

Approche variationnelle pour le calcul bayésien dans les problèmes inverses en imagerie

Ali MOHAMMAD-DJAFARI¹

¹Laboratoire des signaux et systèmes
(UMR 08506 du CNRS, Supélec et Univ Paris Sud),
Supélec, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France
djafari@lss.supelec.fr

Résumé – Dans une approche bayésienne non supervisée pour la résolution d'un problème inverse, on cherche à estimer conjointement la grandeur inconnue \mathbf{f} et les paramètres $\boldsymbol{\theta}$. Ceci se fait en utilisant la loi *a posteriori* conjointe $p(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{g})$. L'expression de cette loi est souvent complexe et son exploration et le calcul des estimateurs bayésiens nécessitent soit l'optimisation des critères souvent non convexes ou le calcul d'espérances des lois non gaussiennes multivariées. Dans tous ces cas, il y a souvent besoin de faire des approximations. Nous avons déjà exploré les possibilités de l'approximation de Laplace et les méthodes d'échantillonnage MCMC. Ici, nous explorons l'approximation de $p(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{g})$ par une loi séparable en \mathbf{f} et en $\boldsymbol{\theta}$. Ceci permet de proposer des algorithmes itératifs plus abordables en coût de calcul, surtout, si on choisit ces lois approchantes dans des familles des lois exponentielles. Le principal objet de ce papier est de fournir des détails des différents algorithmes que l'on obtient pour différents choix de ces familles.

Abstract – In a non supervised Bayesian estimation approach for inverse problems in imaging systems, one tries to estimate jointly the unknown image pixels \mathbf{f} and the hyperparameters $\boldsymbol{\theta}$. This is, in general, done through the joint posterior law $p(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{g})$. The expression of this joint law is often very complex and its exploration through sampling and computation of the point estimators such as MAP and posterior means need either optimization of non convex criteria or integration of non Gaussian and multi variate probability laws. In any of these cases, we need to do approximations. We had explored before the possibilities of Laplace approximation and sampling by MCMC. In this paper, we explore the possibility of approximating this joint law by a separable one in \mathbf{f} and in $\boldsymbol{\theta}$. This gives the possibility of developing iterative algorithms with more reasonable computational cost, in particular, if the approximating laws are chosen in the exponential conjugate families. The main objective of this paper is to give details of different algorithms we obtain with different choices of these families.

1 Introduction

Dans une approche estimation bayésienne non supervisée pour résoudre un problème inverse, on commence par écrire l'expression de la loi *a posteriori* conjointe des inconnues \mathbf{f} et des hyper-paramètres $\boldsymbol{\theta}$:

$$p(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{g}; \mathcal{M}) = \frac{p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})}{p(\mathbf{g}|\mathcal{M})} = \frac{p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}; \mathcal{M}) p(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})}{p(\mathbf{g}|\mathcal{M})}. \quad (1)$$

Dans cette relation $p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}; \mathcal{M})$ est la vraisemblance des inconnues dont l'expression s'obtient à partir d'un modèle liant les inconnues aux données \mathbf{g} (modélisation du problème directe), $p(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})$ est la loi *a priori* des inconnues et

$$p(\mathbf{g}|\mathcal{M}) = \iint p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}; \mathcal{M}) p(\mathbf{f}|\boldsymbol{\theta}; \mathcal{M}) p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M}) d\mathbf{f} d\boldsymbol{\theta} \quad (2)$$

est ce qu'on appelle l'évidence du modèle \mathcal{M} .

Il est intéressant de mentionner que, pour n'importe quelle loi de probabilité $q(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta})$ on a

$$\begin{aligned} p(\mathbf{g}|\mathcal{M}) &= \iint p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathcal{M}) d\mathbf{f} d\boldsymbol{\theta} \\ &= \iint q(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}) \frac{p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})}{q(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta})} d\mathbf{f} d\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

$$\geq \iint q(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}) \ln \frac{p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})}{q(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta})} d\mathbf{f} d\boldsymbol{\theta}. \quad (3)$$

Aussi, notant par

$$\mathcal{F}(q) = \iint q(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}) \ln \frac{p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})}{q(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta})} d\mathbf{f} d\boldsymbol{\theta} \quad (4)$$

et par

$$\text{KL}(q : p) = \iint q(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}) \ln \frac{p(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})}{q(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta})} d\mathbf{f} d\boldsymbol{\theta} \quad (5)$$

on montre facilement que

$$p(\mathbf{g}|\mathcal{M}) = \mathcal{F}(q) + \text{KL}(q : p). \quad (6)$$

Ainsi $\mathcal{F}(q)$, appelée l'énergie libre de q par rapport à p , est une limite inférieure de $p(\mathbf{g}|\mathcal{M})$ car $\text{KL}(q : p) \geq 0$. Par la suite, nous allons écrire l'expression de $\mathcal{F}(q)$ par

$$\mathcal{F}(q) = \langle \ln p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}; \mathcal{M}) \rangle_q + \mathcal{H}(q) \quad (7)$$

où $\mathcal{H}(q)$ est l'entropie de q . [1, 2]

2 Approche variationnelle

Nous allons maintenant utiliser ces relation pour décrire le principe de l'approche variationnelle. L'idée de base est que l'utilisation directe de la loi *a posteriori* conjointe $p(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{g}; \mathcal{M})$ est souvent très coûteux pour, par exemple, être explorée par échantillonnage directe ou pour calculer les moyennes *a posteriori* $\hat{\mathbf{f}} = \int \int \mathbf{f} p(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{g}; \mathcal{M}) d\boldsymbol{\theta} d\mathbf{f}$

et $\hat{\theta} = \int \int \theta p(\mathbf{f}, \theta | \mathbf{g}; \mathcal{M}) d\mathbf{f} d\theta$. En effet, rare sont les cas où on puisse trouver des expressions analytiques pour ces intégrales. De même l'exploration de cette loi par des méthodes de Monté Carlo est aussi coûteuses. On cherche alors de l'approximer par une loi plus simple $q(\mathbf{f}, \theta)$. Par simplicité, nous entendons par exemple une loi q qui soit séparable en \mathbf{f} et en θ :

$$q(\mathbf{f}, \theta) = q_1(\mathbf{f}) q_2(\theta) \tag{8}$$

Évidemment, cette approximation doit être fait de telle sorte qu'une mesure de distance entre q et p soit minimale. Si, d'une manière naturelle, on choisi $\text{KL}(q : p)$ comme cette mesure, on aura :

$$(\hat{q}_1, \hat{q}_2) = \arg \min_{(q_1, q_2)} \{\text{KL}(q_1 q_2 : p)\} = \arg \max_{(q_1, q_2)} \{\mathcal{F}(q_1 q_2)\} \tag{9}$$

et sachant que $\text{KL}(q_1 q_2 : p)$ est convexe en q_1 à , q_2 fixée et vice versa, on peut obtenir la solution d'une manière itérative :

$$\begin{cases} \hat{q}_1 = \arg \min_{q_1} \{\text{KL}(q_1 \hat{q}_2 : p)\} = \arg \max_{q_1} \{\mathcal{F}(q_1 \hat{q}_2)\} \\ \hat{q}_2 = \arg \min_{q_2} \{\text{KL}(\hat{q}_1 q_2 : p)\} = \arg \max_{q_2} \{\mathcal{F}(\hat{q}_1 q_2)\} \end{cases} \tag{10}$$

Utilisant la relation (7), il est facile de montrer que les solutions d'optimisation de de ces étapes sont

$$\begin{cases} \hat{q}_1(\mathbf{f}) \propto \exp \left[\langle \ln p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \theta; \mathcal{M}) \rangle_{\hat{q}_2(\theta)} \right] \\ \hat{q}_2(\theta) \propto \exp \left[\langle \ln p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \theta; \mathcal{M}) \rangle_{\hat{q}_1(\mathbf{f})} \right] \end{cases} \tag{11}$$

Une fois cet algorithme convergé vers $\hat{q}_1^*(\mathbf{f})$ et $\hat{q}_2^*(\theta)$, on peut les utiliser d'une manière indépendante pour calculer, par exemple les moyennes $\hat{\mathbf{f}}^* = \int \mathbf{f} \hat{q}_1^*(\mathbf{f}) d\mathbf{f}$ et $\hat{\theta}^* = \int \theta \hat{q}_2^*(\theta) d\theta$.

Une deuxième étape de simplification est nécessaire pour être capable de calculer les espérances qui se trouvent dans ces exponentielles. Les calculs non paramétriques sont souvent trop coûteux. On choisit alors une forme paramétrique pour ces lois de telle sorte qu'on puisse, à chaque itération, remettre à jours seulement les paramètres de ces lois, à condition cependant que ces formes ne changent pas au cours des itérations. La famille des lois exponentielles conjuguées ont cette propriété [1, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Nous examinons ici, trois cas :

2.1 Cas dégénérée

Il s'agit de choisir pour $\hat{q}_1(\mathbf{f})$ et $\hat{q}_2(\theta)$ des formes dégénérées suivantes :

$$\begin{cases} \hat{q}_1(\mathbf{f} | \tilde{\mathbf{f}}) = \delta(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}) \\ \hat{q}_2(\theta | \tilde{\theta}) = \delta(\theta - \tilde{\theta}) \end{cases} \tag{12}$$

Par conséquence, qu'au cours des itérations, nous aurons à remettre à jours \mathbf{f} et θ au cours des itérations. les paramètres de la loi *a posteriori* jointe $p(\mathbf{f}, \theta | \mathbf{g}; \mathcal{M})$.

En remarquant alors que

$$\begin{cases} \hat{q}_1(\mathbf{f}) \propto p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \tilde{\theta}; \mathcal{M}) \propto p(\mathbf{f}, \tilde{\theta} | \mathbf{g}; \mathcal{M}) \\ \hat{q}_2(\theta) \propto p(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{f}}, \theta; \mathcal{M}) \propto p(\tilde{\mathbf{f}}, \theta | \mathbf{g}; \mathcal{M}) \end{cases} \tag{13}$$

Il est alors facile de voir que si $p(\mathbf{f}, \theta | \mathbf{g}; \mathcal{M})$ est gaussienne à θ fixé, on aura juste à calculer $\tilde{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{f}, \tilde{\theta} | \mathbf{g}; \mathcal{M})\}$

que l'on utilise ensuite pour mettre à jour $\hat{q}_2(\theta)$. On note alors que cet algorithme devient équivalent à ce qu'on peut appeller MAP Joint :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \tilde{\theta}; \mathcal{M})\} = \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{f}, \tilde{\theta} | \mathbf{g}; \mathcal{M})\} \\ \tilde{\theta} = \arg \max_{\theta} \{p(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{f}}, \theta; \mathcal{M})\} = \arg \max_{\theta} \{p(\tilde{\mathbf{f}}, \theta | \mathbf{g}; \mathcal{M})\} \end{cases} \tag{14}$$

On remarque que l'on retrouve un algorithme du type MAP jointe.

2.2 Cas particulier conduisant à l'algorithme EM

Il s'agit de choisir, comme dans le cas précédent une forme dégénérée pour $\hat{q}_2(\theta) = \delta(\theta - \tilde{\theta})$, ce qui donne

$$\hat{q}_1(\mathbf{f}) \propto p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \tilde{\theta}; \mathcal{M}) \propto p(\mathbf{f}, \tilde{\theta} | \mathbf{g}; \mathcal{M}) \propto p(\mathbf{f} | \tilde{\theta}, \mathbf{g}; \mathcal{M}) \tag{15}$$

ce qui signifie que $\hat{q}_1(\mathbf{f})$ est une loi dans la même famille que la loi *a posteriori* $p(\mathbf{f} | \mathbf{g}, \theta; \mathcal{M})$. Évidemment, si la forme de cette loi est simple, par exemple une gaussienne, (ce qui est le cas dans les situations que nous étudierons) les calculs seront simples.

A chaque itération, on aurait alors à remettre à jours $\tilde{\theta}$ qui est ensuite utilisé pour trouver $\hat{q}_1(\mathbf{f} | \tilde{\theta}) = p(\mathbf{f} | \mathbf{g}, \tilde{\theta}; \mathcal{M})$, qui est utilisée pour calculer

$$Q(\theta, \tilde{\theta}) = \langle \ln p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \theta; \mathcal{M}) \rangle_{\hat{q}_1(\mathbf{f} | \tilde{\theta})} \tag{16}$$

On remarque facilement l'équivalence avec l'algorithme EM.

2.3 Cas particulier proposé pour les problèmes inverses

Il s'agit de choisir, pour $\hat{q}_1(\mathbf{f})$ et $\hat{q}_2(\theta)$ les mêmes familles de lois que $p(\mathbf{f} | \mathbf{g}, \theta)$ et $p(\theta | \mathbf{g}, \mathbf{f})$, ce qui permet de profiter de la mise à jour facile de ces lois si des lois *a priori* correspondantes sont choisie dans les familles des lois conjuguées associé à la modélisation directe du problème.

Dans ce travail, dans un premier temps, nous allons considéré le cas des problèmes inverses linéaires :

$$\mathbf{g} = \mathbf{H} \mathbf{f} + \epsilon \tag{17}$$

où \mathbf{H} représente la forme discrétisé de la modélisation directe du problème et ϵ représente l'ensemble des erreurs de mesure et de modélisation avec des hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} p(\mathbf{g} | \mathbf{H}, \mathbf{f}, \theta_e; \mathcal{M}) = \mathcal{N}(\mathbf{H} \mathbf{f}, (1/\theta_e) \mathbf{I}), \\ p(\mathbf{f} | \theta_f; \mathcal{M}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, (1/\theta_f) (\mathbf{D}_f^t \mathbf{D}_f)^{-1}), \\ p(\theta_e; \mathcal{M}) = \mathcal{G}(\alpha_{e0}, \beta_{e0}), \\ p(\theta_f; \mathcal{M}) = \mathcal{G}(\alpha_{f0}, \beta_{f0}) \end{cases} \tag{18}$$

où $\theta = (\theta_e = 1/\sigma_e^2, \theta_f = 1/\sigma_f^2)$. On obtient alors facilement les expressions de $p(\mathbf{g}, \mathbf{f} | \theta; \mathcal{M})$, $p(\mathbf{f} | \mathbf{g}, \theta; \mathcal{M})$ et $p(\theta | \mathbf{g}, \mathbf{f}; \mathcal{M})$ qui sont :

$$\begin{cases} p(\mathbf{g}, \mathbf{f} | \mathbf{H}, \theta_e; \mathcal{M}) = \mathcal{N}(\mathbf{H} \mathbf{f}, (1/\theta_e) \mathbf{I}) \mathcal{N}(\mathbf{0}, (1/\theta_f) (\mathbf{D}_f^t \mathbf{D}_f)^{-1}), \\ p(\mathbf{f} | \mathbf{g}, \mathbf{H}, \theta_f; \mathcal{M}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\Sigma}), \\ p(\theta_e; \mathcal{M}) = \mathcal{G}(\hat{\alpha}_e, \hat{\beta}_e), \\ p(\theta_f; \mathcal{M}) = \mathcal{G}(\hat{\alpha}_f, \hat{\beta}_f) \end{cases} \tag{19}$$

où les expressions de $\widehat{\mathbf{f}}$, $\widehat{\Sigma}$, $(\widehat{\alpha}_e, \widehat{\beta}_e)$ et $(\widehat{\alpha}_f, \widehat{\beta}_f)$ seront données en annexe.

3 Application en restauration d'image

Dans le cas de la restauration d'image où \mathbf{H} a une structure particulière, et où l'opération $\mathbf{H}\mathbf{f}$ représente une convolution de l'image f avec la réponse impulsionnelle h , la partie difficile et coûteuse de ces calculs est celle du calcul de $\widehat{\mathbf{f}}$ qui peut se faire à l'aide de la Transformée de Fourier rapide.

De même, l'approche peut très facilement être étendue pour le cas de la restauration aveugle ou myope où on cherche à la fois d'estimer la réponse pulsionnelle \mathbf{h} , l'image \mathbf{f} et les hyper-paramètres θ . Pour établir l'expressions des différentes lois dans ce cas, nous notons que le problème directe, suivant que l'on s'intéresse à \mathbf{f} (déconvolution) ou à \mathbf{h} (identification de la réponse impulsionnelle), peut s'écrire

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) &= h(\mathbf{r}) * f(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) * h(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r}) \\ \mathbf{g} &= \mathbf{H}\mathbf{f} + \epsilon = \mathbf{F}\mathbf{h} + \epsilon \end{aligned} \quad (20)$$

Pour permettre d'obtenir une solution bayésienne pour l'étape de l'identification, nous devons aussi modéliser \mathbf{h} . Une solution est de supposer $\mathbf{h} = \Phi\mathbf{w}$ où la matrice Φ est une matrice telle que $\Phi\mathbf{w}$ représente la convolution $\phi(\mathbf{r}) * w(\mathbf{r})$. Ainsi les colonnes de Φ représentent une base et les éléments du vecteur \mathbf{w} représentent les coefficients de la décomposition de h sur cette base. On a ainsi

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) &= (\phi * w) * f(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r}) = f * (\phi * w)(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r}) \\ \mathbf{g} &= \Phi\mathbf{W}\mathbf{f} + \epsilon = \mathbf{F}\Phi\mathbf{w} + \epsilon \end{aligned} \quad (21)$$

Le problème de la déconvolution aveugle se ramène à l'estimation de \mathbf{f} et \mathbf{w} avec des lois

$$\begin{aligned} p(\mathbf{g}|\mathbf{w}, \mathbf{f}, \Sigma_\epsilon) &= \mathcal{N}(\Phi\mathbf{W}\mathbf{f}, \Sigma_\epsilon) = \mathcal{N}(\mathbf{F}\Phi\mathbf{w}, \Sigma_\epsilon), \\ \text{avec } \Sigma_\epsilon &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{\theta_{ei}}, i = 1, \dots, M \right\} \text{ et } p(\theta_{ei}) = \mathcal{G}(\alpha_{e0}, \beta_{e0}) \\ p(\mathbf{f}|\theta_f) &= \mathcal{N}(\mathbf{0}, (\theta_f \mathbf{D}_f \mathbf{D}_f^t)^{-1}) \text{ avec } p(\theta_f) = \mathcal{G}(\alpha_{f0}, \beta_{f0}), \\ p(\mathbf{w}|\alpha) &= \prod_j \mathcal{N}(0, \frac{1}{\alpha_j}) \text{ avec } p(\alpha) = \prod_j \mathcal{G}(a_0, b_0), \forall j \end{aligned} \quad (22)$$

Avec ces lois *a priori*, il est alors facile de trouver l'expression de la loi conjointe $p(\mathbf{f}, \mathbf{w}, \theta_e, \theta_f, \alpha; \mathbf{g})$ et la loi *a posteriori* $p(\mathbf{f}, \mathbf{w}, \theta_e, \theta_f, \alpha|\mathbf{g})$. Cependant l'expression de cette loi

$$p(\mathbf{f}, \mathbf{w}, \theta_e, \theta_f, \alpha|\mathbf{g}) \propto \frac{p(\mathbf{g}|\mathbf{w}, \mathbf{f}, \Sigma_\epsilon) p(\mathbf{f}|\theta_f) p(\mathbf{w}|\alpha)}{p(\theta_e) p(\theta_f) p(\alpha)} \quad (23)$$

n'est pas séparable en ses composantes. L'approche variationnelle consiste donc à l'approximer par une loi séparable

$p(\mathbf{f}, \mathbf{w}, \theta_e, \theta_f, \alpha|\mathbf{g}) \simeq q(\mathbf{f})q(\mathbf{w}) \prod_j q(\theta_{ei})q(\theta_f) \prod_j q(\alpha_j)$ et avec les choix des lois *a priori* conjugués en appliquant la procédure décrite plus haut, on obtient

$$\begin{aligned} q(\mathbf{f}) &= \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_f, \Sigma_f) \text{ avec} \\ \Sigma_f &= [\Phi^t \langle \mathbf{W}^t \langle \mathbf{B} \rangle \mathbf{W} \rangle \Phi + \langle \theta_f \rangle \mathbf{Q}^t \mathbf{Q}]^{-1}, \\ \boldsymbol{\mu}_f &= \Sigma_f \Phi^t \langle \mathbf{W} \rangle^t \langle \mathbf{B} \rangle \mathbf{g}, \\ q(\mathbf{w}) &= \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_w, \Sigma_w) \text{ avec} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_w &= [\Phi^t \langle \mathbf{F}^t \langle \mathbf{B} \rangle \mathbf{F} \rangle \Phi + \mathbf{A}]^{-1}, \\ \boldsymbol{\mu}_w &= \Sigma_w \Phi^t \langle \mathbf{F} \rangle^t \langle \mathbf{B} \rangle \mathbf{g} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} q(\theta_{ei}) &= \mathcal{G}(\alpha_{ei}, \beta_{ei}) \text{ avec} \\ \alpha_{ei} &= \alpha_{e0} + M/2, \\ \beta_{ei} &= \beta_{e0} + 1/2 \langle \epsilon \epsilon^t \rangle_{ii}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} q(\theta_f) &= \mathcal{G}(\alpha_f, \beta_f) \text{ avec} \\ \alpha_f &= \alpha_{f0} + N/2, \\ \beta_f &= \beta_{f0} + 1/2 \text{Tr} \{ \mathbf{Q}^t \mathbf{Q} \langle \mathbf{f} \mathbf{f}^t \rangle \}, \\ q(\alpha_{wj}) &= \mathcal{G}(a_j, b_j) \text{ avec} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{wj} &= \alpha_{w0} + 1/2, \\ \beta_w &= \beta_{w0} + 1/2 \langle w_i^2 \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

où $\mathbf{A} = \text{diag} \{ \alpha_{wj}, j = 1, \dots, N \}$ et $\mathbf{B} = \text{diag} \{ \beta_{ei}, i = 1, \dots, M \}$.

On a ainsi l'expression des différentes composante de la loi séparable approchante. On peut en déduire facilement les moyennes des ces lois, car ces lois sont, soit des gaussiennes, soit des lois gamma.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w} \rangle &= \boldsymbol{\mu}_w, \quad \langle w_j^2 \rangle = [\boldsymbol{\mu}_w]_j^2 + [\Sigma_w]_{jj} \\ \langle \mathbf{f} \rangle &= \boldsymbol{\mu}_f, \quad \langle \mathbf{f} \mathbf{f}^t \rangle = \boldsymbol{\mu}_f \boldsymbol{\mu}_f^t + \Sigma_f \\ \langle \alpha_{ei} \rangle &= \alpha_{ei} / \beta_{ei}, \quad \langle \beta_{ei} \rangle = \alpha_{ei} / \beta_{ei}^2, \\ \langle \alpha_f \rangle &= \alpha_f / \beta_f, \quad \langle \beta_f \rangle = \alpha_f / \beta_f^2, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\langle \epsilon \epsilon^t \rangle = \mathbf{g} \mathbf{g}^t - 2\mathbf{g} \langle \mathbf{F} \rangle \Phi \langle \mathbf{w} \rangle^t + \Phi [\mathbf{F} \mathbf{w} \mathbf{w}^t \mathbf{F}^t] \Phi^t \quad (30)$$

Pour le calcul des termes $\langle \mathbf{W}^t \mathbf{W} \rangle$ et $\langle \mathbf{F}^t \mathbf{F} \rangle$ qui interviennent dans les expressions de Σ_f , Σ_w et $[\mathbf{F} \mathbf{w} \mathbf{w}^t \mathbf{F}^t]$ on peut utiliser le fait que \mathbf{F} et \mathbf{W} sont des matrices block-Toeplitz avec des blocs Toeplitz (TBT), on peut les approximer par des matrices block-circulantes avec des blocs circulantes (CBC) et les inverser en utilisant la TFD. Notons aussi que $\boldsymbol{\mu}_f$ et $\boldsymbol{\mu}_w$ peuvent être obtenu par optimisation de

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\mu}_f) &= [\mathbf{g} - \Phi \mathbf{W} \boldsymbol{\mu}_f]^t \langle \mathbf{B} \rangle [\mathbf{g} - \Phi \mathbf{W} \boldsymbol{\mu}_f] + (1/\theta_f) \|\mathbf{Q} \boldsymbol{\mu}_f\|^2 \\ J(\boldsymbol{\mu}_w) &= [\mathbf{g} - \Phi \mathbf{F} \boldsymbol{\mu}_w]^t \langle \mathbf{B} \rangle [\mathbf{g} - \Phi \mathbf{F} \boldsymbol{\mu}_w] + \|\mathbf{A} \boldsymbol{\mu}_w\|^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Les détails de ces calculs seront omis ici.

4 Restauration avec Modélisation Gauss-Markov-Potts

Le cas d'une modélisation gaussienne reste assez restrictif pour la modélisation des images. Des modélisation par des champs de Markov composites (intensités-contours ou intensités-régions) sont mieux adaptées. Dans ce travail, nous examinons ce dernier. L'idée de base est de classer les pixels de l'images $\mathbf{f} = \{f(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}$ en K classes étiquetées par une variable discrète $z(\mathbf{r}) \in \{1, \dots, K\}$. L'image $z(\mathbf{r}) = \{f(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}$ représente ainsi la segmentation de l'image $f(\mathbf{r})$. Chaque paquets des pixels $\mathbf{f}_k = \{f(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathcal{R}_k\}$ représente un ensemble fini des régions compacts et disjointes : $\cup_l \mathcal{R}_{kl} = \mathcal{R}_k$ et $\cup_k \mathcal{R}_k = \mathcal{R}$. On suppose aussi que \mathbf{f}_k et $\mathbf{f}_l \forall k \neq l$ sont indépendants.

A chaque région est associée un contour. Si on représente les contours de l'images par une variable binaire $q(\mathbf{r})$, on a $q(\mathbf{r}) = 0$ à l'intérieure d'une région et $q(\mathbf{r}) = 1$ aux frontières de ces régions. On note aussi que $q(\mathbf{r})$ à partir de $z(\mathbf{r})$ s'obtient d'une manière déterministe (voir Fig 1).

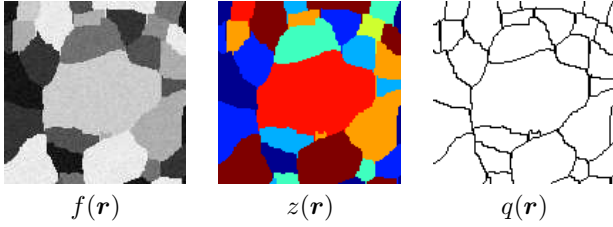


FIG. 1 – Modèle de mélange et champs de Markov caché : image des intensités ou niveau de gris $f(\mathbf{r})$, image $z(\mathbf{r})$ de segmentation ou classification, image binaire $q(\mathbf{r})$ des contours.

Avec cette introduction, nous pouvons définir

$$p(f(\mathbf{r})|z(\mathbf{r}) = k, m_k, v_k) = \mathcal{N}(m_k, v_k) \quad (32)$$

ce qui suggère un modèle de mélange de gaussienne pour les pixels de l'image

$$p(f(\mathbf{r})) = \sum_k a_k \mathcal{N}(m_k, v_k) \text{ avec } a_k = P(z(\mathbf{r}) = k) \quad (33)$$

Une première modélisation simple est donc, supposées que les pixels de l'images sont *a priori* indépendants, ce qui suggère

$$p(\mathbf{z}) = \prod_{\mathbf{r}} p(z(\mathbf{r})) \quad (34)$$

Nous appelons ce modèle, Mélange de Gaussiennes Indépendantes (MGI).

Maintenant, pour prendre en compte la cohérence spatiale de ces pixels, nous devons introduire, d'une manière ou autre, une dépendance spatiale entre ces pixels. La modélisation markovienne est justement l'outil approprié.

Cette dépendance spatiale peut être fait de trois manières. Soit utiliser un modèle markovien pour $z(\mathbf{r})$ et un modèle indépendant pour $f(\mathbf{r})|z(\mathbf{r})$, soit un modèle markovien pour $f(\mathbf{r})|z(\mathbf{r})$ et un modèle indépendant pour $z(\mathbf{r})$, soit un modèle markovien pour $f(\mathbf{r})|z(\mathbf{r})$ et un modèle markovien aussi $z(\mathbf{r})$. Nous avons examiné ces cas avec des modèles de Gauss-Markov pour $f(\mathbf{r})|z(\mathbf{r})$ et le modèle de Potts pour $z(\mathbf{r})$. Ce dernier peut s'écrire sous deux formes :

$$p(z(\mathbf{r})|z(\mathbf{r}'), \mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})) \propto \exp \left[\gamma \sum_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} \delta(z(\mathbf{r}) - z(\mathbf{r}')) \right] \quad (35)$$

$$p(\mathbf{z}) \propto \exp \left[\gamma \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \sum_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} \delta(z(\mathbf{r}) - z(\mathbf{r}')) \right] \quad (36)$$

Ces différents cas peuvent alors se résumer par :

Modèle Gauss-Potts :

$$\begin{aligned} p(f(\mathbf{r})|z(\mathbf{r}) = k) &= \mathcal{N}(m_k, v_k), \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R} \\ p(\mathbf{f}|\mathbf{z}) &= \prod_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \mathcal{N}(m(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (37)$$

avec $m(\mathbf{r}) = m_k, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}_k$ et $v(\mathbf{r}) = v_k, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}_k$, et $p(\mathbf{z})$ Potts.

Modèle de mélange indépendante de Gauss-Markov :

$$\begin{aligned} p(f(\mathbf{r})|f(\mathbf{r}'), \mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r}), q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) &= \mathcal{N}(m(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})), \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R} \\ p(\mathbf{f}|\mathbf{z}) &\propto \prod_k \mathcal{N}(m_k \mathbf{1}_k, \Sigma_k) \end{aligned}$$

$$p(\mathbf{z}) = \prod_{\mathbf{r}} p(z(\mathbf{r}) = k) = \prod_k \alpha_k \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \delta(z(\mathbf{r}) - m_k) \quad (38)$$

avec $\mathbf{1}_k = 1, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}_k$ et Σ_k une matrice de covariance.

Modèle de Gauss-Markov-Potts :

$$\begin{aligned} p(f(\mathbf{r})|f(\mathbf{r}'), \mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r}), q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) &= \mathcal{N}(m(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})), \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R} \\ p(z(\mathbf{r})|z(\mathbf{r}'), \mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})) &\propto \exp \left[\gamma \sum_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} \delta(z(\mathbf{r}) - z(\mathbf{r}')) \right] \end{aligned} \quad (39)$$

Quelque soit le modèle choisi parmi ces différents modèles, l'objectif est d'estimer \mathbf{f} , \mathbf{z} et θ . Si on écrit la loi *a posteriori* jointe :

$$p(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \theta|\mathbf{g}) = \frac{p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \theta) p(\mathbf{f}|\mathbf{z}, \theta) p(\mathbf{z})}{p(\mathbf{g}|\theta)} \quad (40)$$

et on cherche à l'approximer par une loi séparable $q(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \theta|\mathbf{g}) = q_1(\mathbf{f}) q_2(\mathbf{z}) q_3(\theta)$.

Cependant, ici, nous choisissons d'approximer seulement $p(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \theta)$ par $q_1(\mathbf{f}|\mathbf{z}) q_2(\mathbf{z}) q_3(\theta)$. Les détails de ces calculs et une comparaison de ces différents algorithmes sont en cours d'expérimentation et de rédaction et seront publiés dans un délai très proche.

5 Conclusion

L'approche variationnelle de l'approximation d'une loi par des lois séparables est appliquée au cas de l'estimation non supervisée des inconnues et des hyper-paramètres dans des problèmes inverses de restauration d'image (déconvolution simple ou aveugle) avec des modélisations *a priori* gaussiennes, mélange de gaussiennes ou mélange de gaussiennes avec champ de labels markovien (champs de Markov caché).

Références

- [1] Z. Ghahramani and M. Jordan, "Factorial Hidden Markov Models," *Machine Learning*, no. 29, pp. 245–273, 1997.
- [2] R. Choudrey and S. Roberts, "Variational Mixture of Bayesian Independent Component Analysers," *Neural Computation*, vol. 15, no. 1, 2003.
- [3] M. Patriksson, *Nonlinear programming and variational inequality problems. A unified approach*. Applied Optimization, Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers, May 1999.
- [4] R. Choudrey and S. Roberts, "Variational Bayesian Mixture of Independent Component Analysers for Finding Self-Similar Areas in Images," in *ICA, NARA, JAPAN*, April 2003.
- [5] R. Molina, A. K. Katsaggelos, and J. Mateos, "Bayesian and regularization methods for hyperparameter estimation in image restoration," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, pp. 231–246, February 1999.
- [6] S. Roberts and W. Penny, "Variational bayes for generalised autoregressive models," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 9, pp. 2245–2257, 2002.
- [7] N. Nasios and A. Bors, "Variational learning for gaussian mixture models," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, vol. 36, no. 4, pp. 849–862, 2006.
- [8] N. Nasios and A. Bors, "A variational approach for bayesian blind image deconvolution," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 8, pp. 2222–2233, 2004.