Adaptation du décodage itératif des codes LDPC sur canal optique utilisant un modèle à statistique chi-2

STEPHANIE SAHUGUEDE, ANNE JULIEN-VERGONJANNE, JEAN-PIERRE CANCES

Université de Limoges, XLIM Dpt- C²S² ENSIL Parc ESTER, BP 6804, 87068 Limoges Cedex, FRANCE
Tel/Fax : 0555423670 / 0555423680

s_sahuguede@ensil.unilim.fr; anne@ensil.unilim.fr; cances@ensil.unilim.fr

Résumé - Le décodage itératif des codes LDPC est étudié dans le cas d'un canal optique bruité en considérant un modèle statistique réaliste du canal basé sur une distribution chi-2 non centrée. L'expression analytique du Logarithme du Rapport de Vraisemblance (LRV) nécessaire à l'initialisation du décodeur est obtenue dans le cas particulier étudié. Dans le contexte optique, même si le dimensionnement des codes LDPC peut être réalisé simplement en considérant que le canal est perturbé par un Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG), il est nécessaire de tenir compte de la statistique chi-2 pour l'initialisation de l'algorithme de décodage afin d'obtenir un pouvoir de correction optimal.

1 Introduction

Dans le contexte des communications optiques, les perturbations sur la chaîne de transmission entre l'émetteur et le récepteur sont généralement modélisées par un Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG) [1]. Cependant, la photodétection, inhérente à toute transmission optique, transforme la statistique du signal détecté, qui n'est alors plus de nature gaussienne [2-4]. En réception, le seuil de détection peut être ajusté de telle sorte que les performances ne soient pas dégradées par rapport à celles données par le modèle gaussien.

Si on souhaite améliorer les performances avec un codage correcteur d'erreurs basé sur un décodage à propagation de croyance [5], il est important de connaître la statistique du canal. Notre contribution dans ce papier est de fournir une formulation des logarithmes de rapport de vraisemblance (LRV) basée sur une statistique réaliste du canal. Pour cela, la première partie décrit la statistique envisagée pour modéliser le canal optique. La deuxième partie présente le système de codage et décodage utilisant les codes LDPC (Low Density Parity Check) [6-7]. La dernière partie est consacrée à l'application des codes LDPC au canal optique ainsi qu'à l'évaluation des performances.

2 Modèle statistique du canal optique

2.1 Contexte

On considère que les données sont émises selon la modulation OOK (On Off Keying) et de manière équiprobable. Le canal optique est donc considéré comme unipolaire (0, 1). Au niveau de la réception, les données sont reçues en détection directe par une photodiode, et on suppose que l'ensemble des bruits avant photodétection est prépondérant par rapport aux bruits post-détection. Le modèle couramment utilisé pour représenter le bruit sur une telle chaîne de transmission est le modèle additif gaussien (BABG : Bruit Additif Blanc Gaussien) caractérisé par une variance σ^2. Cependant, la loi de détection quadratique au niveau de la photodiode rend l'utilisation de ce modèle inappropriée dans le cas de transmissions optiques [2-4]. Si on suppose que l'ensemble des bruits avant la détection est modélisé par un bruit BABG, un modèle à statistique chi-2 est par définition plus proche du phénomène physique [3-4]. En effet, une variable suivant une distribution chi-2 d'ordre n est définie comme la somme de n variables gaussiennes élevées au carrées, ce qui rend compte de la détection quadratique du photodétecteur. Différents travaux ont donc considéré que le canal optique peut être modélisé par une statistique chi-2 centrée [3]. Or, des résultats récents de simulations physiques [2], [4] ont permis de montrer que la densité de probabilité correspondant aux '0' émis, pour un niveau de bruit donné, est centrée sur une moyenne dépendant des paramètres du réseau. Cette caractéristique est contradictoire avec le modèle chi-2 centré jusqu'alors étudié et dont la moyenne est entièrement fixée par l'ordre n et la variance σ^2 [8].

2.2 Description du modèle

Dans cette étude, nous proposons de modéliser le canal optique, en utilisant un modèle chi-2 non centré, d'ordre $n = 2B_o/B_e$, [3] avec B_o et B_e les bandes passantes optique et électrique. L'amplitude correspondant à un '0' émis A_0 est non nulle, ce qui permet de définir le rapport d'extinction par : $EX = A_1^2/A_0^2$, où A_1 est l'amplitude correspondant à un '1' émis. Ce rapport peut être ajusté en fonction des caractéristiques physiques du réseau (niveau de dispersion, de non-linéarité, interférences) [4]. Pour simplifier les expressions, on suppose que la sensibilité de la photodiode est normalisée à 1. A chaque bit émis d, une variable Y suivant la loi du chi-2 est directement associée:

$$Y=\sum_{k=1}^{n}\left(s_k+b_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \tag{1}$$

s_k et b_k sont les composantes de signal et de bruit. La somme de ces deux termes, notée x_k est donc une variable aléatoire suivant la loi normale $N(\sqrt{A_i^2/n}, \sigma^2)$, avec σ^2 la variance du bruit BABG et A_i l'amplitude du signal correspondant à la donnée émise $d=i$.

La densité de probabilité du signal détecté est alors donnée par l'expression suivante [8] :

$$p(Y|b=i)=p_i(Y)=\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{Y}{A_i^2}\right)^{(n-2)/4} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y+A_i^2\right)} I_{n/2-1}\left(\sqrt{Y}\,\frac{A_i}{\sigma^2}\right) \tag{2}$$

avec $I_\alpha(\beta)$ la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre α.

Dans le cas particulier où $A_0=0$ cette densité de probabilité se simplifie en [8] :

$$p_0'(Y)=\frac{1}{2^{n/2}\sigma^n\left(n/2-1\right)!}Y^{\,n/2-1}\,e^{-\frac{Y}{2\sigma^2}} \tag{3}$$

Le modèle statistique décrit a été validé dans le cadre du canal de transmission du réseau d'accès optique du projet ANR ECOFRAME [4], [9].

En effet, dans ce cadre, un simulateur physique a été développé [4], tenant compte des bruits cumulés engendrés par les amplificateurs optiques en ligne, de la dispersion de la fibre et des phénomènes de non-linéarités. Les diagrammes de l'œil obtenus permettent d'identifier la statistique réelle des signaux optiques se propageant sur le réseau, en effectuant une analyse de données par des méthodes de régression. Des calculs d'erreur quadratique reportés sur la figure 1 montrent qu'une statistique chi-2 non centrée décrit plus fidèlement la statistique réelle du photocourant qu'une statistique gaussienne.

Pour de faibles valeurs de n, on a pu observer que les performances sont sévèrement dégradées. Pour compenser ces phénomènes, nous présentons par la suite une solution utilisant un codage/décodage basé sur les codes LDPC.

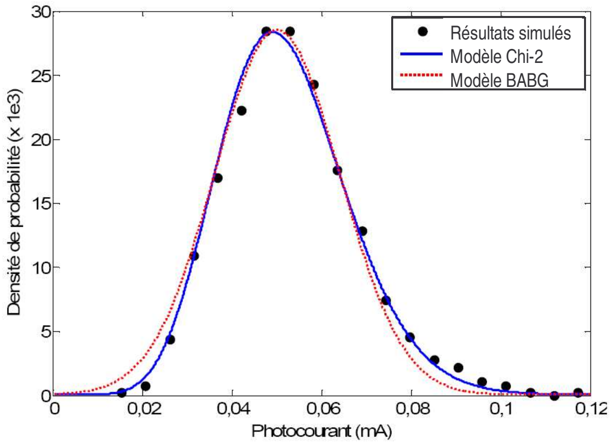

Fig. 1. Régression gaussienne et chi²

3 Codage et décodage itératif avec les codes LDPC

3.1 Principe de fonctionnement

Les codes correcteurs d'erreurs envisagés dans cette étude sont de type LDPC (Low Density Parity Check) [2], [6-7], caractérisés par une matrice de parité très peu dense. Parmi les différentes familles de codes LDPC, nous nous intéressons aux codes construits selon la méthode déterministe BIBD (Balanced Incomplete Block Design) [7] dont la structure régulière de la matrice de décodage facilite l'implémentation [10]. Chaque code noté (N, K) est entièrement caractérisé par une matrice de parité $\boldsymbol{H}$, associée à une matrice d'encodage $\boldsymbol{G}$ au niveau de l'émetteur, de sorte que l'équation de parité $\boldsymbol{GH}^T=0$ soit satisfaite. Au niveau de l'émission, chaque mot composé d'un bloc de K bits est multiplié par $\boldsymbol{G}$, de manière à former un mot de code $\boldsymbol{c}$, de longueur N tel que $\boldsymbol{cH}^T=0$. En réception, des itérations dans l'algorithme de décodage ont lieu jusqu'à ce que le bloc de bits décidés soit un mot de code (équation de parité satisfaite) ou jusqu'à ce que le nombre maximal d'itérations soit atteint. Dans toutes les simulations présentées par la suite, ce nombre maximal est fixé à 100, de sorte que les performances ne varient plus en fonction du nombre d'itérations.

3.2 Expression des Logarithmes des Rapport de Vraisemblance (LRV)

L'algorithme de décodage utilisé dans cette étude est basé sur la propagation de croyance [5] et utilise la structure de la matrice de parité. Chaque ligne de la matrice de parité $\boldsymbol{H}=(h_{ij})$ est associée à un nœud de parité et chaque colonne à un nœud de variable. A chaque h_{ij} égal à '1' dans la matrice de parité est associée une liaison entre le nœud de variable j et le noeud de parité i. La première étape de l'algorithme de décodage consiste à calculer les logarithmes des rapports de vraisemblance (LRV) en fonction des bits reçus [5] :

$$LRV=\ln\left(\frac{p(x=0|Y)}{p(x=1|Y)}\right) \tag{4}$$

avec Y le signal détecté correspondant à la donnée émise x. Des échanges itératifs ont ensuite lieu entre les nœuds de variable et les nœuds de parité. La connaissance de la statistique du canal est alors très importante pour évaluer correctement les probabilités *a priori* qu'il s'agisse de '1' ou de '0' émis.

Les calculs des LRV sont généralement basés sur une statistique gaussienne, qui correspond au modèle de bruit le plus simple. Pour le cas d'un canal unipolaire, en notant b la composante de bruit gaussien et d la donnée émise (0 ou 1), la donnée reçue s'écrit : $Y=d+b$. Etant donnée la loi uniforme d'émission des données, la loi de Bayes s'applique et on obtient à partir de la densité de probabilité de la loi gaussienne :

$$LRV = \ln\left(\frac{p(Y=0|x)}{p(Y=1|x)}\right) = \frac{2Y-1}{2\sigma^2} \qquad (5)$$

Cette expression pour un canal unipolaire est équivalente à celle couramment utilisée dans le cas d'un canal bipolaire en effectuant la normalisation $y=2Y-1$ et $\sigma'=2\sigma$ [5]. Dans le cas du canal à statistique chi-2 non centrée, le calcul des LRV est à reconsidérer.

4 Décodage des codes LDPC dans le cas d'une statistique chi-2 non centrée

4.1 Détermination des LRV pour le canal chi-2

En utilisant le modèle chi-2 non centré présenté dans la première partie, les probabilités recherchées dans l'expression du LRV (4) peuvent être déterminées :

$$p(x=0|Y) = p(Y|x=0) =$$

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{Y}{A_0^2}\right)^{(n-2)/4} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y+A_0^2\right)} I_{n/2-1}\left(\sqrt{Y}\,\frac{A_0}{\sigma^2}\right) \qquad (6)$$

$$p(x=1|Y) = p(Y|x=1) =$$

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{Y}{A_1^2}\right)^{(n-2)/4} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y+A_1^2\right)} I_{n/2-1}\left(\sqrt{Y}\,\frac{A_1}{\sigma^2}\right) \qquad (7)$$

Ainsi, en utilisant la règle de Bayes et en effectuant le rapport logarithmique des valeurs (6) et (7), les LRV initiaux peuvent être calculés, en fonction des paramètres A_i et σ^2 :

$$LRV = \frac{A_1^2 - A_0^2}{2\sigma^2} + (n/2-1)\ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right) + \ln\left(\frac{I_{n/2-1}\left(\sqrt{Y}\,\frac{A_0}{\sigma^2}\right)}{I_{n/2-1}\left(\sqrt{Y}\,\frac{A_1}{\sigma^2}\right)}\right) \qquad (8)$$

Dans le cadre de communications optiques, les performances sont généralement évaluées en fonction du facteur de qualité Q, plutôt que du rapport signal à bruit optique. Le facteur de qualité est défini dans le cas général par :

$$Q = \frac{\overline{I_1} - \overline{I_0}}{\sigma_1 + \sigma_0} \qquad (9)$$

Avec $\overline{I_i}$ et σ_i^2 pour i=0 ou 1, respectivement les moyennes et variances correspondant à la variable chi-2 résultante pour une donnée émise $d=i$. Ces paramètres s'expriment en fonction de la variance du bruit BABG σ^2 avant photodétection ainsi que de l'amplitude du signal A_i :

$$\begin{cases} \overline{I_i} = n\sigma^2 + A_i^2 \\ \sigma_i^2 = 2n\sigma^4 + 4\sigma^2 A_i^2 \end{cases} \qquad (10)$$

Le facteur de qualité peut donc s'exprimer en fonction des paramètres physiques du système :

$$Q = \frac{A_1^2 - A_0^2}{\sqrt{2n}\,\sigma^2\left(\sqrt{1+2\,{A_1^2}/{n\sigma^2}} + \sqrt{1+2\,{A_0^2}/{n\sigma^2}}\right)} \qquad (11)$$

Les résultats suivants sont représentés en fonction de Q en dB défini par $Q(dB) = 20\log(Q)$.

Dans le cas d'un canal BABG, $I_1=I$, $I_0=0$, $\sigma_1=\sigma_0=\sigma$. Ainsi, la définition du facteur de qualité correspond à la définition du rapport signal à bruit:

$$S/B = 10\log\left(\frac{I}{2\sigma}\right)^2 = Q(dB)$$

Dans le cas particulier où A_0=0 (chi-2 centré), le LRV est obtenu à partir de (7) et de :

$$p(x=0|Y) = p(Y|x=0) =$$

$$\frac{1}{2^{n/2}\sigma^n (n/2-1)!} Y^{n/2-1} e^{-\frac{Y}{2\sigma^2}} \qquad (12)$$

Il se simplifie alors en :

$$LRV = \frac{A_1^2}{2\sigma^2} + \ln\left(\left(\frac{\sqrt{Y}\cdot A_1}{2\sigma^2}\right)^{n/2-1} \frac{1}{(n/2-1)!\,I_{n/2-1}\left(\frac{A_1}{\sigma^2}\sqrt{Y}\right)}\right) \qquad (13)$$

Cette expression est équivalente à celle obtenue pour une statistique chi-2 centrée [3] avec les notations $Y=x$, $n=2M$, $A_1^2=2E_s$, $\sigma^2=N_0/2$.

4.2 Etude des performances

Dans un premier temps, afin d'évaluer le gain en performance apporté par le codage correcteur d'erreurs, nous comparons les résultats en TEB obtenus dans les cas codés et non codés, pour un canal optique à statistique chi-2 et un canal optique classique de type BABG. La figure 2 représente les TEB obtenus par simulation avec un code LDPC(6176,5983) construit avec la méthode BIBD [7]. Pour le canal à statistique chi-2, deux cas ont été reportés : EX=10dB et EX infini (c'est-à-dire A_0=0).

Avec une représentation en fonction de Q, on remarque que pour les cas codés et non codés, plus EX est faible plus les performances sont dégradées et s'approchent de celles obtenues sur canal BABG. En effet, quand EX tend vers 0 (dB), les variances σ_1^2 et σ_2^2 se rapprochent, ce qui correspond au cas symétrique comme dans le cas BABG.

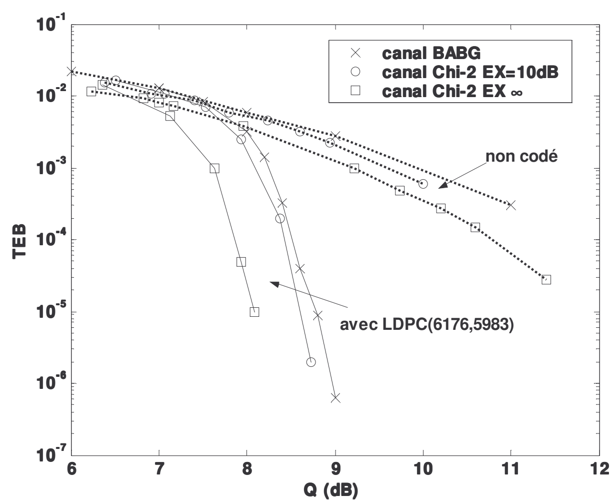

Fig. 2. Performances sur canal chi-2 et sur canal BABG sans codage et avec le code LDPC (6176,5983), avec le calcul du LRV adapté au canal chi-2 (8) et (13)

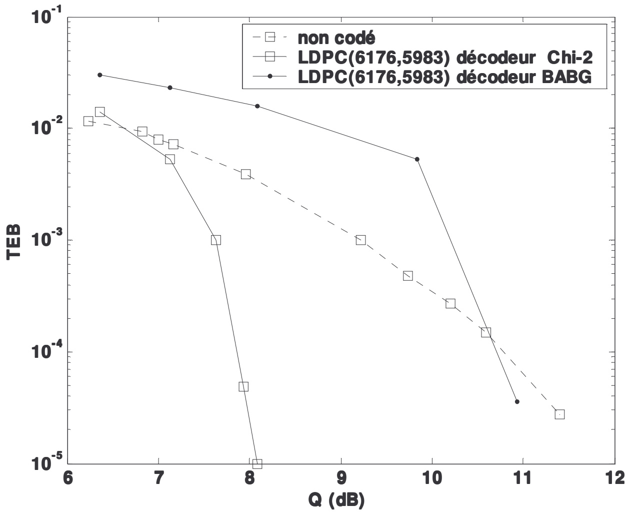

Fig. 3. Performances avec LDPC (6176,5983), avec calcul du LRV adapté au canal chi-2, et avec la formule classique BABG

De plus, les résultats de simulations montrent que le pouvoir de correction du code est conservé sur canal chi-2 (par rapport au canal BABG) puisque les courbes sont décalées de manière constante sur l'axe Q dans les cas codé et non codé. Ceci généralise le fait que le code LDPC peut être choisi en supposant une statistique BABG, résultat présenté dans [3] dans le cas particulier d'un canal chi-2 centré (*EX* infini).

De plus, afin d'évaluer la pertinence du modèle chi-2 non centré pour obtenir des performances optimales, nous avons effectué des simulations de la chaîne de transmission codée sur un canal chi-2. Les LRV sont initialisés à l'aide des expressions établies pour le canal chi-2 (8) ou (13) d'une part, et en utilisant l'initialisation classique BABG (5) d'autre part.

La figure 3 représente les TEB obtenus sur un canal à statistique chi-2 avec ces deux types de décodage (adapté et avec la formule classique BABG). On peut en déduire qu'il est important de prendre en compte la statistique du canal au niveau du récepteur. En effet, lorsque le décodeur est basé sur une statistique BABG, les performances sont fortement dégradées. Par exemple, tandis que le code commence à corriger à partir d'un TEB non codé de 10^{-2} avec l'adaptation du calcul du LRV, il ne corrige qu'à partir de 10^{-4} avec un décodage non adapté. De plus, un TEB de 10^{-5} est obtenu pour Q=11dB avec un décodeur basé sur une statistique BABG tandis qu'un facteur de qualité de 8dB est suffisant dans le cas d'un décodeur adapté.

5 Conclusions

Dans cette étude, l'expression analytique des rapports de vraisemblance nécessaires pour initialiser le décodage itératif des codes LDPC a été obtenue dans le cas d'un canal optique à statistique chi-2 non centrée. En effet, il a été validé par comparaison à des résultats de simulations physiques de réseau optique, que cette statistique traduit plus fidèlement la distribution du signal reçu après photodétection que le modèle BABG classiquement envisagé.

Les résultats de simulations ont montré que, sous réserve d'adapter le calcul des LRV dans l'algorithme de décodage, les codes LDPC possèdent un pouvoir de correction aussi satisfaisant que sur un canal BABG. De plus, nous avons mis en évidence par simulation, l'importance de tenir compte de la spécificité du canal dans l'algorithme de décodage afin d'obtenir un pouvoir de correction optimal.

6 Références

[1] G.P. Agrawal. Fiber-Optics Communication Systems. Wiley-Interscience, 1992.

[2] I.B. Djordjevic, S. Sankaranarayanan, S.K. Chilappagari, B. Vasic, "Low-density parity-check codes for 40-gb/s optical transmission systems", IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, vol. 12, n°4, pp. 555 – 562, July-Aug. 2006.

[3] Jing Li, et Al., "On the bit-error rate of product accumulate codes in optical fiber communications", IEEE Journal of Lightwave Technol., vol.22, n°2, pp. 640 - 646, Feb. 2004.

[4] D. Fafchamps, G. Rodriguez, P. Gallion, "Chi-square statistical models as a good base for the optimization of optical communication systems", Photonics in Switching 2008, Aug. 4-7, 2008.

[5] D. MacKay, "Information Theory, Inference and Learning Algorithms", Cambridge University Press 2003.

[6] D.J.C.MacKay "Good error-correcting codes based on very sparse matrices", *IEEE on IT,* vol 45,n°2,pp.399-431, Mar.1999.

[7] B. Amar et Al., "Construction of low-density parity-check codes based on balanced incomplete block designs," *IEEE Transactions on Information Theory,* vol.50, n°6, pp 1257-1268, 2004.

[8] J.G. Proakis, "Digital Communications", fourth ed., McGraw-hill, 2000.

[9] D. Chiaroni, et Al., "Cascadability issues in a Multi-Service Optical Packet Ring Network", Photonics in Switching, 2007, Aug. 2007, pp. 25-26.

[10] Sun and Kumar, "FPGA Implementation of a Generalized Decoder for Structured LDPC Codes", International Conference on Field Programmable Technology, 2004.