considéré comme une variable aléatoire, le PAPR sera évalué à l'aide de sa fonction de distribution complémentaire (CCDF pour l'acronyme anglo-saxon). Elle est donnée par :

$$\text{CCDF}_{\text{PAPR}}(PR_0) = Pr[\text{PAPR} > PR_0]. \quad (6)$$

Dans un contexte OFDM à  $N$  porteuses, la CCDF du PAPR du signal numérique en bande de base (pour  $L=1$ ) est approximativement donnée par [6] :

$$Pr[\text{PAPR}\{\tilde{\mathbf{s}}(n)\} > PR_0] \approx 1 - (1 - e^{-PR_0})^N. \quad (7)$$

Cette dernière équation est une très bonne approximation de la distribution du PAPR de  $\tilde{\mathbf{s}}(n)$ , mais diffère de la distribution du PAPR de  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  de plus d'un  $dB$ . D'après [6],

$$Pr[\text{PAPR}\{\tilde{\mathbf{s}}(t)\} > PR_0] \approx 1 - (1 - e^{-PR_0})^{2.8N}. \quad (8)$$

La valeur de 2.8 a été obtenue par simulation. Le PAPR de  $\tilde{\mathbf{s}}(n/L)$  s'approche du PAPR de  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  lorsque  $L$  tend vers l'infini. Dans la pratique  $L = 4$  est assez grand pour détecter la présence des pic en temps-continu avec une précision satisfaisante [7].

### 3 Analyse du PAPR d'un système MIMO-OFDM dans un canal gaussien

#### 3.1 Modèle du système MIMO-OFDM

Le système MIMO-OFDM utilisé dans cette étude est représenté sur la Fig. 1. Les acronymes CNA, HPA, et

LNA sont respectivement associés au convertisseur numérique-analogique, à l'amplificateur de puissance et à l'amplificateur à faible bruit. Chacune des sous-porteuses est indépendamment modulée en utilisant une modulation d'amplitude en quadrature (QAM).

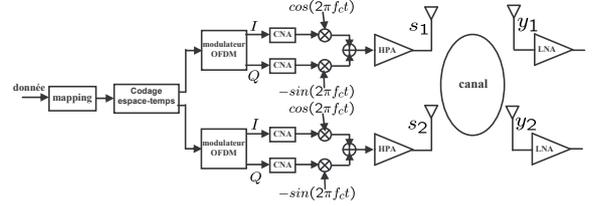


FIG. 1 – Structure d'un système MIMO-OFDM  $2 \times 2$

Pour simplifier les notations dans le reste de l'article, on note les signaux en temps-continu par des lettres minuscules en caractère gras et leur échantillons en temps-discret par des lettres minuscules normales.

Chaque échantillon des signaux émis en temps-discret  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  (Fig.1) suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_s^2$ .

Dans ce travail, nous supposons l'utilisation à l'émission d'amplificateurs de puissance idéaux avec des gains unitaires.

#### 3.2 Développements théoriques

Dans cette partie, nous étudions la distribution du PAPR du signal reçu  $\mathbf{y}_1(t)$  dans le cas d'un canal gaussien (voir Fig.1). Ce signal peut être exprimé par :

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{b}, \quad (9)$$

où  $\mathbf{b}$  est un bruit blanc additif gaussien (BBAG).

En considérant  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{y}_1^2$ , la densité de probabilité d'un échantillon quelconque de  $\mathbf{z}_1$  est alors donnée par [9] :

$$f_{z_1}(z_1) = \frac{1}{\sqrt{z_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{y_1}}} e^{-\frac{z_1}{2\sigma_{y_1}^2}} U(z_1), \quad (10)$$

où  $\sigma_{y_1}^2 = \sigma_{s_1}^2 + \sigma_{s_2}^2 + \sigma_b^2$ , où  $f_{y_1}$  suit une loi gaussienne et où  $U$  est la fonction échelon unité.

La CCDF du PAPR du signal reçu continu  $\mathbf{y}_1$  est alors approximativement donnée par :

$$Pr[\text{PAPR}\{\mathbf{y}_1\} > PR_0] \approx 1 - \left(\text{erf}\left(\frac{\sqrt{PR_0}}{\sqrt{2}}\right)\right)^{2.8N}. \quad (11)$$

Ce résultat peut être généralisé : dans un contexte d'un canal gaussien et pour un système MIMO-OFDM, les signaux émis et reçus suivent tous des lois gaussiennes. La conséquence est que le canal gaussien n'influence pas la distribution du PAPR des signaux reçus, et ceci quelque soit la valeur du rapport signal sur bruit. Des résultats de simulation sont présentés Fig.3.

## 4 Analyse du PAPR d'un système OFDM dans un canal de Rayleigh à évanouissement plat

### 4.1 Le modèle de canal de Rayleigh à évanouissement plat

Le canal de Rayleigh à évanouissement plat est un modèle beaucoup utilisé pour les transmissions à bande étroite sur des canaux sans fil et radio mobiles. Ce modèle a été adopté dans cet article. Dans un canal de Rayleigh à évanouissement plat, toutes les fréquences du signal sont atténuées par le même facteur. Pour un échantillon quelconque en temps-discret, le signal reçu  $\mathbf{y}$  peut être écrit comme :

$$y = \alpha s + b, \quad (12)$$

où  $\alpha$  est l'amplitude d'évanouissement et  $s$  est l'échantillon du signal émis. L'amplitude d'évanouissement  $\alpha$  peut être décrite selon une variable aléatoire de Rayleigh [8].

### 4.2 Etude du cas SISO-OFDM

Tout d'abord, commençons par le calcul de la CCDF du PAPR du signal reçu pour un système SISO-OFDM illustré sur la Fig. 2.

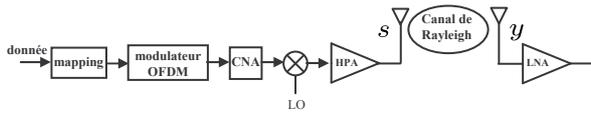


FIG. 2 – Structure d'un système SISO-OFDM

On peut ainsi écrire

$$y = \alpha s + b = x + b,$$

où  $\alpha$  est une variable aléatoire de Rayleigh.

La densité de probabilité de  $x = \alpha s$ , (où  $s$  est un signal OFDM qui suit une loi gaussienne de moyennes nulle et de variance  $\sigma_s^2$ ) est alors [9]

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha\left(\frac{x}{s}\right) f_s(s) \frac{1}{|s|} ds. \quad (13)$$

Après quelques développements, nous obtenons :

$$f_x(x) = \frac{1}{2\sigma_\alpha\sigma_s} e^{-\frac{|x|}{\sigma_\alpha\sigma_s}}. \quad (14)$$

En considérant  $z = y^2$ , on obtient alors :

$$F_z(z) = \frac{1}{2} \left[ 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2}\sigma_b}\right) + e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\sigma_\alpha\sigma_s y}{2\sigma_\alpha^2\sigma_s^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 + \sigma_\alpha\sigma_s y}{\sqrt{2}\sigma_\alpha\sigma_s\sigma_b}\right) - e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\sigma_\alpha\sigma_s y}{2\sigma_\alpha^2\sigma_s^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 - \sigma_\alpha\sigma_s y}{\sqrt{2}\sigma_\alpha\sigma_s\sigma_b}\right) \right], \quad (15)$$

où  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  est la fonction d'erreur complémentaire définie comme  $\operatorname{erfc}(\cdot) = 1 - \operatorname{erf}(\cdot)$ .

Puis, grâce à l'indépendance des  $N$  échantillons, la CCDF du PAPR du signal reçu continu peut être approchée par :

$$\begin{aligned} \Pr[\operatorname{PAPR}\{\mathbf{y}\} > PR_0] &\approx 1 - \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_b}\right) \right. \\ &+ \frac{1}{2} e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\sigma_\alpha\sigma_s\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\sigma_\alpha^2\sigma_s^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 + \sigma_\alpha\sigma_s\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_\alpha\sigma_s\sigma_b}\right) \\ &\left. - \frac{1}{2} e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\sigma_\alpha\sigma_s\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\sigma_\alpha^2\sigma_s^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 - \sigma_\alpha\sigma_s\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_\alpha\sigma_s\sigma_b}\right) \right]^{2.8N}, \end{aligned}$$

où  $P_m = P_m = 2\sigma_\alpha^2\sigma_s^2 + \sigma_b^2$  est la puissance moyenne de  $\mathbf{y}$ .

La Fig. 3 montre les tracés des CCDFs du PAPR du signal reçu dans deux cas (canal BBAG et canal de Rayleigh à évanouissements plats). Ces courbes sont obtenues par simulation de  $10^5$  symboles avec  $N = 1024$  sous-porteuses modulées par une modulation 4-QAM. Le rapport signal sur bruit est égal à  $10\text{dB}$ . Le facteur de sur-échantillonnage est  $L = 4$ . On peut constater à partir de cette figure que pour une probabilité de  $10^{-2}$ , le canal de Rayleigh à évanouissements plats dégrade le PAPR d'environ  $5\text{dB}$  comparé au canal gaussien. On peut également voir que la similitude entre la théorie et la simulation est parfaite.

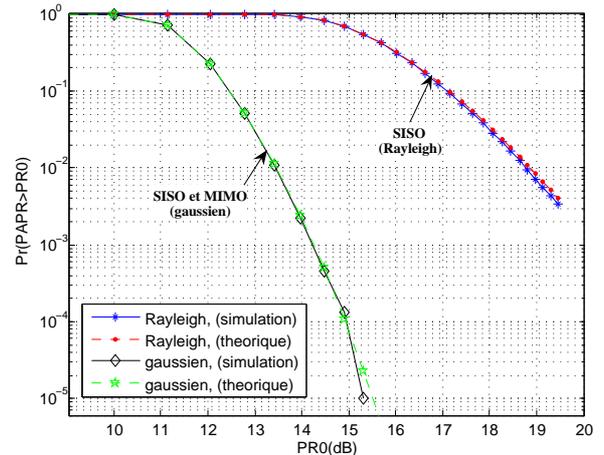


FIG. 3 – CCDFs du PAPR du signal reçu pour SISO-OFDM (canaux BBAG et Rayleigh à évanouissements plats)

### 4.3 Etude du cas MIMO-OFDM

Nous allons maintenant rechercher la distribution du PAPR du signal  $\mathbf{y}_1$  d'un système MIMO-OFDM à deux antennes représenté sur la Fig.1. A partir de cette figure, un échantillon du signal reçu peut être exprimé par :

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + b \\ &= x_1 + x_2 + b = x + b. \end{aligned} \quad (16)$$

où  $x_1 = \alpha_1 s_1$  et  $x_2 = \alpha_2 s_2$  sont supposés indépendants et  $x = x_1 + x_2$ . La densité de probabilité de  $x$  peut être écrit comme :

$$\begin{aligned}
f_x(x) &= \int_{u=-\infty}^{\infty} f_{x_1}(u)f_{x_2}(x-u)du \\
&= \frac{\beta e^{-\frac{|x|}{\beta}} - \gamma e^{-\frac{|x|}{\gamma}}}{2(\beta^2 - \gamma^2)} ; \quad \beta \neq \gamma \\
&= \frac{e^{-\frac{|x|}{\delta}} (\delta + |x|)}{4\delta^2} ; \quad \delta = \beta = \gamma, \quad (17)
\end{aligned}$$

où  $\beta = \sigma_{\alpha_1} \cdot \sigma_{s_1}$  et  $\gamma = \sigma_{\alpha_2} \cdot \sigma_{s_2}$ .

La CCDF du PAPR du signal continu  $\mathbf{y}_1$  dans le cas de  $\beta \neq \gamma$  peut alors être exprimée par :

$$\begin{aligned}
Pr[PAPR\{\mathbf{y}_1\} > PR_0] &\approx \\
1 - & \left[ \frac{1}{2(\beta^2 - \gamma^2)} (2(\beta^2 - \gamma^2) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_b}\right) \right. \\
+ \beta^2 e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\beta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\beta^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 + \beta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\beta\sigma_b}\right) & \\
- \beta^2 e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\beta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\beta^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 - \beta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\beta\sigma_b}\right) & \\
- \gamma^2 e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\gamma\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\gamma^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 + \gamma\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\gamma\sigma_b}\right) & \\
+ \gamma^2 e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\gamma\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\gamma^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 - \gamma\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\gamma\sigma_b}\right) & \left. \right]^{2.8N},
\end{aligned}$$

où  $P_m = 2(\beta^2 + \gamma^2) + \sigma_b^2$  est la puissance moyenne de  $\mathbf{y}_1$ .

La CCDF du PAPR de  $\mathbf{y}_1$  dans le cas de  $\beta = \gamma = \delta$  peut être exprimé par :

$$\begin{aligned}
Pr[PAPR\{\mathbf{y}_1\} > PR_0] &\approx \\
1 - & \left[ \frac{1}{4\delta^2} (4\delta^2 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_b}\right) \right. \\
+ \lambda_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 + \delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\delta\sigma_b}\right) & \\
- \lambda_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 - \delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\delta\sigma_b}\right) & \left. \right]^{2.8N}, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{où } \lambda_1 &= (2\delta^2 - \sigma_b^2 - \delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}) e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\delta^2}}, \\
\text{et } \lambda_2 &= (2\delta^2 - \sigma_b^2 + \delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}) e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\delta^2}}.
\end{aligned}$$

Dans le dernier cas,  $P_m = 4\delta^2 + \sigma_b^2$  est la puissance moyenne de  $\mathbf{y}_1$ .

La Fig. 4 illustre la CCDF du PAPR en utilisant les mêmes paramètres de simulation que ceux du cas SISO-OFDM. On peut noter que le PAPR diminue en fonction du nombre d'antennes d'émission.

## 5 Conclusions

Dans cet article, nous avons décrit l'influence des canaux de Gauss et de Rayleigh (à évanouissements plats) sur la distribution du PAPR du signal reçu : en se basant sur une analyse mathématique appuyée par des simulations, nous avons montré que le signal sur une des antennes de réception d'un système MIMO-OFDM a une distribution du PAPR égale à celle des signaux émis, ceci pour un

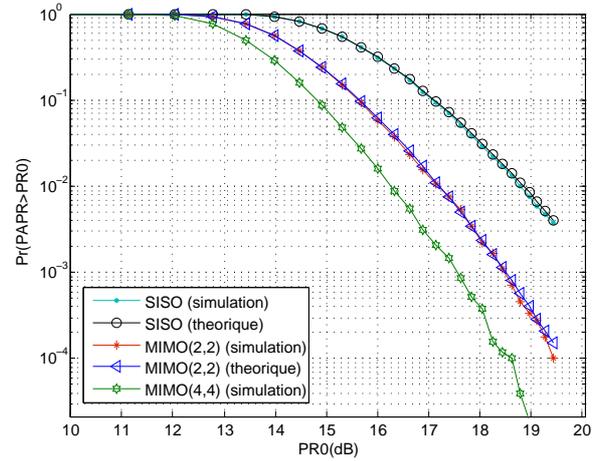


FIG. 4 – CCDFs du PAPR du signal reçu pour SISO, MIMO(2,2) and (4,4) (canal de Rayleigh à évanouissement plat),  $SNR = 10dB$

canal gaussien. En ce qui concerne le canal de Rayleigh, les développements montrent une dégradation du PAPR (par rapport au cas gaussien) dans le cas SISO-OFDM. Dans un contexte MIMO-OFDM, nous avons montré, toujours dans un canal de Rayleigh, que le PAPR diminuait en fonction du nombre d'antennes d'émission.

## Références

- [1] I. E. Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels," AT T Bell Labs Internal Tech. Memo., June 1995.
- [2] G. J. Foschini, "Layered Space-Time Architecture for Wireless communication in a Fading Environment when using Multi-Element Antennas," Bell Labs Tech. J., vol. 1, no. 2, Autumn 1996, pp. 41-59.
- [3] G. J. Foschini and M. J. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas," Wireless Personal Communication, vol. 6, pp. 314-335, March 1998.
- [4] R. Van Nee and R. Prasad, "OFDM Wireless Multimedia Communications," Artech House, 2000.
- [5] B. Rihawi, Y. Louët "Peak to Average Power Ratio analysis in MIMO systems", ICCTA 06, Damas, Syria, May 06.
- [6] R. Van Nee and A. de Wild, "Reducing the peak-to-average power ratio of OFDM," Proc. IEEE Vehicular Technology Conference, vol. 3, pp. 2072-2076, 1998.
- [7] J. Tellado, "Peak to Average Power reduction for Multicarrier Modulation", Ph.D. Thesis Dissertation, Stanford University, September 1999.
- [8] J. G. Proakis, "Digital Communications," fourth edition, pp. 810-811, 2001.
- [9] A. Papoulis, S. U. Pillai, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes," fourth edition, McGraw-Hill, 2002.