

# Détection-estimation de processus Bernoulli-gaussien-généralisés à la présence d'un bruit coloré non-gaussien

Akram BELGHITH<sup>1</sup>, Christophe COLLET<sup>1</sup>, Fabien SALZENSTEIN<sup>2</sup>, Steven LE CAM<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Sciences de l'Images, de l'Informatique et de la Télé-détection  
Pôle API Bd Sébastien Brant BP 10413 67412 Illkirch Cedex France

<sup>2</sup>Institut d'Électronique du Solide et des Systèmes  
23, rue du Loess - BP 20 CR - F-67037 STRASBOURG Cedex 2, France  
akrambelghith@gmail.com, Christophe.Collet@ensps.u-strasbg.fr  
salzenst@iness.c-strasbourg.fr, lecam@ensps.u-strasbg.fr

**Résumé** – Dans ce papier, nous abordons le problème de restauration des coefficients en ondelettes des crépitations considérés comme étant un signal impulsionnel auquel surajoute un bruit coloré. Cette tâche exige l'accès à la densité de probabilité multivariée afin de pouvoir calculer la fonction de vraisemblance souvent inaccessible dans le cas non gaussien. Pour cela, la distribution gaussienne multivariée est souvent utilisée même si l'hypothèse de la gaussianité n'est pas vérifiée. Dans ce travail, nous proposons une nouvelle approche basée sur la théorie des copules pour le calcul de la densité de probabilité gaussienne généralisée multivariée qui nous permet de gérer la non gaussianité du bruit coloré.

**Abstract** – In this paper we address the problem of restoration of the wavelet coefficients related to crackle assumed to be a pulse respiratory signal for which a non-gaussian colored noise is added. This task, requiring multivariate probability density computations for the data likelihood term, often faces with the lack of analytical multidimensional expressions in the non-gaussian case. In this work, we propose a new approach based on copula theory to compute multivariate generalized Gaussian marginals to deal with the non-gaussianity of the wavelet coefficients of the colored added noise.

## 1 Introduction

Dans ce papier, nous présentons un système de déconvolution impulsionnelle des coefficients en ondelettes des crépitations à partir d'un enregistrement d'un son caractéristique des symptômes de la maladie pulmonaire Broncho-Pneumopathie Chronique Obstructive (BPCO). Ce son est composé de crépitations et du son respiratoire normal considéré ici comme un bruit additif. Les crépitations peuvent être caractérisés par un son aigu de très courte durée. Notre but est de pouvoir les dénombrer et estimer leurs amplitudes et leur densité d'apparition pour quantifier la gravité de la BPCO. Pour ce faire, nous proposons une méthode de déconvolution impulsionnelle. En effet, une source ponctuelle est l'idéalisation d'une source physique de durée très courte qui se manifeste dans le signal observé sous la forme d'une signature ayant subi les différentes transformations de la source dans son ensemble. Dans ces conditions, les seules caractéristiques du signal attribuables à la signature de la pathologie sont sa position et son amplitude [1]. Dans un tel contexte, la déconvolution impulsionnelle vise à estimer simultanément la position et l'amplitude de chaque impulsion.

Il existe dans la littérature plusieurs méthodes de déconvolution impulsionnelle comme le filtrage adapté, qui est méthode satisfaisante uniquement lorsque les impulsions sont déterministes et bien séparées les unes des autres. Une seconde famille de méthodes de déconvolution utilise un cadre bayésien en modélisant la séquence des impulsions par un processus

Bernoulli-gaussien (BG). L'intérêt d'une telle approche réside dans sa capacité à prendre en compte les informations apportées par les mesures et les informations *a priori* dont on dispose. L'adéquation entre les paramètres estimés et le modèle est décrit grâce à une fonction de vraisemblance qui doit être maximisée. Dans notre cas, nous réalisons une transformation du signal acoustique en paquets d'ondelettes qui se sont révélés être plus adaptés à caractériser en temps et en fréquence les propriétés du signal. Une simple étude nous montre que les coefficients en ondelettes des crépitations et du son respiratoire normal ne suivent pas une loi gaussienne, hypothèse de base des méthodes de déconvolution BG, mais une loi gaussienne généralisée. En outre, l'hypothèse d'un bruit gaussien, blanc et stationnaire n'est pas vérifiée en pratique sur les signaux pulmonaires acquis. Les deux sons, le son respiratoire normal et les crépitations, sont le résultat de la circulation de l'air dans les poumons qui ont donc subi des transformations que nous modélisons grâce à deux filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF). De ce fait, le bruit n'est plus un bruit blanc mais un bruit coloré.

Une généralisation des méthodes de déconvolution BG n'est cependant pas évidente puisque l'expression de la loi gaussienne généralisée (GG) multivariée est indispensable pour le calcul de la fonction de vraisemblance et que cette expression analytique n'existe pas. Pour contourner ce problème, nous utilisons la théorie des copules permettant l'accès à une expres-

sion de la loi GG multivariée modélisant correctement la dépendance entre les différentes observations.

Cet article comporte quatre parties. Dans un premier temps, nous présentons le modèle de l'observation. Ensuite, nous présentons la théorie de copules ainsi que la loi gaussienne généralisée multivariée, puis nous développons la méthode de déconvolution dans une troisième partie, la quatrième partie, quant à elle, est consacrée aux résultats de la déconvolution obtenus sur les signaux synthétiques et réels.

## 2 Modèle de l'observation

Désignant par  $\mathbf{y} = [y(k)]$  les coefficients d'ondelettes du son (BPCO), où  $k \in \{1, \dots, L\}$  et  $L$  représente la longueur du signal, par  $\mathbf{r} = [r(k)]$  les coefficients en ondelettes des crépitants, par  $\mathbf{b} = [b(k)]$  le bruit et par  $h$  la réponse impulsionnelle du filtre de convolution de taille  $N$ . L'expression de  $\mathbf{y}$  est donnée par :

$$y(k) = \sum_{n=1}^K h(k-n) \times r(k) + b(k). \quad (1)$$

Pour simplifier le traitement nous ne à considérons que la version matricielle. La nouvelle expression de  $\mathbf{y}$  est :

$$\mathbf{y} = H\mathbf{r} + \mathbf{b} \quad (2)$$

Notons que le bruit est considéré ici comme étant un bruit coloré gaussien généralisé centré de matrice de covariance  $\Sigma_b$  et de paramètre de forme  $\alpha_b$ . L'expression de la densité de probabilité gaussienne généralisée est donnée par l'équation suivante :

$$f(y; \alpha, \sigma, \mu) = \frac{\eta(\alpha)\alpha}{[2\Gamma(1/\alpha)]} \exp[-(\eta(\alpha)|y - \mu|)^\alpha] \quad (3)$$

où  $\eta(\alpha) = \left[ \frac{\Gamma(3/\alpha)}{\sigma^2\Gamma(1/\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}}$ ,  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$  et  $\mu, \sigma, \alpha$  sont la moyenne, l'écart type et le paramètre de forme.

La séquence impulsionnelle  $\mathbf{r}$ , quant à elle, est modélisée par un processus Bernoulli gaussien généralisé centré. En d'autres termes, les instants d'apparition des impulsions sont considérés comme étant une séquence de Bernoulli de paramètre  $\lambda$  et les amplitudes de ces impulsions suivent une loi gaussienne généralisée centrée d'écart type  $\sigma_r$  et de paramètre de forme  $\alpha_r$ .

Une façon de réduire le nombre de faux positifs consiste à séparer la procédure de détection des impulsions de celle d'estimation des amplitudes. Pour ce faire, nous définissons une variable auxiliaire  $\mathbf{q}$  pour chaque échantillon du signal telle que :

$$Pr\{(q(k))\} = \begin{cases} 1 - \lambda & q(k) = 0 \\ \lambda & q(k) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Chaque variable  $q$  est alors binaire pour contrôler la présence ( $q = 1$ ) ou non ( $q = 0$ ) d'une impulsion. L'objectif de la déconvolution revient alors à estimer les positions indiquées par ( $q = 1$ ) et l'amplitude de chaque impulsion. Une façon de procéder consiste à maximiser les deux fonctions de vraisemblance de  $P(\mathbf{q}/\mathbf{y})$  et  $P(\mathbf{r}/\mathbf{q}, \mathbf{y})$  définies à l'aide de la densité de probabilité de la loi GG multivariée dont on ne dispose pas de l'expression analytique. Une manière élégante permettant l'accès à cette expression est la théorie des copules [2].

## 3 La densité GG multivariée

Pour traiter le problème de déconvolution sous forme matricielle, nous aurons besoin de l'expression analytique de la densité de probabilité GG multivariée. Généralement, dans le cas non-Gaussien, le calcul de cette distribution multivariée n'est pas trivial et on assume que les variables aléatoires sont indépendantes. La fonction de la vraisemblance correspond alors au produit des marginaux :

$$\forall \mathbf{z} = (z(1), \dots, z(N)) \in \mathfrak{R}^N \quad f(\mathbf{z}) = \prod_{n=1}^N f(z(n)) \quad (5)$$

Si l'hypothèse de l'indépendance n'est pas vérifiée, on procède souvent par une étape de décorrélation en utilisant la méthode ICA (Independent Component Analyse) [3]. Cependant, ce problème peut être traité différemment en modélisant la dépendance des sources par la théorie des copules.

En effet, une copule est une fonction qui relie une fonction multivariée à un ensemble de fonctions de distributions marginales. Les copules nous permettent d'extraire la structure de dépendance d'une fonction de distribution conjointe. Ce faisant, on arrive à séparer la structure de dépendance à partir des fonctions de distributions marginales. Une copule  $d$ -dimensionnelle est une fonction  $C$  de  $I^d = [0, 1]^d$  vers  $I = [0, 1]$  tel que :

$$F(y^1, \dots, y^d) = C(F^1(y^1), \dots, F^d(y^d)) \quad (6)$$

avec  $y^1, \dots, y^d$  sont des variables aléatoires dont la fonction de répartition jointe est  $F$  et les fonctions de répartition marginales sont respectivement  $F^1, \dots, F^d$ . Ainsi, la fonction copule décrit comment la fonction multivariée  $F()$  est dérivée ou couplée à des fonctions de distributions marginales  $F^1(), F^2(), \dots, F^d()$ .

Dans le cas où ces distributions marginales sont continues,  $C$  est alors unique. De plus, quand  $C$  est différentiable, l'expression de la densité de la copule est donnée par :

$$f(y^1, \dots, y^N) = f^{[1]}(y^1) \times \dots \times f^{[N]}(y^N) \times \dots \times c(F^{[1]}(y^1), \dots, F^{[N]}(y^N)) \quad (7)$$

où  $f^{[j]}(y^j)$  est la densité de probabilité correspondant à  $F^{[j]}(y^j)$  et  $c = \partial C / (\partial F^{[1]} \dots \partial F^{[N]})$  est la densité de la copule. La densité de la copule gaussienne  $c_G$  est donnée par [4, 5] :  $\forall \mathbf{y} = (y^1, \dots, y^N) \in \mathfrak{R}^N$  :

$$c_G(\mathbf{y}, R) = |R|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{\tilde{\mathbf{y}}^T (R^{-1} - I) \tilde{\mathbf{y}}}{2} \right] \quad (8)$$

où  $\tilde{\mathbf{y}} = (\Phi^{-1}(y^1), \dots, \Phi^{-1}(y^N))^T$  avec  $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition gaussienne,  $R$  est la matrice de corrélation et  $I$  est la matrice identité de taille  $N \times N$ . Si on considère que les éléments du vecteur d'observation suivent la même loi, l'expression de la densité de la copule gaussienne, utilisant la matrice de covariance, est donnée par :

$$\forall \mathbf{z} = (z(1), \dots, z(N)) \in \mathfrak{R}^N : \\ c_G(\mathbf{z}, \Sigma) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{\prod_i \text{diag}(\Sigma^{-1})_{(i,i)}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left[ -\frac{\tilde{\mathbf{z}}^T (\Sigma^{-1} - \text{diag}(\Sigma^{-1})) \tilde{\mathbf{z}}}{2} \right] \quad (9)$$

où  $\Sigma$  est la matrice de covariance.

Pour modéliser la densité de la loi GG multivariée, nous utilisons l' Eq.( 7) avec la densité de la couple gaussienne Eq. (9) et la loi gaussienne généralisée Eq.( 3).

Finalement, la loi GG multivariée est donnée par :

$$f(\mathbf{y}; \alpha, \sigma_y, \mu_y, \Sigma) = \prod_{i=1}^N f(y(i); \alpha, \sigma_y, \mu_y) c_G(\mathbf{y}, \Sigma) \quad (10)$$

## 4 La détection des pics

Pour la détection des positions des coefficients en ondelettes des crépitants, nous maximisons la fonction de vraisemblance d'expression :

$$\hat{\mathbf{r}} = \underset{\mathbf{r}}{\operatorname{argmax}} [Pr(\mathbf{r}/\mathbf{z}, \hat{\mathbf{q}})] \quad (11)$$

Pour le calcul de  $P(\mathbf{y}/\mathbf{q})$ , nous supposons que  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{b}$  sachant  $\mathbf{q}$  suivent une loi gaussienne généralisée. Toutefois, il n'existe aucune expression analytique de la somme de deux GG [6]. Pour contourner ce problème nous utilisons des intégrations numérique pour accéder à une valeur estimée de  $P(\mathbf{y}/\mathbf{q})$ . En effet, nous savons que le produit de convolution de deux ou plusieurs variables aléatoires n'est que la distribution de la somme de ces variables aléatoires. Cette approximation a été adoptée dans plusieurs travaux [7].

Comme les  $q(k)$  sont supposés indépendants, on a d'après (4) :

$$Pr(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^N Pr(q(i)) = \lambda^{N_q} (1 - \lambda)^{N - N_q} \quad (12)$$

où  $N_q$  est le nombre des éléments non nuls dans  $\mathbf{q}$ . Nous pouvons facilement constater que les éléments de  $\mathbf{q}$  possèdent des interactions non linéaires dans  $Pr(\mathbf{q}/\mathbf{z})$ . De ce fait, la seule manière de maximiser l'expression est de calculer la vraisemblance pour chaque séquence  $\mathbf{q}$  ( $2^N$  possibilités)[8]. Pour cela, nous avons opté pour le choix de la méthode SMLR permettant une convergence rapide de l'algorithme. En effet, l'algorithme SMLR est un algorithme itératif qui compare la vraisemblance de deux séquences : la séquence référence  $\mathbf{q}_r$  et la séquence test  $\mathbf{q}_t$  et qui diffèrent uniquement par un seul élément à chaque itération. La stratégie de la selection consiste à choisir comme nouvelle séquence référence celle qui maximise le critère suivant :

$$C_{r,t} = \frac{Pr(\mathbf{q}_t/\mathbf{z})}{Pr(\mathbf{q}_r/\mathbf{z})} \underset{q_r}{\overset{q_t}{\geq}} 1 \quad (13)$$

qui est équivalent à :

$$C_{r,t} = \log \left( \frac{Pr(\mathbf{q}_t/\mathbf{z})}{Pr(\mathbf{q}_r/\mathbf{z})} \right) \underset{q_r}{\overset{q_t}{\geq}} 0 \quad (14)$$

L'expression de  $\mathbf{q}_t$  à la  $i$ -ème itération est donnée par :

$$q_t(k) = \begin{cases} 1 - q_r(i) & i = k \\ q_r(i) & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (15)$$

Finalement, la nouvelle séquence référence à l' $i$ -ème itération est donnée par :

$$\mathbf{q}_r = \begin{cases} \mathbf{q}_r & \text{if } C_{r,t} < 0 \\ \mathbf{q}_t & \text{if } C_{r,t} > 0 \end{cases} \quad (16)$$

## 5 Estimation des amplitudes

La procédure de détection des pics consiste à maximiser la fonction de vraisemblance, l'estimée de  $\mathbf{r}$  a pour expression :

$$\hat{\mathbf{r}} = \underset{\mathbf{r}}{\operatorname{argmax}} [Pr(\mathbf{r}/\mathbf{z}, \hat{\mathbf{q}})] \quad (17)$$

où

$$Pr(\mathbf{r}/\mathbf{z}, \hat{\mathbf{q}}) \propto Pr(\mathbf{z}/\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) Pr(\mathbf{r}/\hat{\mathbf{q}}). \quad (18)$$

Comme les coefficients de  $\mathbf{r}$  sachant  $\hat{\mathbf{q}}$  sont indépendants, on a :

$$Pr(\mathbf{r}/\hat{\mathbf{q}}) = \prod_{\substack{i=1 \\ \hat{q}(i)=1}}^N \frac{\eta(\alpha_r)\alpha_r}{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha_r}\right)\right]} \exp[-(\eta(\alpha_r)|r(i)|)^{\alpha_r}] \quad (19)$$

où  $\sigma_r$  est l'écart type et  $\alpha_r$  est le paramètre de forme de  $\mathbf{r}$ . D'après l'équation (2) on a :

$$Pr(\mathbf{z}/\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) = \prod_{i=1}^N \frac{\eta(\alpha_b)\alpha_b}{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha_b}\right)\right]} \exp[-(\eta(\alpha_b)|z(i) - (H\mathbf{r})(i)|)^{\alpha_b}] \times c_G(\mathbf{z}, \Sigma_b) \quad (20)$$

En effet :

$$E_{\mathbf{z}/\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}}[\mathbf{z}] = E_{\mathbf{z}/\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}}[H\mathbf{r} + \mathbf{b}] = H\mathbf{r} \quad (21)$$

et

$$E_{\mathbf{z}/\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}}[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] = E_{\mathbf{z}/\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}}[(H\mathbf{r} + \mathbf{b})(H\mathbf{r} + \mathbf{b})^T] = \Sigma_b \quad (22)$$

Étant Données l' Eq. (19)et (20), nous arrivons à optimiser l' Eq.(11).

## 6 Résultats et discussion

Nous testons notre méthode de déconvolution sur un signal synthétique modélisant les coefficients en ondelettes d'un son BPCO. Pour ce faire, nous avons généré une séquence de Bernoulli gaussien généralisé de paramètre ( $\lambda = 0.05$ ,  $L = 500$ ,  $\sigma_r = 0.1$ ,  $\alpha_r = 1$ ) où  $\sigma_r$  et  $\alpha_r$  sont les paramètres de la loi GG. Ensuite, cette séquence est convoluée à l'aide d'un filtre GG présenté dans Fig. 1 (modélisant la réponse impulsionnelle du crépissant dans la pratique) auquel un bruit GG coloré de paramètre  $\alpha_r = 1.4$  est ajouté. Le signal synthétique est présenté dans Fig. 2.

Pour l'estimation des hyperparamètres, nous utilisons la méthode présentée dans [9]. Notons qu'une méthode MCMC n'a pas été retenue à cause du temps de calcul prohibitif. Pour prouver la robustesse de notre méthode aux déviations des hyperparamètres de leurs valeurs réelles, nous l'appliquons sur le signal synthétique en modifiant les valeurs des hyperparamètres. Les résultats sont présentés dans Tab. 1. Nous remarquons que la

méthode proposée est robuste aux déviations. Notre méthode notée (M5) est comparée à quatre autres méthodes de déconvolution : algorithme de Viterbi [10] (M1) , filtre récursif (M2), la méthode de déconvolution SMLR-BG (on suppose la gaussianité du bruit et des amplitudes des pics)(M3) et la méthode de déconvolution SMLR-G (processus Bernoulli gaussien avec un bruit coloré) (M4). Les résultats sont présentés dans Tab .2. Nous obtenons le meilleur résultat de déconvolution avec notre méthode qui est présenté par des cercles dans Fig.3. Notons qu’afin de diminuer le temps de calcul, nous avons utilisé les  $\hat{q}$  estimés par (M2) pour l’initialisation de notre méthode. On constate que l’algorithme converge simplement à la troisième itération.

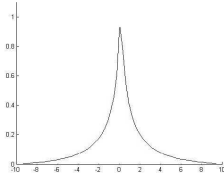


FIGURE 1 – Réponse impulsionnelle du filtre h

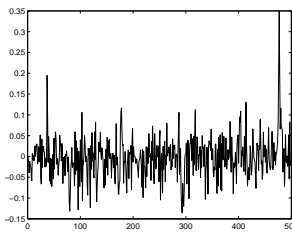


FIGURE 2 – Allure temporelle du signal synthétique (rapport signal bruit est de 9 dB)

$\alpha_r$	$\alpha_b$	$\sigma_r^2$	$\lambda$	nb de détections non restituées
1	1.4	0.1	0.05	3/20
0.91	1.4	0.1	0.05	3/20
1	1.48	0.1	0.05	3/20
1	1.4	0.19	0.05	4/20
1	1.4	0.1	0.09	3/20

TABLE 1 – Nombre de détections non restituées pour différentes valeurs des hyperparamètres

	M 1	M 2	M 3	M 4	M 5
nb de détections non restituées	8/20	7/20	5/20	5/20	3/20

TABLE 2 – Nombre de détections non restituées pour différentes méthodes de déconvolution

Nous testons enfin la méthode sur les coefficients en ondelettes d’un son (BPCO). Le résultat de la déconvolution est présenté dans Fig. 4. Les cercles présentent les positions est les amplitudes des coefficients en ondelettes des crépitants. Cette estimation offre dès lors la possibilité de quantifier le développement de la BPCO à travers la densité d’apparition et les amplitudes des pics dans un cadre gaussien généralisé.

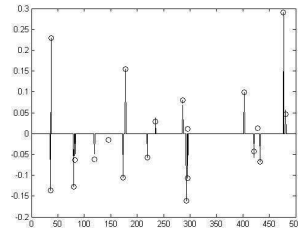


FIGURE 3 – Résultat de déconvolution du signal synthétique.

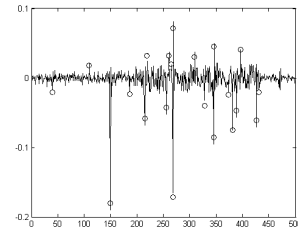


FIGURE 4 – Résultat de déconvolution du signal réel.

## 7 conclusion

Nous avons traité dans ce papier le problème de la déconvolution d’un processus BGG en présence d’un bruit GG coloré par la maximisation de la fonction de la vraisemblance. Nous avons proposé également une nouvelle méthode de calcul de la loi GG multivariée en utilisant la théorie des copules. Cette approche est théoriquement validée et nous travaillons maintenant à la valider sur d’autres signaux réels en collaboration avec les médecins.

## Références

- [1] J. Idier, *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*, Hermès Science Publication, Paris, 2001.
- [2] R.B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer Science+ Business Media, Inc., 2006.
- [3] I. Dagher and R. Nachar, “Face recognition using IPCA-ICA algorithm,” *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 28, no. 6, pp. 996–1000, 2006.
- [4] K. K. Phoon, “Application of fractile correlations and copulas to non-gaussian random vectors,” in *Proceedings, Second International ASRA-Net(Network for Integrating Structural Safety, Risk, and Reliability) Colloquium*, Barcelona, Spain, July 2004.
- [5] N. Brunel and W. Pieczynski, “Unsupervised signal restoration using copulas and pairwise Markov chains,” Saint-Louis Missouri, 2003, IEEE Workshop on Statistical Signal Processing.
- [6] S. Yuan-Tong Q. Zhao, L. Hong-Wei, “On the sum of generalized gaussian random signals,” 2004.
- [7] M. Akkouchi, “On the convolution of gamma distributions,” *Soochow Journal of Mathematics*, vol. 2, pp. 205–211, 2005.
- [8] J. M. Mendel J. J. Kormylo, “Maximum likelihood detection and estimation of bernoulli-gaussian processes,” *IEEE transactions on information theory*, vol. 3, pp. 482–489, May 1982.
- [9] P.J. Huber, J. Wiley, and W. InterScience, *Robust statistics*, Wiley New York, 1981.
- [10] Chong-Yung Chi and J. Mendel, “Viterbi algorithm detector for bernoulli-gaussian processes,” *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 33, no. 3, pp. 511–519, Jun 1985.