

# Calcul bayésien variationnel pour la séparation de sources avec un modèle Gauss-Markov caché

NADIA BALI et Ali MOHAMMAD-DJAFARI

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS – Supélec – UPS)  
Supélec, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France  
bali@lss.supelec.fr, djafari@lss.supelec.fr

**Résumé** – Dans cet article nous proposons une approche d'estimation variationnelle bayésienne (VB) pour un problème de séparation de source aveugle (BSS), comme alternative aux méthodes de MCMC. Les données correspondent à  $M$  images et les sources sont  $N$  images, supposées homogènes par morceaux. Pour assurer ces propriétés, nous proposons un modèle de Gauss-Markov pour les sources avec une variable cachée de classification qui est modélisée par un champ de Potts-Markov. Quelques résultats de simulation sont donnés pour illustrer les performances de la méthode proposée et quelque comparaison avec d'autres méthodes utilisées en séparation de sources (MCMC et VBICA) sont présentées.

**Abstract** – In this paper we propose Variational Bayesian (VB) estimation approach for Blind Sources Separation (BSS) problem, as an alternative method to MCMC. The data are  $M$  images and the sources are  $N$  images which are assumed piecewise homogeneous. To insure these properties, we propose a piecewise Gauss-Markov model for the sources with a hidden classification variable which is modelled by a Potts-Markov field. A few simulation results are given to illustrate the performances of the proposed method and some comparison with other methods (MCMC and VBICA) used for BSS, are presented.

## 1 Introduction

Nous considérons le problème de séparation de source dans le cas de mélange instantané d'images bruitées. L'estimation bayésienne permet de prendre en compte les incertitudes et toutes les connaissances *a priori* sur le modèle des observations. Suite au calcul impliqué par une approche bayésienne on a toujours besoin de méthodes d'approximations pour résoudre le problème. Les méthodes d'approximations sont soit des méthodes numériques, par exemple les méthodes MCMC [1] qui nécessitent souvent en pratique un grand effort calculatoire, soit des méthodes analytiques comme la méthode d'approximation asymptotique de Laplace, qui sont plus facilement praticables mais font typiquement une approximation grossière.

Dans ce papier nous proposons comme alternative à ces méthodes une approche variationnelle qui offre un cadre pratique en terme de précision et est analogue aux méthodes d'échantillonnage sans la complexité calculatoire [2].

En effet, le but est de donner une approximation à la vraisemblance marginale ou l'évidence du modèle qui est la distribution des données par rapport au modèle. L'évidence du modèle est obtenue en intégrant les variables cachées de la loi a posteriori jointe. Par la suite nous proposons une approche de calcul variationnel pour un problème de séparation de sources. Les sources sont modélisées par un mélange de gaussiennes avec des variables cachées modélisés par un champ de Potts.

## 2 Modèle de séparation de sources

Un problème de séparation de sources peut s'écrire sous la forme linéaire suivante :

$$\mathbf{x}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}\mathbf{s}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}),$$

où  $\mathbf{x}(\mathbf{r}) = \{x_i(\mathbf{r}), i = 1, \dots, M\}$  est un ensemble de  $M$  images (les observations) et  $r \in \mathcal{R} = \{1, \dots, R\}$  représente la position d'un pixel avec  $R$  est le nombre total de pixels.  $\mathbf{A}$  est la matrice de mélange inconnue de dimension  $(M, N)$ ,  $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \{s_j(\mathbf{r}), j = 1, \dots, N\}$  est un ensemble de  $N$  composantes inconnues (images sources) et  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) = \{\epsilon_i(\mathbf{r}), i = 1, \dots, M\}$  représentent les erreurs. Dans ce travail, nous faisons les hypothèses suivantes : On considère que le bruit  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})$  est centré blanc et gaussien, Ce qui nous permet d'écrire :

$$p(\underline{\mathbf{x}}|\underline{\mathbf{s}}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon) = \prod_{\mathbf{r}} \mathcal{N}(\mathbf{A}\mathbf{s}(\mathbf{r}), \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1})$$

Notons que  $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon$  est la matrice de covariance inverse. On modélise ensuite les sources  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  par des mélanges de gaussiennes :  $p(s_j(\mathbf{r})|z_j(\mathbf{r}) = k) = \mathcal{N}(m_{jk}, \sigma_{jk}^2)$  les variables cachées  $z_j(\mathbf{r})$  sont discrètes :  $z_j(\mathbf{r}) \in \{1, \dots, K_j\}$  est une variable étiquette associée à une région donnée dans une source  $\mathbf{s}_j$  formée par  $K_j$  classes.  $z_j(\mathbf{r})$  sont modélisées par un modèle de Markov, modèle de Potts :

$$p(z_j(\mathbf{r})|z_j(\mathbf{r}'), r' \neq r, r \in \mathcal{R}) \propto \exp \left[ \alpha \sum_{r' \in \mathcal{V}(r)} \delta(z_j(\mathbf{r}) - z_j(\mathbf{r}')) \right]$$

Le champ de Potts est l'un des champs de Markov les plus simple pour modéliser un champ discret.  $\alpha$  représente le degré de dépendance spatiale de  $\underline{\mathbf{z}} = \{z_j(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}$ , il contrôle la taille des régions associé à la segmentation et

d'où celles des sources. On considère une distribution gaussienne pour la matrice de mélange, tel que la distribution *a priori* de  $\mathbf{A}$  est donnée par :

$$\pi(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}_0, \mathbf{\Gamma}_0) \quad (1)$$

. La distribution a priori sur l'inverse de la covariance du bruit  $\mathbf{\Sigma}_\epsilon$  est une distribution de Wishart donnée par :

$$\pi(\mathbf{\Sigma}_\epsilon | \nu_{\epsilon_0}, \mathbf{\Sigma}_{\epsilon_0}) \propto |\mathbf{\Sigma}_\epsilon|^{\frac{(\nu_{\epsilon_0} - M - 1)}{2}} \exp -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \mathbf{\Sigma}_\epsilon \mathbf{\Sigma}_{\epsilon_0}^{-1} \} \quad (2)$$

avec  $\nu_{\epsilon_0}$  le nombre de degré de liberté et  $\mathbf{\Sigma}_{\epsilon_0}$  la matrice de variance *a priori*.

Finalement on suppose sur les moyennes et les inverses de covariance associée aux régions respectivement une distribution Gaussienne et un a priori Wishart :

$$\pi(\mathbf{m}_z | \boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{T}_0) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{T}_0), \quad (3)$$

$$\pi(\mathbf{\Sigma}_z | \nu_0, \mathbf{V}_0) = \mathcal{W}(\nu_0, \mathbf{V}_0). \quad (4)$$

### 3 approche variationnelle

Notre but est d'obtenir une approximation séparable de la loi *a posteriori* jointe de  $\{\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}\}$  et  $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}, \mathbf{\Sigma}_\epsilon, \mathbf{m}_z, \mathbf{\Sigma}_z)$ . L'idée est donc d'approcher la distribution *a posteriori* jointe  $p(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\theta} | \underline{\mathbf{x}})$  sur les paramètres et les variables cachées par une distribution plus simple. Cette dernière assume souvent que les variables cachées et les paramètres sont indépendants sachant les données. Considérons la distribution a posteriori jointe  $p(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\theta} | \underline{\mathbf{x}}, \mathcal{M})$  pour les variables cachées et les paramètres. Comme elle n'est pas calculable, nous considérons une distribution approchante que nous contraignons à être de la forme factorisée :

$$q(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\theta}) = q_{\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}}(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}) q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}).$$

L'idée est donc de minimiser la divergence de Kullback entre la loi approchante  $q_{\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}}(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}) q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$  et la loi a posteriori jointe sur les variables cachées et les paramètres  $p(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\theta} | \underline{\mathbf{x}})$ . Ceci revient à maximiser une énergie libre  $\mathcal{F}$ , sachant que la distance de Kullback peut être écrite comme une différence entre  $\mathcal{F}$  et la vraisemblance marginale  $p(\underline{\mathbf{x}} | \mathcal{M})$  par rapport au modèle :

$$\mathcal{F}(q_{\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}}(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}), q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})) = \int d\boldsymbol{\theta} q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) \left[ \int d\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}} q_{\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}}(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}) \ln \frac{p(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}} | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{M})}{q_{\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}}(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}})} + \ln \frac{p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{M})}{q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})} \right] \quad (5)$$

La distribution de l'approximation variationnelle  $q_{\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}}(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}})$  et  $q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$  doit appartenir à une famille de distributions plus simples que celle de la distribution a posteriori  $p(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\theta} | \underline{\mathbf{x}})$ . La famille de distributions est choisie de façon à ce que  $q$  soit similaire à la vraie distribution a posteriori. [3, 4] ont noté que des simplifications importantes sont faites lors de la mise à jour d'équations variationnelles si le choix des distributions des variables cachées conditionnellement à leur paramètres se fait à partir de familles de modèles exponentiels conjugués. Dans ce cas, les distributions *a posteriori* ont des formes analytiquement stable et intuitives.

Pour optimiser la borne inférieure du log vraisemblance

marginal qui est  $\mathcal{F}(q_{\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}}(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}), q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}))$  nous prenons simplement les dérivés fonctionnels par rapport à chacune des distributions  $q$  pour les évaluer à zéro  $\frac{d\mathcal{F}}{dq} = 0$  pour trouver les distributions qui maximisent  $\mathcal{F}$ .

Les hypothèses de la méthode, qui consiste à maximiser l'énergie libre alternativement par rapport à  $q_{\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}}}$  et  $q_{\boldsymbol{\theta}}$  sont : l'indépendance a posteriori entre  $(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{z}})$  et  $\boldsymbol{\theta}$ , et aussi un a priori conjugué pour les variables cachées.

Finalement, on obtient  $\{\tilde{q} = \{q | \frac{d\mathcal{F}}{dq} = 0\}\}$ , ce qui donne  $q_{\theta_i}(\theta_i) \propto \exp(\langle \log p(x|\theta, \mathcal{M}) \rangle_{\theta_i}) \pi(\theta_i)$ .

Les lois approchantes appartiennent à la même famille que les *a priori*. Il faut donc estimer les nouveaux paramètres de chaque distribution approchante. L'estimation des lois pour  $\{\mathbf{A}, \mathbf{\Sigma}_\epsilon, \mathbf{m}_z, \mathbf{\Sigma}_z\}$  sont donc faciles à obtenir. par la suite, pour des raisons de simplifications, nous allons utiliser la notation  $q$  à la place de  $q_{\theta_i}$ .

### 3.1 Approximation des lois *a posteriori*

#### 3.1.1 Matrice de mélange :

On note par  $\mathbf{A}_v$  une représentation vectorielle de la matrice de mélange définie par  $\mathbf{A}_v = [\mathbf{A}_{(1,\cdot)}, \dots, \mathbf{A}_{(m,\cdot)}]^t$ . En prenant les dérivées de la fonctionnelle, de l'équation : (5) et en l'égalisant à zéro ( $\frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{A}} = 0$ ). On obtient :

$$q(\mathbf{A}) \propto \pi(\mathbf{A}) \exp(\langle \ln p(\underline{\mathbf{x}} | \underline{\mathbf{s}}, \mathbf{\Sigma}_\epsilon) \rangle_{q(\mathbf{\Sigma}_\epsilon) q(\underline{\mathbf{s}})}) \quad (6)$$

Avec la loi *a priori* appropriée  $\pi(\mathbf{A})$  que nous venons de choisir dans (1), il est facile de voir que  $q(\mathbf{A} | \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{A}}) = \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{A}})$ , avec :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{A}} &= R \tilde{\mathbf{\Sigma}}_\epsilon \otimes (\sum_{z(r)} q(z(r)) \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{s|z}^{-1}) \\ &+ \sum_r \tilde{\mathbf{\Sigma}}_\epsilon \otimes (\sum_{z(r)} q(z(r)) \tilde{\mathbf{s}}_z(r) \tilde{\mathbf{s}}_z^t(r)) + \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{A}} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_v = \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{A}}^{-1} \left[ \sum_r \tilde{\mathbf{\Sigma}}_\epsilon (\mathbf{x}^t(r) \otimes (\sum_{z(r)} q(z(r)) \tilde{\mathbf{s}}_z^t(r))) + \mathbf{\Gamma}_p \mathbf{A}_p \right] \quad (8)$$

#### 3.1.2 La matrice de covariance inverse du bruit :

$q(\mathbf{\Sigma}_\epsilon)$  est obtenu par  $\frac{d\mathcal{F}}{dq(\mathbf{\Sigma}_\epsilon)} = 0$ , ce qui donne :

$$\ln(q(\mathbf{\Sigma}_\epsilon)) = \frac{(R + \nu_{\epsilon_0} - M - 1)}{2} \ln |\mathbf{\Sigma}_\epsilon| - \frac{1}{2} (\mathbf{\Sigma}_\epsilon \mathbf{Q}_\epsilon) \quad (9)$$

avec  $\mathbf{Q}_\epsilon = \mathbf{\Sigma}_{\epsilon_0}^{-1} + \mathbf{Q} + R \mathbf{D}_{\mathbf{A}} \left( \sum_z q(z) \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{s|z}^{-1}, \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{A}}^{-1}, \tilde{\mathbf{A}} \right)$ . Pour la définition de  $\mathbf{D}_{\mathbf{A}}$  et pour plus de détail voir [5], ce qui définit alors une loi Wishart avec une moyenne  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_\epsilon = (R + \nu_{\epsilon_0}) \mathbf{Q}_\epsilon^{-1}$ .

#### 3.1.3 Lois *a posteriori* de $\mathbf{m}_z$ et $\mathbf{\Sigma}_z$ :

En écrivant  $\mathcal{F}$  en fonction de  $\mathbf{m}_z$  et de  $\mathbf{\Sigma}_z$  seulement que nous pouvons dériver par rapport à ces hyperparamètres pour obtenir les équations de mise à jour suivantes :  $q(\mathbf{m}_z | \tilde{\mathbf{m}}_z, \tilde{\mathbf{T}}_z) = \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{m}}_z, \tilde{\mathbf{T}}_z)$ ,  $q(\mathbf{\Sigma}_z | \tilde{\nu}_z, \tilde{\mathbf{V}}_z) = \mathcal{W}(\tilde{\nu}_z, \tilde{\mathbf{V}}_z)$ . Les détails de dérivation les équations à mettre à jour sont omis du aux contraintes d'espace. Ils peuvent être obtenus dans [6].

### 3.2 Loia posteriori $q(\underline{s}|\underline{z})$ :

L'expression de  $q(\underline{s}|\underline{z})$  est obtenue par  $\frac{d\mathcal{F}}{dq(\underline{s}(\mathbf{r})|\underline{z}(\mathbf{r}))} = 0$  ce qui donne :

$$\ln q(\underline{s}(\mathbf{r})|\underline{z}(\mathbf{r})) = -\frac{1}{2}\underline{s}(\mathbf{r})^t \mathbf{Q} \underline{s}(\mathbf{r}) + (\tilde{\mathbf{A}}^t \tilde{\Sigma}_\epsilon \mathbf{x}(\mathbf{r}))^t \underline{s}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}(\underline{s}(\mathbf{r}) - \underline{m}_z)^t \Sigma_z (\underline{s}(\mathbf{r}) - \underline{m}_z)$$

avec  $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{A}}' \tilde{\Sigma}_\epsilon \tilde{\mathbf{A}} + F(\tilde{\Sigma}_\epsilon, \tilde{\Sigma}_A^{-1})$  qui est quadratique en  $\underline{s}(\mathbf{r})$ . Pour la définition de  $F(\tilde{\Sigma}_\epsilon, \tilde{\Sigma}_A^{-1})$  et pour plus de détail voir [5]. En résumé, nous obtenons

$q(\underline{s}(\mathbf{r})|\underline{z}(\mathbf{r})) = \mathcal{N}(\tilde{s}_z(\mathbf{r}), \tilde{\Sigma}_{s|z})$  with

$$\tilde{\Sigma}_{s|z} = \mathbf{Q} + \Sigma_z \quad (10)$$

$$\tilde{s}_z(\mathbf{r}) = \tilde{\Sigma}_{s|z}^{-1} [\tilde{\mathbf{A}}^t \tilde{\Sigma}_\epsilon \mathbf{x}(\mathbf{r}) + \Sigma_z \underline{m}_z] \quad (11)$$

#### 3.2.1 Loi a posteriori des étiquettes $q(\underline{z})$ :

La difficulté est dans l'estimation de  $q_z(\underline{z})$ , vu qu'il s'agit d'un modèle markovien, d'où la dépendance entre les pixels voisins.

$q_z(\underline{z})$  peut être mise sous une forme séparable en utilisant la propriété de voisinage d'ordre un. Il est en effet possible de décomposer la variable  $\underline{z}$  en deux sous ensembles  $\underline{z}_N$  et  $\underline{z}_B$  à la manière d'un échiquier. D'où les distributions  $q_{z_B}(\underline{z}_B)$  et  $q_{z_N}(\underline{z}_N)$ . Ainsi, chaque pixel blanc (respectivement noir) a ses quatre voisins noirs (respectivement blanc). Tous les pixels blancs (respectivement noirs), connaissant les pixels noirs (respectivement blancs), sont donc indépendants. On peut donc écrire une approximation pour chaque une des distributions approchantes indépendamment.

$$q_z(\underline{z}|\underline{x}, \mathcal{M}) = q_{z_N}(\underline{z}_N|\underline{x}, \mathcal{M}) q_{z_B}(\underline{z}_B|\underline{x}, \mathcal{M})$$

L'expression de  $q_{z_B}$  est donnée par  $\frac{d\mathcal{F}}{dq_{z_B}} = 0$  :

$$q_{z_B}(\underline{z}_B|\underline{x}, m) \propto \exp\left\{ \langle \ln p(\underline{z}_B|\underline{z}_N, \beta) \rangle_{q(\underline{z}_N)} + \mathcal{H}_B(\mathbf{r}) \right\} \quad (12)$$

avec :

$$\mathcal{H}_B(\mathbf{r}) = \langle \ln p(\underline{s}|\underline{z}, \underline{m}_z, \Sigma_z) + \ln p(\underline{x}|\underline{s}, \underline{z}, \mathbf{A}, \Sigma_\epsilon) \rangle_{q(\theta), q(\underline{s}|\underline{z}), q(\underline{z}_N)}$$

en développant ces expressions, on obtient :

$$q_{z_B}(\underline{z}_B|\underline{x}, m) \propto \prod_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}_B} \exp \left\{ \beta \sum_{\mathbf{r}'} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\underline{z}_{\mathbf{r}} - \underline{z}_{\mathbf{r}'}) q(\underline{z}_{\mathbf{r}'} = \mathbf{k}) + \mathcal{H}_B(\mathbf{r}) \right\}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_B(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2} \tilde{s}_z^t(\mathbf{r}) \tilde{\Sigma}_z \tilde{s}_z(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \tilde{\Sigma}_z \tilde{\Sigma}_{s|z}^{-1} \right\} \\ &+ \tilde{m}_z^t \tilde{\Sigma}_z \tilde{s}_z(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \tilde{m}_z^t \tilde{\Sigma}_z \tilde{m}_z - \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \tilde{\Sigma}_z \mathbf{T}_z^{-1} \right\} \\ &+ \frac{R}{2} \sum_{i=1}^M \Psi\left(\frac{\nu + R + 1 - i}{2}\right) + M \ln 2 + \ln |\tilde{\Sigma}_\epsilon| \\ &- \frac{R}{2} \text{Tr} \left\{ \tilde{\Sigma}_\epsilon D_A \left( \sum_{\underline{z}(\mathbf{r})} q(\underline{z}(\mathbf{r})) \tilde{\Sigma}_{s|z}^{-1}, \tilde{\Sigma}_A^{-1}, \tilde{\mathbf{A}} \right) \right\} - \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \tilde{\Sigma}_\epsilon \mathbf{Q} \right\} \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient l'expression de  $q_{z_N}(\underline{z}_N|\underline{x}, \mathcal{M})$

$$q_{z_N}(\underline{z}_N|\underline{x}, \mathcal{M}) \propto \prod_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}_N} \exp \left\{ \beta \sum_{\mathbf{r}'} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\underline{z}(\mathbf{r}) - \underline{z}(\mathbf{r}')) \cdot q(\underline{z}(\mathbf{r}') = \mathbf{k}) + \mathcal{H}_N(\mathbf{r}) \right\} \quad (13)$$

avec :

$$\mathcal{H}_N(\mathbf{r}) = \langle \ln p(\underline{s}|\underline{z}, \underline{m}_z, \Sigma_z) + \ln p(\underline{x}|\underline{s}, \underline{z}, \mathbf{A}, \Sigma_\epsilon) \rangle_{q(\theta), q(\underline{s}|\underline{z}), q(\underline{z}_B)}$$

Le schéma général de l'algorithme itératif obtenu et proposé consiste donc à mettre à jour successivement  $q(\underline{s}|\underline{z}, \underline{x}, \theta)$ ,  $q_{z_N}(\underline{z}_N|\underline{z}_B, \underline{x}, \mathcal{M})$ ,  $q_{z_B}(\underline{z}_B|\underline{z}_N, \underline{x}, \mathcal{M})$ ,  $q(\theta_i|\underline{s}, \underline{z}, \underline{x}, \theta)$ . Une fois ces itérations ont convergé, on peut utiliser ces lois pour fournir des estimés pour  $\{\underline{s}, \underline{z}$  et  $\theta\}$ .

## 4 Estimation de l'énergie libre

L'estimation de  $\mathcal{F}$  nous permet d'avoir un critère de convergence. La maximisation de l'énergie libre est faite par un procédé itératif (Figure : 2, (a)), suivant une itération totale qui contient une mise à jour de tous paramètres. Nous employons un seuil sur  $\frac{\Delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}}$  pour arrêter les itérations. Puisque des calculs des paramètres pour tout  $q$  sont déjà effectués, il est facile de calculer  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \langle \ln p(\underline{x}|\underline{s}, \underline{z}, \mathbf{A}, \Sigma_\epsilon) \rangle_{q(\underline{s}|\underline{z}), q(\mathbf{A}), q(\Sigma_\epsilon)} \\ &- \langle KL(q(\underline{s}|\underline{z})||p(\underline{s}|\underline{z})) \rangle_{q(\underline{z})} - KL(q(\mathbf{A})||p(\mathbf{A})) \\ &- KL(q(\Sigma_\epsilon)||p(\Sigma_\epsilon)) - KL(q(\underline{m}_z)||p(\underline{m}_z)) - KL(q(\Sigma_z)||p(\Sigma_z)) \end{aligned}$$

Nous employons également les valeurs finales de  $\mathcal{F}$  pour le choix de modèle.

## 5 Résultats

Pour évaluer les performances de notre méthode nous avons choisi de la comparer avec la méthode MCMC déjà proposée pour cette modélisation ( Figure 1 : (d)) ce qui nous permet de gagner en temps de calcul. Notre méthode converge après 120 itérations alors que l'algorithme MCMC n'a toujours pas convergé. L'estimation de  $\mathcal{F}$  nous permet d'avoir un critère d'arrêt, la maximisation de l'énergie libre se fait de façon itérative suite a une itération globale qui contient une mise à jour de tous les paramètres. Étant donné que les calculs des paramètres pour toutes les fonctionnelles  $q$  sont déjà faites, il est facile de calculer  $\mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}$  nous permet aussi de faire le choix approprié du modèle. Pour un exemple simulé avec trois sources nous calculons les valeurs convergées de  $\mathcal{F}$  pour un nombre différent de sources de 2 à 7. Comme on montre dans la (Figure 2 : (b)), maximum de  $\mathcal{F}$  est 3 qui est le bon résultat. Nous comparons aussi avec la méthode (VBICA [6]) ( Figure 1 : (c)). Cette méthode utilise un mélange de gaussiennes avec un modèle indépendant sur les coefficients de mélange contrairement à celle que nous proposons. Ce type de modèle est souvent utilisé en calcul variationnel [7, 3] vu que les loi a priori sont toujours choisie dans des familles séparable. Notre méthode converge au bout de 120 itérations alors que la méthode (VBICA) atteint les 500 itérations sans avoir convergé pour un degré de tolérance sur  $\mathcal{F}$  de  $1e^{-5}$ .

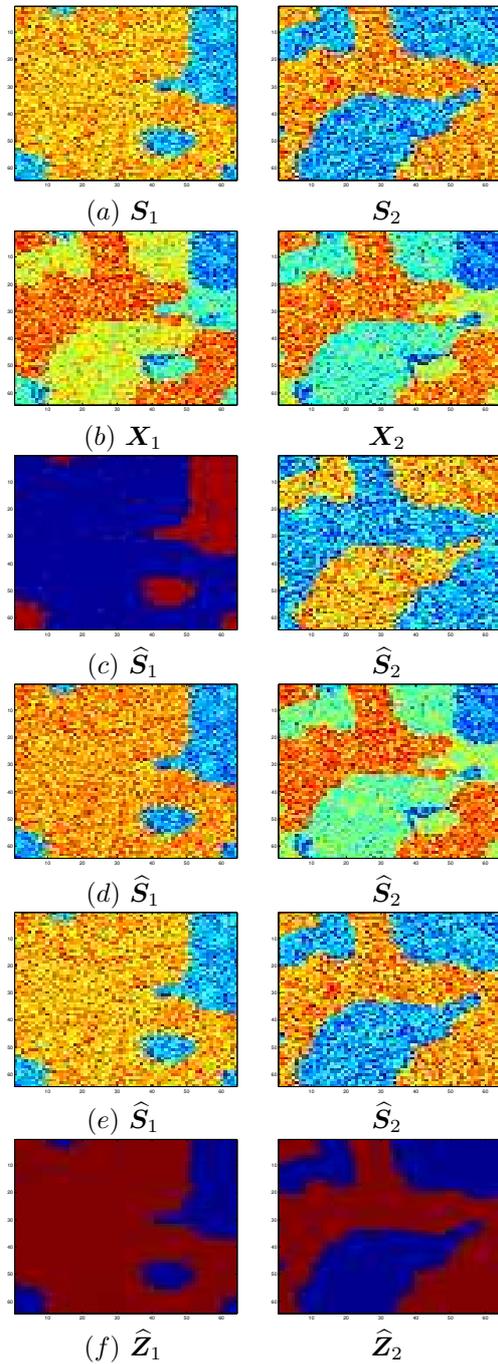


FIG. 1 – Résultats de séparation à partir de deux images  $X_1$  et  $X_2$  (b) obtenu par mélange instantané de sources  $S_1$  et  $S_2$  (a) chaque source est elle même modélisé par des champ cachés. En (c), (d) et (e) sont montrées les sources estimées par trois méthodes VBICA, MCMC et l’approche proposée.

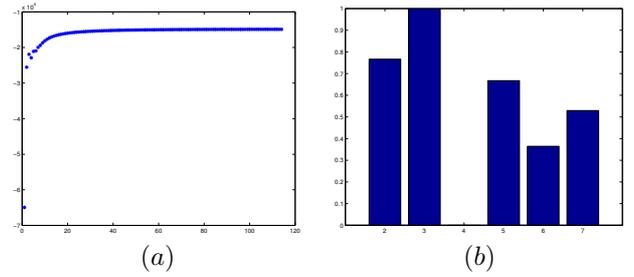


FIG. 2 – (a) évolution de  $\mathcal{F}$  durant les itérations (b) valeur finale de  $\mathcal{F}$  pour des données simulés formées par 4 images de mélanges obtenues a partir de 3 sources.  $\mathcal{F}$  a été normalisé par rapport à ca valeur minimal qui correspond à  $N = 4$ . Le maximum est obtenu pour la bonne valeur qui correspond à 3.

## 6 Conclusion

Dans ce papier nous proposons une nouvelle approche de séparation de sources fondée sur l’estimation bayésienne et calcul variationnel. Le calcul variationnel est appliqué sur un modèle de Potts, sachant qu’il s’agit d’une distribution non séparable. Il s’agit donc d’une méthode qui intègre l’estimation des variables cachées et les hyperparamètres du modèle ainsi que l’estimation du nombre de sources.

## Références

- [1] Christian Robert, *Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov*, Economica, Paris, France, 1996.
- [2] H Attias, “Independent factor analysis,” submitted to *Neural Computations*, 1998.
- [3] H. Attias, “A variational Bayesian framework for graphical models,” in *Advances in Neural Information Processing Systems*, S. Solla, T. K. Leen, and K. L. Muller, Eds. 2000, vol. 12, pp. 209–215, MIT Press.
- [4] Z. Ghahramani and M. J. Beal, “Propagation algorithms for variational Bayesian learning,” in *Advances in Neural Information Processing Systems*, T.K. Leen, T. Dietterich, and V. Tresp, Eds. 2001, vol. 13, pp. 507–513, MIT Press.
- [5] Mahieddine M. Ichir and Ali Mohammad-Djafari, “A mean field approximation approach to blind source separation with  $l_p$  priors,” in *Eusipco*, Antalya, Turkey, Sep. 2005.
- [6] R.A. Choudrey and S.J. Roberts, “Bayesian ICA with Hidden Markov Model Sources,” in *ICA, NARA, JAPAN*, Apr. 2003.
- [7] J.W Miskin, *Ensemble Learning for Independent Component Analysis*, Phd thesis, Cambridge, 2000, <http://www.inference.phy.cam.ac.uk/jwm1003/>.