

Bornes de Cramer Rao déterministe et stochastique de DOA de signaux rectilignes non corrélés

Habti ABEIDA, Jean Pierre DELMAS

GET/INT, Département CITI, UMR-CNRS 5157

9 rue Charles Fourier, 91011 Evry Cedex, France

habti.abeida@int-evry.fr, jean-pierre.delmas@int-evry.fr

Résumé – Cet article est consacré au calcul des bornes de Cramer-Rao (CR) déterministe et stochastique des directions d'arrivée (DOA) sous la connaissance a priori de signaux non circulaires rectilignes non corrélés en présence de bruit additif gaussien circulaire de matrice de covariance spatiale arbitraire. Des expressions analytiques de ces deux bornes sont données permettant de préciser le rôle primordial des phases de non circularité où plusieurs propriétés sont démontrées. Inférieures aux bornes générales ne prenant pas en compte ces informations a priori, des exemples numériques montrent que les bornes de CR déterministes et stochastiques avec a priori sont très proches entre elles mais très faibles par rapport à la borne de CR stochastique qui ne tient pas compte de ces a priori.

Abstract – This paper addresses the deterministic and stochastic Cramer Rao (CR) bounds for directions of arrival (DOA) estimation under the a priori knowledge that the signals are uncorrelated and noncircular rectilinear with additive circular Gaussian noise of arbitrary covariance matrix. Closed-form expressions of these CR bounds are derived. They allow us to specify the crucial role of the phase of noncircularity and to prove some properties. Numerical illustrations show that the deterministic and stochastic CR bound that take these a priori information into account are very closed and very weak with respect to the associated deterministic and stochastic CR bound that do not take these a priori information into account, that are very closed as well.

1 Introduction

Il existe une abondante littérature consacrée au calcul des bornes de CR stochastiques associées à l'estimation des paramètres DOA seuls dans le cadre de signaux gaussiens (e.g., [1, chap. 8] et [2]). Dans le cas de signaux sources de distributions discrètes, des expressions analytiques interprétables de celles-ci ne sont disponibles que dans des cas très particuliers [3]. Dans le cas plus général de distributions, la borne de CR déterministe a été proposée comme une approximation de la borne de CR stochastique. D'une façon plus précise, il a été démontré dans le cas de non connaissance a priori sur les corrélations spatiales des signaux, que les bornes de CR déterministe et de CR stochastique sous hypothèse gaussienne sont respectivement un minorant [2] et un majorant [4, Appendix B3] de la borne de CR stochastique associée à une distribution quelconque du second ordre des signaux.

Au contraire, dans le cas de connaissance a priori sur les corrélations spatiales des signaux sources, il n'existe pas à notre connaissance d'expressions analytiques de la borne de CR stochastique sur le paramètre DOA seul. Le but de cette contribution est de prendre en compte la non corrélation spatiales de signaux sources dans le cas particulier de signaux non circulaires du second ordre de non circularité maximale (e.g., BPSK ou MSK après dérotation) pour lesquels des algorithmes performants de type MUSIC ont été proposés (e.g., [5]) et analysés [6].

Après avoir décrit la paramétrisation issue du modèle de signaux étudiés dans la section 1, une expression analy-

tique de la bornes de CR déterministe [resp. stochastique] et quelques propriétés de celles ci seront démontrées dans la section 2 [resp. 3]. Enfin quelques exemples numériques seront présentés en section 4 pour illustrer l'importance de cette connaissance a priori et le rôle crucial joué par les différences de phases de non circularité.

2 Modèle, notations et problème posé

Nous considérons une antenne arbitraire de M capteurs recevant K signaux centrés $x_{t,k}$ non corrélés, non circulaires du second ordre de noncircularité maximale satisfaisant

$$x_{t,k} = r_{t,k} e^{i\phi_k} \quad \text{avec } r_{t,k} \text{ réel.} \quad (1)$$

Ce modèle correspond à des signaux dits rectilignes (e.g., BPSK ou MSK après dérotation) pour lesquels les phases ϕ_k dites de non circularité associés au différents retards de propagation par rapport à une origine de phase, seront supposés fixes mais inconnus pendant l'observation de durée T du réseau. Cette origine des phases sera choisie ici au centre de gravité du réseau de capteurs pour simplifier les calculs. Ces signaux sont issus de DOAs inconnues $(\theta_k)_{k=1,\dots,K}$ en présence de bruit gaussien centré circulaire de matrice de covariance inconnue $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma})$ paramétrée par $\boldsymbol{\sigma}$. Le modèle d'observation standard est donc le suivant où \mathbf{y}_t sont indépendants :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\phi})\mathbf{r}_t + \mathbf{n}_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

où $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K]$ désigne la matrice directionnelle classique (avec $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}(\theta_k)$ et $\|\mathbf{a}_k\|^2 = M$)^{1 2} $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\phi}) = \text{Diag}(e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_K})$ et $\mathbf{r}_t = (r_{t,1}, \dots, r_{t,K})^T \in \mathbb{R}^K$.

3 Borne de Cramer Rao déterministe

Dans le modèle déterministe, $(\mathbf{y}_t)_{t=1, \dots, T}$ est constitué de T v.a. i.i.d. \mathbf{y}_t de distribution gaussienne circulaire (CG) $\mathcal{N}_c(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\phi})\mathbf{r}_t; \mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}))$ paramétrée par le paramètre inconnu

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\phi}^T, \boldsymbol{\rho}^T, \boldsymbol{\sigma}^T)^T$$

où $\boldsymbol{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} (\theta_1, \dots, \theta_K)^T$, $\boldsymbol{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_1, \dots, \phi_K)^T$, $\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{r}_1^T, \dots, \mathbf{r}_T^T)^T \in \mathbb{R}^{KT}$, et $\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$. Pour éviter les nombreuses parties réelles issues de la formule de Slepian Bang complexe circulaire (voir [8, rel.2.19] pour un modèle paramétrique voisin) dus à la contrainte $(\mathbf{r}_t)_{t=1, \dots, T}$ réel, nous faisons appel aux observations étendues $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{y}_t^T, \mathbf{y}_t^H)^T$. Après avoir calculé l'expression de la matrice d'information de Fisher associée, nous démontrons en annexe A :

Résultat 1 La borne de CR déterministe pour le paramètre DOA seul avec a priori de signaux rectilignes non corrélés est donnée par l'expression suivante³

$$\begin{aligned} \text{CRB}_{\text{DET}}^{\text{rect,ncor}}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{T} \left((\bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\theta}}^H \boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp} \bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\theta}} \odot \mathbf{R}_{r,T}) \right. \\ &\quad - (\bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\theta}}^H \boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp} \bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\phi}} \odot \mathbf{R}_{r,T}) (\bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\phi}}^H \boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp} \bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\phi}} \odot \mathbf{R}_{r,T})^{-1} \\ &\quad \left. (\bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\phi}}^H \boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp} \bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\theta}} \odot \mathbf{R}_{r,T}) \right)^{-1} \quad (3) \end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_{2M} - \boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}$ où $\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}$ désigne le projecteur orthogonal sur les colonnes de $\bar{\mathbf{A}}$ où $\bar{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{\bar{n}}^{-1/2} \tilde{\mathbf{A}}$ avec

$$\mathbf{Q}_{\bar{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_n & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_n^* \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{A}^* \boldsymbol{\Delta}^* \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{\bar{n}}^{-1/2} \bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\theta}} \text{ et } \bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\phi}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{\bar{n}}^{-1/2} \bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\text{où } \bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_1}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_K}{\partial \theta_K} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\phi}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_1}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_K}{\partial \phi_K} \end{bmatrix}$$

avec $\tilde{\mathbf{a}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_k e^{i\phi_k} \\ \mathbf{a}_k^* e^{-i\phi_k} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{R}_{r,T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{r}_t \mathbf{r}_t^T$ et où \odot désigne le produit de matrices termes à termes.

¹Par exemple pour le réseau rectiligne uniforme, $\mathbf{a}_k = (e^{-i\frac{(M-1)\theta_k}{2}}, e^{-i\frac{(M-3)\theta_k}{2}}, \dots, e^{i\frac{(M-1)\theta_k}{2}})^T$.

²Notons que contrairement au cas de signaux complexes circulaires, où le choix de l'origine des phases ne joue aucun rôle sur les performances des DOA estimées, ce choix joue un rôle sur les performances dans le cas de signaux rectilignes. En effet, un changement d'origine des phases par rapport au centre de gravité du réseau introduit un facteur multiplicatif $e^{i\psi(\theta_k)}$ sur chaque vecteur directionnel et donc une nouvelle phase de non circularité $\phi_k + \psi(\theta_k)$. Ainsi pour un réseau linéaire équidistant, la nouvelle phase de non circularité devient $\phi_k + \frac{M-1}{2}\theta_k$ pour l'origine des phases située à une extrémité du réseau. Nous illustrerons ce rôle en section 5.

³Notons que le modèle (2) a déjà été utilisé dans [7] pour dériver une expression de la borne de CR déterministe. Mais celle-ci a été dérivée avec le paramètre inconnu $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\theta}^T, (\Re(x_{t,k}), \Im(x_{t,k}))_{t=1, \dots, T, k=1, \dots, K}, \sigma^2)^T$ qui ne prend pas en compte le caractère rectiligne des signaux. Notons de plus que celle-ci n'est valable que pour les réseaux centro-symétriques (i.e. $\mathbf{a}_k^* = \mathbf{J} \mathbf{a}_k$ où \mathbf{J} est la matrice unité anti-diagonale).

Notons que cette borne s'applique pour tous signaux rectilignes, le cas particulier de signaux non corrélés n'étant pris en compte que par $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{R}_{r,T} = \text{Diag}(\sigma_{x_1}^2, \dots, \sigma_{x_K}^2)$.

Dans le cas particulier de bruit blanc isotrope ($\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_n^2 \mathbf{I}$), nous avons démontré [9] les propriétés suivantes pour la borne de CR déterministe asymptotique ($T \gg 1$) :

Propriété 1 Pour une source rectiligne avec bruit blanc isotrope

$$\text{CRB}_{\text{DET}}^{\text{rect,ncor}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\gamma_1} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2} \right). \quad (4)$$

où $\gamma_1 = 2 \frac{d\mathbf{a}_1^H}{d\theta_1} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{a}_1}^{\perp} \frac{d\mathbf{a}_1}{d\theta_1}$ ne dépend pas du choix d'origine des phases. Comparée à la borne de CR déterministe sans connaissance a priori [2], nous avons

$$\text{CRB}_{\text{DET}}^{\text{rect,ncor}}(\theta_1) = \text{CRB}_{\text{DET}}(\theta_1).$$

Propriété 2 Dans le cas de deux sources rectilignes, non corrélées, de même puissance avec bruit blanc isotrope, les bornes de CR déterministes associées aux deux DOAs sont égales et ne dépendent des phases de non circularité que par $\Delta\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi_1 - \phi_2$. De plus pour un réseau centro-symétrique, (voir note 3 de bas de page), cette borne de CR est périodique en $\Delta\phi$ de période π et fonction décroissante de $\Delta\phi$ de 0 à $\pi/2$ et dans le cas particulier du réseau rectiligne uniforme, ne dépendent des DOAs que par la différence $\Delta\theta \stackrel{\text{def}}{=} \theta_1 - \theta_2$. Nous avons en particulier :

$$\text{CRB}_{\text{DET}}^{\text{rect,ncor}}(\theta_1)_{|\Delta\phi=\pi/2} = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\gamma_1} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2} \right),$$

$$\text{CRB}_{\text{DET}}^{\text{rect,ncor}}(\theta_1)_{|\Delta\phi=0} = \text{CRB}_{\text{DET}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2} \right),$$

avec $\alpha_1 = 2 \left(\left\| \frac{d\mathbf{a}_1}{d\theta_1} \right\|^2 - \frac{M^3}{M^4 - (\mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2)^2} \left| \frac{d\mathbf{a}_1^H}{d\theta_1} \mathbf{a}_2 \right|^2 \right)$. Ce qui montre que la valeur minimale de la borne de CR (associée à $\Delta\phi = \pi/2$) ne dépend pas de $\Delta\theta$ et a la même valeur que la borne de CR déterministe obtenue dans le cas d'une seule source, et que sa valeur maximale (associée à $\Delta\phi = 0$) est égale à la borne de CR déterministe sans connaissance a priori.

Propriété 3 Dans le cas de K sources rectilignes, non corrélées de phases de non circularité toutes égales et d'un réseau d'antennes quelconque, nous avons

$$\text{CRB}_{\text{DET}}^{\text{rect,ncor}}(\boldsymbol{\theta}) = \text{CRB}_{\text{DET}}(\boldsymbol{\theta}).$$

Notons que ces deux dernières propriétés ne sont valides que pour le choix de l'origine des phases au centre de gravité du réseau.

4 Borne de Cramer Rao stochastique

Dans le modèle stochastique gaussien, $(\mathbf{r}_t)_{t=1, \dots, T}$ sont des v.a. centrées réelles i.i.d. de distribution gaussienne de matrice de covariance diagonale $\mathbf{E}(\mathbf{r}_t \mathbf{r}_t^T) = \mathbf{E}(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^H) = \text{Diag}(\sigma_{x_1}^2, \dots, \sigma_{x_K}^2)$ et $(\mathbf{y}_t)_{t=1, \dots, T}$ est constitué de T v.a. centrées i.i.d. de distribution gaussienne non circulaire (GN

C) $\mathcal{N}(\mathbf{0}; \mathbf{R}_y, \mathbf{R}'_y)$ avec $\mathbf{R}_y = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H + \mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma})$ et $\mathbf{R}'_y = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{2i\phi_k} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T$ paramétrée par

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\phi}^T, \boldsymbol{\sigma}^T)^T$$

où ici⁴ $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{x_1}^2, \dots, \sigma_{x_K}^2, \sigma_n^2)^T$. Dans ce cas, donner une forme interprétable de la borne de CR sur le paramètre DOA seul semble impossible, car les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\phi}$ qui apparaissent dans les vecteurs directionnels

$$\tilde{\mathbf{a}}_k \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_k^T, \mathbf{a}_k^H e^{-2i\phi_k})^T$$

du modèle étendu $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{y}_t^T, \mathbf{y}_t^H)^T$ sont imbriqués de façon non linéaire. En partant de la matrice d'information de Fisher associée [11] et en utilisant des calculs algébriques inspirés de ceux menés dans [12], nous avons démontré [9] le résultat suivant⁵ :

Résultat 2 La borne de CR stochastique gaussienne pour le paramètre DOA seul avec a priori de signaux rectilignes non corrélés dans le cas de bruit blanc isotrope est donnée par l'expression suivante :

$$\text{CRB}_{\text{STO}}^{\text{rect,ncor}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T} \left((\mathbf{D}_\theta^H \mathbf{G} \mathbf{D}_\theta) - (\mathbf{D}_\theta^H \mathbf{G} \mathbf{D}_\phi) \right. \\ \left. (\mathbf{D}_\phi^H \mathbf{G} \mathbf{D}_\phi)^{-1} (\mathbf{D}_\phi^H \mathbf{G} \mathbf{D}_\theta) \right)^{-1} \quad (5)$$

avec

$$\mathbf{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B} \left[\mathbf{B}^H (\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}^T \otimes \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}) \right. \\ \left. + \frac{\sigma_n^4}{2M-K} \text{Vec}(\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}}) \text{Vec}^H(\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}}) \right] \mathbf{B}^H$$

où \mathbf{B} une matrice dont les colonnes engendrent le noyau de $[\tilde{\mathbf{a}}_1 \otimes \tilde{\mathbf{a}}_1^*, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_K \otimes \tilde{\mathbf{a}}_K^*]$, $\mathbf{D}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} [\tilde{\mathbf{a}}_1^* \otimes \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_1^*}{\partial \theta_1} \otimes \tilde{\mathbf{a}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_K^* \otimes \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_K}{\partial \theta_K} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_K^*}{\partial \theta_K} \otimes \tilde{\mathbf{a}}_K]$, $\mathbf{D}_\phi \stackrel{\text{def}}{=} [\tilde{\mathbf{a}}_1^* \otimes \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_1}{\partial \phi_1} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_1^*}{\partial \phi_1} \otimes \tilde{\mathbf{a}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_K^* \otimes \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_K}{\partial \phi_K} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_K^*}{\partial \phi_K} \otimes \tilde{\mathbf{a}}_K]$, $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{y}}_t \tilde{\mathbf{y}}_t^H)$ et où \otimes désigne le produit de Kronecker de matrices.

Dans les cas particuliers d'une source, nous avons démontré [9] le résultat suivant :

Propriété 4 Dans le cas d'une source rectiligne avec bruit blanc isotrope :

$$\text{CRB}_{\text{STO}}^{\text{rect,ncor}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\gamma_1} \left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_n^4}{2M\sigma_1^4} \right] \right).$$

qui comparée à la borne de CR stochastique gaussienne sans connaissance a priori [11] lorsque le taux de non circularité tend vers 1

$$\text{CRB}_{\text{STO}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\gamma_1} \left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_n^4}{2M\sigma_1^4} \right] \right).$$

montre que

$$\text{CRB}_{\text{STO}}^{\text{rect,ncor}}(\theta_1) = \text{CRB}_{\text{STO}}(\theta_1).$$

⁴Nous ne considérons dans ce résultat 2 que le cas d'un bruit blanc isotrope, le cas général d'une paramétrisation générale $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma})$ entraînant des notations trop lourdes.

⁵Notons que déduire cette borne de CR à partir de la matrice de covariance asymptotique du maximum de vraisemblance à l'aide d'un calcul de perturbations issus de la fonction de vraisemblance concentrée en $\boldsymbol{\theta}$ est intractable car nous avons démontré [9] en nous appuyant sur [10] que la fonction de vraisemblance concentrée en $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$ dépend de $(\mathbf{y}_t)_{t=1, \dots, T}$ à travers les vecteurs et valeurs propres de la matrice de covariance empirique étendue $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{\mathbf{y}}_t \tilde{\mathbf{y}}_t^H$.

Dans le cas de deux sources de même puissance, de bruit blanc isotrope, nous avons constatés numériquement que les bornes de CR stochastiques associées aux DOA θ_1 et θ_2 sont égales et fonction de $\Delta\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi_1 - \phi_2$. De plus, elles ne dépendent de ces DOAs que par $\Delta\theta \stackrel{\text{def}}{=} \theta_1 - \theta_2$ dans le cas d'un réseau rectiligne uniforme. Enfin, les simulations numériques (section 5) montrent qu'à $\Delta\theta$ fixée, celles-ci sont aussi périodiques de période π et monotone décroissantes en $\Delta\phi$ sur $[0, \pi/2]$.

5 Illustrations numériques

Nous présenterons dans cette section différentes illustrations portant sur le scénario constitué de deux sources rectilignes (BPSK dans le cas de la simulation Monte Carlo) non corrélées de même puissance, d'un réseau linéaire uniforme avec $M = 6$ et de bruit blanc isotrope.

La figure 1 montre le gain considérable apporté par la connaissance a priori "sources rectilignes non corrélées".

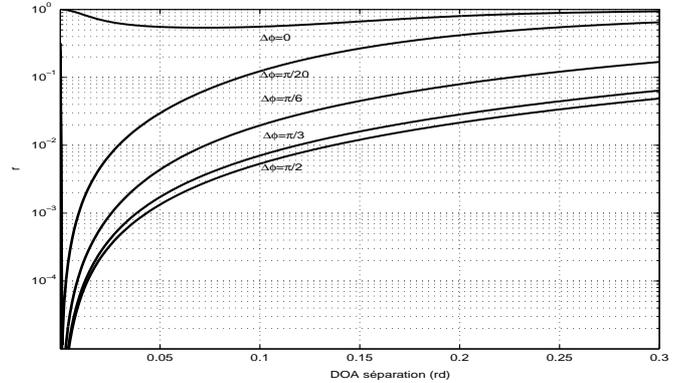


Fig.1 Rapport $r = \text{CRB}_{\text{STO}}^{\text{rect,ncor}}(\theta_1) / \text{CRB}_{\text{STO}}(\theta_1)$ entre les bornes de CR stochastiques avec et sans connaissance a priori pour $SNR = 20\text{dB}$.

La figure 2 illustre que les différentes bornes de CR avec connaissance a priori sont très proches entre elles de même que les bornes de CR sans connaissance a priori. De plus, on voit que dans ce dernier cas la borne de CR déterministe peut être supérieure à la borne de CR stochastique.

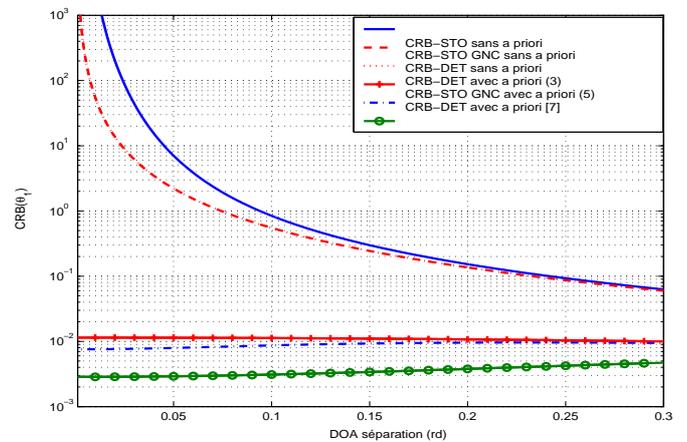


Fig.2 Comparaisons de différentes bornes de CR $\text{CRB}(\theta_1)$ normalisées ($T = 1$), $SNR = 10\text{dB}$, $\Delta\phi = \pi/6\text{rd}$.

La figure 3 illustre l'efficacité de l'algorithme Root MUSIC non circulaire (proposé par [5] et dont les performances ont été analysées dans [6]) sauf pour les faibles séparations angulaires $\Delta\theta$.

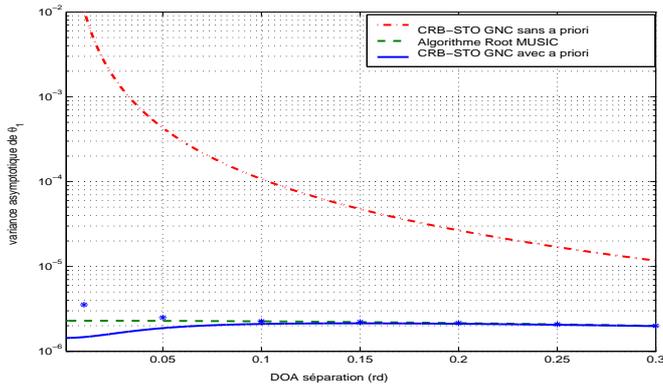


Fig.3 Variance asymptotique théorique donnée par l'algorithme Root MUSIC non circulaire [6], EQM (Monte Carlo, 1000 runs)(*), $CRB_{STO}(\theta_1)$ avec et sans connaissance a priori pour $\Delta\phi = \pi/6rd$, $SNR = 20dB$, $T = 500$.

Enfin les figures 4 et 5 représentent la variation des bornes de CR déterministe et stochastique avec connaissance a priori avec la séparation de phase de non circularité $\Delta\phi$. On y voit en particulier l'influence de l'origine des phases qui donne une valeur minimale des bornes de CR pour $\Delta\phi = \pi/2$ pour l'origine des phases choisie au centre de gravité du réseau, contrairement au choix de l'origine des phases à une extrémité du réseau, pour laquelle cette valeur minimale se décale vers 0, ce qui est particulièrement vrai pour les grandes séparations angulaires.

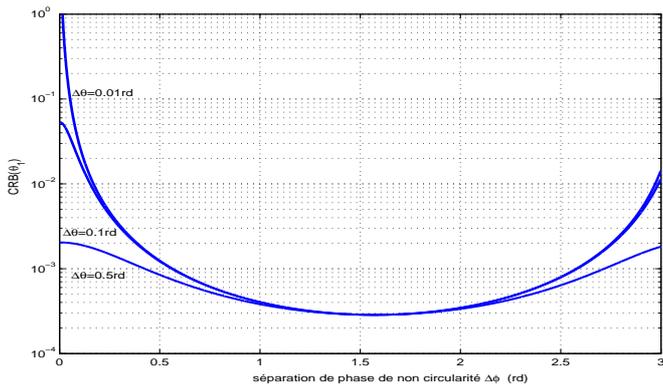


Fig.4 $CRB_{DET}^{rect,ncor}(\theta_1)$ normalisée en fonction de $\Delta\phi$, pour plusieurs valeurs de $\Delta\theta$ et $SNR = 20dB$ avec origine des phases au centre de gravité du réseau.

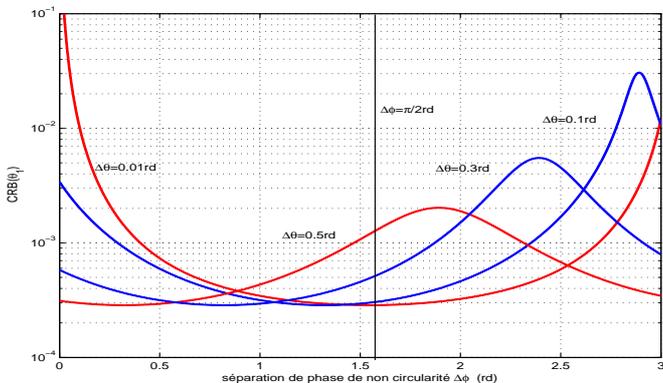


Fig.5 $CRB_{STO}^{rect,ncor}(\theta_1)$ normalisée en fonction de $\Delta\phi$, pour plusieurs valeurs de $\Delta\theta$ et $SNR = 20dB$ avec origine des phases à une extrémité du réseau.

A Preuve du résultat 1

Avec le modèle étendu $\tilde{\mathbf{y}}_t = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{r}_t + \tilde{\mathbf{n}}_t$ pour $t = 1, \dots, T$, la matrice de Fisher associée [11] associée au paramètre α

donnée par

$$(\mathbf{I})_{k,l} = \frac{T}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}_{\tilde{n}}}{\partial \alpha_k} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}_{\tilde{n}}}{\partial \alpha_l} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1} \right) + \frac{\partial \mathbf{m}^H}{\partial \alpha_k} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}) \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_l}$$

avec $\mathbf{m} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{r}_T \end{pmatrix}$ permet de montrer le découplage

entre les paramètres et (θ, ϕ, ρ) et σ et donne les différents sous bloc matriciels : $(\mathbf{I})_{\theta,\theta} = T (\tilde{\mathbf{D}}_{\theta}^H \tilde{\mathbf{D}}_{\theta} \odot \mathbf{R}_{r,T})$, $(\mathbf{I})_{\phi,\phi} = T (\tilde{\mathbf{D}}_{\phi}^H \tilde{\mathbf{D}}_{\phi} \odot \mathbf{R}_{r,T})$, $(\mathbf{I})_{\theta,\phi} = T (\tilde{\mathbf{D}}_{\theta}^H \tilde{\mathbf{D}}_{\phi} \odot \mathbf{R}_{r,T})$, $(\mathbf{I})_{\theta,r_t} = \Delta_t \tilde{\mathbf{D}}_{\theta} \tilde{\mathbf{A}}$, $(\mathbf{I})_{\phi,r_t} = \Delta_t \tilde{\mathbf{D}}_{\phi} \tilde{\mathbf{A}}$ et $(\mathbf{I})_{r_t,r_{t'}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^H \delta_{t,t'}$, avec $\Delta_t \stackrel{\text{def}}{=} \text{Diag}(r_{t,1}, \dots, r_{t,K})$. L'application de plusieurs versions du lemme d'inversion matriciel partitionné permet [9] de dériver l'expression (3).

Références

- [1] H.L. Van Trees, *Optimal array processing, Part IV of detection, estimation and modulation theory*, Wiley-Interscience, 2002.
- [2] P. Stoica, A. Nehorai, "Performance study of conditional and unconditional direction of arrival estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 38, no. 10, pp. 1783-1795, October 1990.
- [3] J.P. Delmas, H. Abeida, "Cramer-Rao bounds of DOA estimates for BPSK and QPSK modulated signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 1, pp. 117-126, January 2006.
- [4] P. Stoica R. Moses, *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice Hall, Inc., 1997.
- [5] P. Chargé, Y. Wang and J. Saillard, "A non-circular sources direction finding method using polynomial rooting," *Signal Processing*, vol. 81, pp. 1765-1770, 2001.
- [6] H. Abeida, J.P. Delmas, "MUSIC-like estimation of direction of arrival for non-circular sources," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 7, pp. 2678-2690, July 2006.
- [7] F. Roemer, M. Haardt, "Efficient 1-D and 2-D DOA estimation for non-circular sources with hexagonal shaped ESPAR arrays," *Proc. International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing*, Toulouse, May 2006.
- [8] S.F. Yau, Y. Bresler, "A compact Cramer Rao bound expression for parametric estimation of superimposed signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 5, pp. 1226-1230, May 1992.
- [9] H. Abeida, J.P. Delmas "Deterministic and stochastic Cramer Rao bounds on DOA estimation for uncorrelated rectilinear signals," en préparation pour *IEEE Transactions on Signal processing*.
- [10] G. Bienvenu, L. Kopp, "Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 31, no. 5, pp. 1235-1248, October 1986.
- [11] J.P. Delmas, H. Abeida, "Stochastic Cramer-Rao bound for non-circular signals with application to DOA estimation", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 11, pp. 3192-3199, November 2004.
- [12] P. Stoica, A.G. Larsson and A.B. Gershman, "The stochastic CRB for array processing : a textbook derivation," *IEEE Signal Processing letters*, vol. 8, no. 5, pp. 148-150, May 2001.