

# Recombinaison de signaux décodés et transférés pour le canal à relais à division fréquentielle

Brice DJEUMOU, Veronica BELMEGA, Samson LASAULCE

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS, Supélec, Paris 11  
3 rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex  
{djeumou, lasaulce, belmega}@lss.supelec.fr

**Résumé** – Ce papier traite le canal à relais. Il est une extension de [6] où on s'intéresse aux méthodes de recombinaison des signaux à la destination lorsque tous les relais utilisent la stratégie decode-and-forward. Contrairement à [6], la source et les relais ne sont plus contraints d'utiliser une modulation à deux états. On s'intéresse plus particulièrement au cas où le relais a de moins bonnes conditions de réception que la destination et la puissance de coopération est suffisamment grande. Dans ce cas, l'utilisation du Maximum Ratio Combining (MRC) conventionnel dégrade sévèrement les performances à la destination. Pour cette raison nous présenterons ici le combineur optimal au sens de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) et celui au sens du maximum de vraisemblance (ML) afin de tirer profit de la coopération quelque soit le scénario des rapports signal-à-bruit (SNR).

**Abstract** – This paper is an extension of [6] where we investigate the different ways of combining signals that have been decoded-and-forwarded by a bunch of relays. Here, unlikely in [6], the source and the relay are no longer constrained to use a 2-states modulation. We more deeply look at the case where the relays are in bad reception conditions and the cooperation powers are sufficiently high. In this situation using a conventional MRC severely degrades the receiver performance. This is the reason why we present an MMSE combiner and used an ML combiner in order to almost always extract from the relaying nodes some performance improvements.

## 1 Introduction

On considère le canal à relais gaussien à trois terminaux (un émetteur, un relais et un récepteur) pour lequel le signal reçu par la destination de la part du relais est supposé orthogonal fréquemment à celui reçu directement de la source [1]. Dans l'analyse originelle de type théorie de l'information du canal à relais de Cover et El Gamal [2] les auteurs ont introduit une stratégie de relayage appelée decode-and-forward (DF) qui n'est applicable que si le relais se trouve dans de meilleures conditions de réception que la source. Bien que la stratégie de codage théorique impose cette contrainte, on peut toujours appliquer l'idée du protocole DF pour n'importe quelle stratégie pratique de codage canal (e.g. codage convolutif). Cependant, si le relais a un mauvais rapport signal-à-bruit (SNR) de réception, il peut en résulter une forte sous-optimalité au récepteur lorsqu'un recombineur classique de type maximum ratio combining (MRC) est utilisé au niveau de la destination. Dans presque tous les travaux (exemple typique [3]) de la littérature du domaine les auteurs supposent que le relais est dans de meilleures conditions que la source et utilisent un recombineur MRC au récepteur pour combiner les deux signaux en provenance de la source et du relais.

Quelques travaux ont traité le problème de recombinaison de signaux pour le protocole DF [4][5][6]. Dans [5] les auteurs proposent de pondérer les deux signaux reçus par les poids  $(1, \lambda)$  et de déterminer le paramètre  $\lambda$  en minimisant la probabilité d'erreur brute (avant décodage canal) au récepteur. Cette solution a au moins deux in-

convénients: l'expression de la probabilité d'erreur brute n'est pas souvent facile à exprimer analytiquement en pratique et avoir un seul degré de liberté (i.e.  $\lambda$ ) est d'autant plus sous-optimal en termes de taux d'erreurs binaires (BER) que les bruits des signaux reçus sont corrélés avec le signal utile ou/et que ces bruits sont non gaussiens. Or l'utilisation du protocole DF conduit à cette situation. Dans [4] les auteurs ont proposé un combineur au maximum de vraisemblance pour une source binaire (BPSK) en vue de proposer une stratégie de relayage efficace énergétiquement pour les canaux à évanouissements. Les auteurs de [6] ont utilisé une idée similaire pour une source binaire dans le cas du canal à  $N$  relais et comparé cette approche avec des combineurs MRC et MMSE optimisés à partir de la connaissance des statistiques sur les erreurs de décodage. Le travail présent correspond à la généralisation de [6] au cas plus délicat où ni la source ni le relais ne sont pas forcément supposés utiliser des modulations à 2 états. Nous commençons par définir notre modèle en Section 2. Puis nous présenterons le combineur optimal au sens de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) et celui au sens du maximum de vraisemblance (ML) en Section 3 et Section 4 respectivement. Les performances de ces combineurs seront illustrées en Section 5.

## 2 Modèle du système

Tout d'abord précisons quelques hypothèses de travail et quelques notations utilisées dans ce résumé. Tous les canaux mis en jeu sont supposés gaussiens. Les signaux

émis par la source  $X$  et par le relais  $X_{12}$  sont soumis à des contraintes de puissances:  $E|X|^2 \leq P$ ,  $E|X_{12}|^2 \leq P_{12}$ . Les signaux reçus par le relais ( $Y_1$ ) et la destination ( $Y_2$ ,  $Y_{12}$ ) s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} Y_1 &= X + Z_1 \\ Y_2 &= X + Z_2 \\ Y_{12} &= X_{12} + Z_{12} \end{cases}$$

où  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_{12}$  sont des bruits gaussiens complexes centrés de variances respectives  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_{12}$ . Nous supposons que le relais applique le protocole decode-and-forward. Le relais décode le signal qu'il reçoit puis le ré-encode. Pour modéliser les erreurs introduites par le relais nous utilisons le modèle suivant:  $X_{12} = \alpha_1 \epsilon_1 X$  où  $\alpha_1 = \sqrt{\frac{P_{12}}{P}}$  et  $\epsilon_1$  est une variable aléatoire qui modélise les erreurs et telle que  $I(\epsilon_1; X) = 0$ . La relation  $X_{12} = \alpha_1 \epsilon_1 X$  sera valable pour le combineur MMSE. Pour le combineur ML, pour lequel le relais pourra utiliser une modulation éventuellement différente de celle de la source, cette relation deviendra:  $X_{12} = \alpha_1 \epsilon_1 X_r$ .

### 3 Combineur MMSE pour les signaux décodés et transférés

Comme nous l'avons souligné le combineur MRC peut induire une forte perte de performances en réception car ce combineur maximise le rapport signal-à-bruit alors que le BER brut en sortie de combineur n'est pas toujours une fonction croissante du SNR à cause des erreurs introduites par le relais. Avec le modèle d'erreur proposé, on identifie immédiatement un problème d'égalisation. Le relais se comporte comme un canal qui ne peut pas être connu de manière instantanée par le récepteur. Il est néanmoins raisonnable de supposer le récepteur informé des statistiques de ces erreurs. On considère ainsi l'erreur quadratique moyenne sur  $X$  pour ainsi optimiser une métrique de performance plus intimement liée au BER brut. Mais là encore, bien que nos simulations nous aient montré une amélioration sensible par rapport au MRC, le BER n'est pas toujours une fonction croissante de la MSE. De plus le combineur MMSE ne peut être exprimé que lorsque le relais utilise la même modulation que la source. Hormis ces inconvénients, le combineur linéaire MMSE a l'avantage d'être peu complexe et facilement généralisable à des modèles de canaux plus élaborés (multi-trajets, à évanouissements, à nombre de relais quelconques, etc.) Le combineur MMSE applique le couple de poids  $\underline{w}^T = (w_1, w_2)$  au vecteur de signaux reçus  $\underline{Y} = [Y_{12}, Y_2]^T$ . On peut montrer que les poids qui minimisent  $E|\underline{w}^T \underline{Y} - X|^2$  peuvent s'exprimer par:  $\underline{w}_{mmse} = \mathbf{R}_{yy}^{-1} \underline{\mu}$  avec  $\forall (i, j) \in \{1, 2\}^2$ ,

$$R_{yy}(i, j) = \begin{cases} \alpha_i^2 E[|\epsilon_i|^2 |X|^2] + N_i & \text{si } i = j \\ \alpha_i \alpha_j E[\epsilon_i^* \epsilon_j |X|^2] & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et  $\forall i \in \{1, 2\}$ ,  $\mu(i) = \alpha_i E[\epsilon_i^* |X|^2]$ , avec  $\alpha_2 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 1$ . Pour une modulation de phase à  $M$  états (M-PSK) par exemple nous aurons  $E[|\epsilon_1|^2 |X|^2] = E[|\epsilon_1|^2] E[|X|^2] = P$

et  $E[\epsilon_1 |X|^2] = E[\epsilon_1] P$  avec  $E[\epsilon_1] = 1 - 2p$  pour  $M \in \{2, 4\}$  et  $E[\epsilon_1] \simeq 1 - \frac{5}{2}p$  pour  $M \geq 8$ ,  $p$  étant la probabilité d'erreur binaire résiduelle (après ré-encodage) au niveau du relais.

### 4 Combineur ML pour les signaux décodés et transférés

Nous voulons maintenant exprimer le meilleur combineur au sens du maximum de vraisemblance. Ce combineur, non linéaire, a l'avantage d'optimiser un critère le plus lié possible au BER brut. Un autre avantage notable est qu'il peut, contrairement aux combineurs MRC et MMSE, combiner des modulations différentes. Ceci est particulièrement intéressant car le protocole DF, contrairement au protocole amplify-and-forward (AF), permet au relais d'utiliser une modulation éventuellement différente de celle de la source. En effet, contrairement au protocole AF, la bande du signal de coopération  $Y_{12}$  n'a pas besoin d'être égale à la bande du signal direct  $Y_2$ . Cela laisse donc un degré de liberté dans le choix des modulations. En fait, les modulations de la source et du relais doivent être compatibles au sens du débit binaire (bit/s); ces conditions de compatibilité seront fournies dans la version longue finale de cet article. Nous les supposerons vérifiées ici. Soit  $\underline{b}$  la séquence binaire représentant un message à transmettre. Sans perte de généralité nous supposerons ici que la bande des signaux descendants (i.e. celle de  $Y_1$  et  $Y_2$ ) est supérieure à la bande du signal de coopération  $Y_{12}$ . Dans ce cas, la compatibilité du débit d'information entre la source et le relais fait que la source va émettre plusieurs symboles (notés  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$  correspondant aux bits de message  $b_1, \dots, b_{ns}$ ) au cours de la durée symbole du relais. Chaque symbole  $X^{(i)}$  émis à la source est en relation bijective avec un nombre de bit  $s$  du message binaire à transmettre où  $s$  dépend du débit binaire fixé et de l'allocation de bande des signaux descendants (par exemple  $s = 1 \rightarrow$  pour une modulation BPSK à la source). Le système d'équations des signaux reçus à l'entrée du combineur s'écrit donc sous la forme:

$$\begin{cases} Y_{12} &= \alpha_1 \epsilon_1 X_r + Z_{12} \\ Y_2^{(1)} &= X^{(1)} + Z_2^{(1)} \\ &\vdots \\ Y_2^{(n)} &= X^{(n)} + Z_2^{(n)} \end{cases}$$

où le symbole du relais  $X_r$  est aussi en relation bijective vecteur de symboles émis par la source c'est-à-dire  $\underline{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)})^T$ . En supposant l'indépendance des bruits  $Z_{12}, Z_2^{(1)}, \dots, Z_2^{(n)}$  nous pouvons développer la vrai-

semblance  $p_{ML} = p(y_{12}, y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(n)} | \underline{b})$  comme suit:

$$\begin{aligned}
 p_{ML} &= p(y_{12}, y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(n)} | \underline{b}) \\
 &= p(y_{12}, y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(n)} | \underline{x}) \\
 &= p(y_{12} | \underline{x}) \times \prod_{i=1}^n p(y_2^{(i)} | x^{(i)}) \\
 &= \sum_{m=1}^{M_r} \Pr[\epsilon_1 = e_{1,m}] p(y_{12} | \underline{x}, e_{1,m}) \times \prod_{i=1}^n p(y_2^{(i)} | x^{(i)})
 \end{aligned} \tag{1}$$

où  $M_r$  est la taille de la constellation utilisée par le relais et  $e_{1,m}$  une réalisation particulière de  $\epsilon_1$ . Avec cette écriture on peut expliciter la vraisemblance puisque tous les bruits mis en jeu sont supposés gaussiens et blancs. On peut alors exprimer les rapports de vraisemblances (LLR) pour déterminer les bits émis les plus probables (le raisonnement est analogue sur les symboles). Ainsi, le rapport de vraisemblance pour le bit  $b_i \in \underline{b} = \{b_1, \dots, b_{n_s}\}$  s'exprime par :

$$\lambda(b_i) = \log \left[ \frac{\sum_{\underline{b} \in S_1^{(i)}} p_{ML}(y_{12}, y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(n)} | x^{(1)}, \dots, x^{(n)})}{\sum_{\underline{b} \in S_0^{(i)}} p_{ML}(y_{12}, y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(n)} | x^{(1)}, \dots, x^{(n)})} \right] \tag{2}$$

où les ensembles  $S_1^{(i)}$  et  $S_0^{(i)}$  sont deux partitions binaires telles que:  $S_1^{(i)} = \{(b_1, \dots, b_{n_s}) \in \{0, 1\}^{n_s} | b_i = 1\}$  et  $S_0^{(i)} = \{(b_1, \dots, b_{n_s}) \in \{0, 1\}^{n_s} | b_i = 0\}$ . Si  $\lambda(b_i) > 0$ , on décide  $\hat{b}_i = 1$  et  $\hat{b}_i = 0$  sinon.

## 5 Simulations

Les simulations sont effectuées sur des canaux gaussiens en absence de codage canal. Le décodage correspond donc à une simple démodulation. Les conclusions qui seront tirées pourront s'étendre au moins au cas codé à décisions fermes. Pour tous les cas considérés l'efficacité spectrale est maintenue à 1 bpuc: sans coopération la source utilise une BPSK alors qu'avec coopération (bande descendante divisée par 2) la source utilise une 4-QAM. On s'intéresse au taux d'erreur binaire (BER) en sortie de chaque combineur. La figure 1 représente les performances des différents combineurs en fonction de la puissance d'émission à la source en présence d'un bon relais (meilleur SNR de réception par rapport à la destination). On se place dans des conditions telles que le récepteur et le relais soient colocalisés (SNR de réception élevé sur le lien de coopération). On distingue deux cas: le premier où la puissance de coopération est insuffisante et le deuxième où cette puissance est assez importante. On rappelle que le SNR considéré est le SNR symbole. Les performances de ces différents combineurs s'égalisent lorsque la puissance de coopération devient insuffisante. D'une façon générale, le ML est le combineur ayant les meilleures performances. Cette conclusion se confirme sur les figure 2 et figure 3 représentant les performances des différents combineurs en fonction de la puissance d'émission en présence d'un

relais "moyen" et d'un "mauvais" relais respectivement. La puissance au relais est suffisante. Le combineur ML a un gain pouvant dépasser 2 dB sur la puissance d'émission à la source par rapport au combineur MMSE. Cet gain est d'autant plus important que les SNRs de réception du relais et de la destination sont proches. Contrairement au combineur MRC, les combineurs ML et MMSE permettent toujours de tirer profit de la coopération (on continue à améliorer la qualité du décodage au récepteur) même en présence d'un "mauvais" relais où le MRC dégrade les performances. Ceci se confirme sur la figure 4 représentant les performances des différents combineurs en fonction de la puissance sur le lien de coopération. On se place encore dans le cas où le SNR au relais est bien moins bon que celui du lien source-destination. On remarque que le MRC dégrade les performances car il ne tient pas compte des erreurs de décodage au relais. L'intérêt des combineurs ML et MMSE apparaît assez nettement.

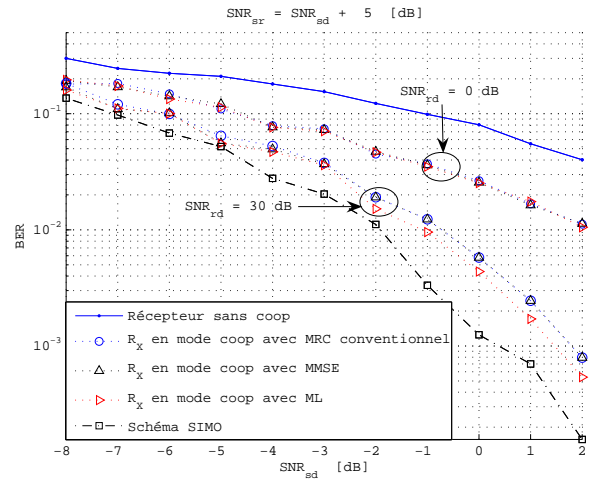


FIG. 1: Comparaison des combineurs vs la puissance d'émission à la source avec un "bon" relais

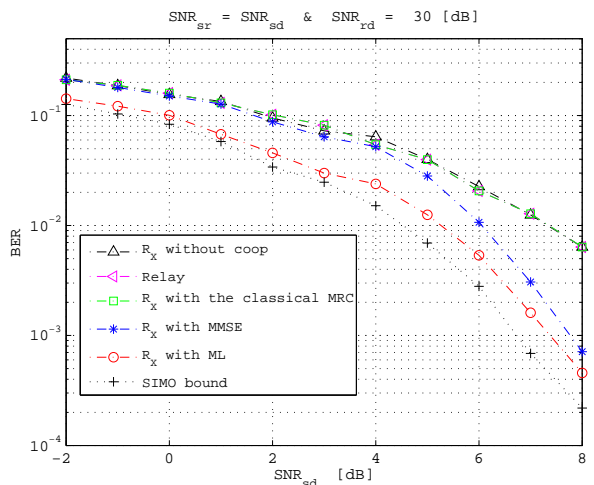


FIG. 2: Comparaison des combineurs vs la puissance d'émission à la source avec un relais "moyen"

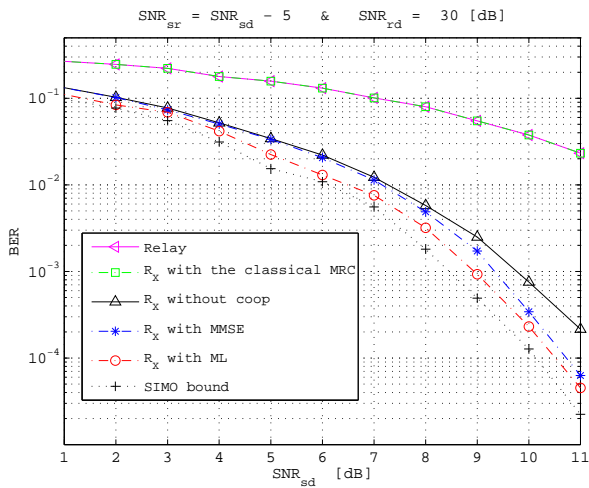


FIG. 3: Comparaison des combineurs vs la puissance d'émission à la source avec un "mauvais" relais

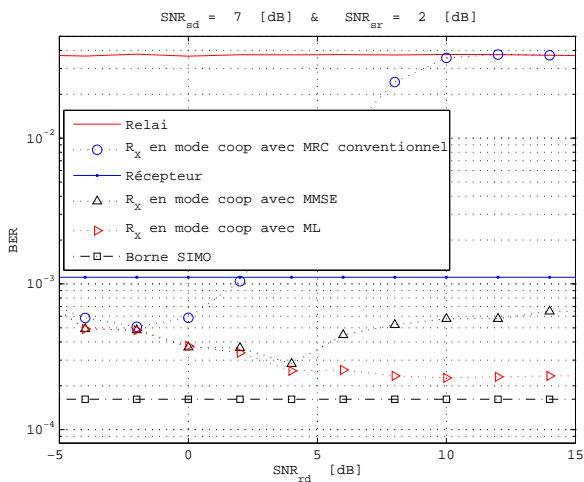


FIG. 4: Comparaison des combineurs vs la puissance de coopération

## Références

- [1] A. A. El Gamal, M. Mohseni and S. Zahedi, "Bounds on capacity and minimum energy-per-bit for AWGN relay channels", *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 52, Issue 4, April 2006, pp. 1545–1561.
- [2] T. M. Cover and A. A. El Gamal, "Capacity theorems for the relay channel", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 25, Issue 5, Sep. 1979, pp. 572–584.
- [3] B. Zhao and M. C. Valenti, "Distributed turbo coded diversity for the relay channel", *IEE Electronics Letters*, Vol.39, May 2003, pp. 786–787.
- [4] N. Laneman and G. Wornell, "Energy-efficient antenna sharing and relaying for wireless networks", *Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, Vol.1, Sep. 2000, pp. 7–12.
- [5] A. Sendonaris, E. Erkip and B. Aazhang, "User cooperation diversity-Part II: Implementation aspects and

performance analysis", *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 51, Issue 11, Nov. 2003, pp. 1939–1948.

- [6] B. Djeumou, S. Lasaulce and A. G. Klein "Combining decoded-and-forwarded signals in Gaussian cooperative channels", *IEEE Proc. of ISSPIT*, Aug. 2006, pp. 622–627.