

Détection de signaux non stationnaires par un graphe de Markov local en temps et sélectif en fréquence

Steven LE CAM¹, Christophe COLLET¹, Fabien SALZENSTEIN²

¹LSIIT UMR CNRS 7005, Université de Strasbourg

²Laboratoire INESS, UMR CNRS 7163, Université de Strasbourg
lecama@lsiit.u-strasbg.fr, collet@lsiit.u-strasbg.fr,
fabien.salzenstein@iness.c-strasbourg.fr

Résumé – Nous nous intéressons dans cet article à l'extraction de comportements statistiques multirésolutions pour la caractérisation et la segmentation de signaux transitoires dans un contexte fortement bruité. Ces signaux de courte durée possèdent des composantes fréquentielles très localisées et fortement variables. Le choix du compromis temps/fréquence pour l'étude de ces signaux est donc crucial. Nous nous plaçons de ce fait dans le domaine transformé en paquets d'ondelettes, permettant une analyse fine des variations fréquentielles du signal pour diverses résolutions temps/fréquences. Nous proposons un nouveau modèle d'arbre de Markov adapté à la décomposition en paquets d'ondelettes afin d'intégrer l'information multirésolution d'échelle en échelle dans un objectif de segmentation. Nous formulons ce problème de segmentation comme un problème inverse et nous inférons sur les paramètres de notre modèle de Markov à l'aide de la théorie de Bayes. Nous validons le comportement de cette approche sur des signaux synthétiques avec différents rapports signal à bruit.

Abstract – We deal in this paper with the extraction of multiresolution statistical signatures for the characterization of transient signals in strongly noisy contexts. These short-time signals have sharp and highly variable frequency components. The time/frequency window to chose for our analysis is then a major issue. We have chosen the Wavelet Packet Transform due to its ability to provide multiple windows analysis with different time/frequency resolutions. We propose a new oriented Hidden Markov Tree dedicated to the tree structure of the Wavelet Packet Transform, which offers promising statistical characterization of time/frequency variations in a signal, by exploiting several time/frequency resolutions. This model is exploited in a bayesian context for the segmentation of signals containing transient components. We demonstrate the efficiency of our method on synthetic signals with several Signal to Noise Ratio.

1 Introduction

Une grande variété de signaux réels auxquels nous sommes confrontés possèdent des comportements statistiques variés, parfois discriminants, selon la résolution temps/fréquence à laquelle ils sont observés. Ces caractéristiques ont été observées pour de nombreux processus physiques tels que les phénomènes météorologiques [5], pour une large classe d'images naturelles [9], ou encore pour l'étude de signaux en cardiologie ou en pneumologie [2]. Nous nous plaçons dans des situations extrêmes où les signaux à caractériser sont hautement transitoires à la fois en temps et en fréquence, et dans des contextes fortement bruités. Le choix de la résolution temps/fréquence est primordial afin de pouvoir caractériser et détecter de telles variations. Nous nous sommes naturellement tournés vers les décompositions sur bases d'ondelettes, permettant l'étude de ces signaux à différentes échelles de temps et de fréquence et possédant des propriétés de parcimonie utiles afin de dégager les composantes d'intérêt du signal. Nous introduisons dans cet article un nouveau graphe de dépendance adapté à la représentation en arbre induite par la décomposition en paquets d'ondelettes, afin d'exploiter l'ensemble de l'information observé à diverses résolutions temps/fréquences. Learned et Willsky se sont intéressés à la détection de transitoires dans le domaine des paquets d'ondelettes, en proposant une méthode basée sur l'extraction de caractéristiques liées à l'énergie du signal [4]. Nous souhaitons également exploiter les bonnes propriétés de diffusion de l'énergie appar-

tée par cette représentation, en modélisant les relations entre coefficients de paquets d'ondelettes au travers des échelles. Crouse, Nowak et Baraniuk ont introduit les modèles de Markov cachés adaptés aux arbres de décomposition en ondelettes discrètes pour l'estimation et la détection [1], en permettant ainsi l'intégration de connaissances *a priori* sur les variables du problème, et la possibilité d'accéder aux lois conjointes utiles pour pouvoir inférer sur le modèle. Nous adaptons cette approche à notre modèle de dépendance adapté aux paquets d'ondelettes. L'originalité de notre méthode réside dans l'utilisation de l'ensemble de l'information disponible en exploitant la totalité de l'arbre de décomposition en paquets d'ondelettes dans une bande de fréquence d'intérêt. On cherche à modéliser la *persistence* des coefficients d'une échelle à l'autre de l'arbre de décomposition.

L'article est organisé de la manière suivante : La partie 2 donne quelques rappels sur la décomposition en paquets d'ondelettes et ses propriétés, et présente un nouveau modèle graphique adapté à cette décomposition. La partie 3 pose les hypothèses de Markoviannité et donne les équations *a posteriori* locales en temps permettant l'utilisation du critère MPM (Max Posterior Marginals) pour la décision en chaque nœud de l'arbre, ainsi que notre méthode d'estimation des paramètres du modèle basée sur l'ICE (Iterative Conditional Estimation). Enfin dans la partie 4, cette nouvelle approche est testée sur des signaux synthétiques pour la détection et la segmentation de sons transitoires. Les résultats obtenus semblent très prometteurs.

2 Décomposition en paquets d'ondelettes et graphe de dépendance adapté

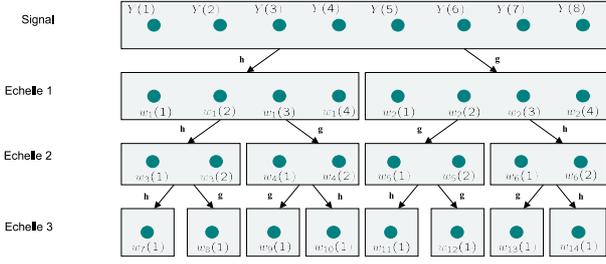


FIGURE 1 – Décomposition en paquets d'ondelettes d'un signal de longueur 8 ($N = 3$)

Les paquets d'ondelettes sont décrits dans [6] et leur principe est illustré sur la figure 1. Partant d'un signal à temps discret $Y(n)$, $n = 1, \dots, 2^N$ (N entier positif) échantillonné à la fréquence F_s , on applique itérativement un filtre passe-bas h , un filtre passe-haut g , puis une décimation d'un facteur 2 pour obtenir un signal d'approximation et un signal de détails. On obtient alors un découpage particulier du plan temps/fréquence à chaque itération, correspondant à une échelle de la décomposition en paquets d'ondelettes. Plus on descend dans les échelles, plus la résolution fréquentielle est favorisée au détriment de la résolution temporelle, comme l'illustre la figure 2.

Cette décomposition implique une relation *quadruplet* entre deux coefficients voisins dans un paquet p et une échelle m donnés, et deux coefficients à l'échelle $m + 1$ situés dans deux paquets voisins p_{g-} et p_{d-} , du fait du recouvrement des pavages temps/fréquences induite par la décomposition en paquets d'ondelettes (voir illustration fig. 2). On oriente ces relations, de sorte que les coefficients dans les paquets fréquentiellement mieux résolus à l'échelle $m + 1$, nommés *formants*¹, engendrent deux coefficients voisins et temporellement mieux résolus à l'échelle m , nommés coefficients *produits*. Ce choix implique de faire l'hypothèse d'indépendance des coefficients *formants* d'un paquet à l'autre (donc d'une bande fréquentielle à l'autre) pour une même échelle, et fait apparaître une dépendance couple intra-échelle entre coefficients *produits*.

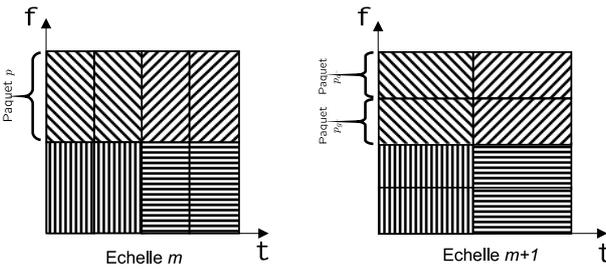


FIGURE 2 – pavage temps/fréquence pour deux échelles voisines m et $m + 1$ où les relations entre coefficients sont mises en évidence.

Ce schéma de dépendance de base entre coefficients, généralisé à l'arbre de décomposition en paquets d'ondelettes, fait ressortir un ensemble de sous-arbres de dépendance associés à chaque coefficient, à

1. A ne pas confondre avec le terme *formants* déjà utilisé en traitement de la parole

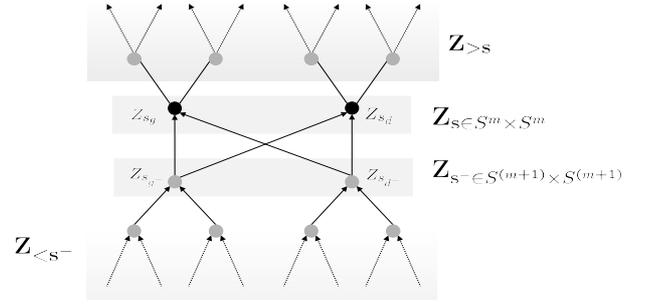


FIGURE 3 – Motif *quadruplet* de base définissant le sous-arbre local $Z_{\{<s-,s-,s-,>s\}}$ associé au couple *produit* Z_s .

partir desquels nous définissons un modèle graphique sur lequel nous appliquons notre méthode de segmentation. Notre méthode s'appuie sur la définition d'un problème inverse : les coefficients de paquets d'ondelettes $\{w_p(n)\}$ prennent leur valeur dans \mathbb{R} et représentent le champ d'observation Y , à partir duquel on cherche à restaurer le champ caché X prenant ses valeurs dans un ensemble à K classes $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$. Chaque site $s \in S$ du graphe global G est associé à un couple état caché/observation $Z_s = \{X_s, Y_s\}$. G est formé de l'ensemble des sous-arbres de dépendance Υ_s associés aux couples *produits* $s = \{s_g, s_d\}$. Les sites $s^- = \{s_{g-}, s_{d-}\}$ font références aux couple de sites *formants* à l'origine des sites *produits* $s = \{s_g, s_d\}$. $> s$ désigne l'ensemble des sites *formés* par les sites produits s , et $< s$ désigne l'ensemble des sites à l'origine du couple *formant* s^- . On note S^m l'ensemble des sites du graphe à l'échelle m . Ainsi, on note S^r l'ensemble des sites du graphe G à la racine, et S^f l'ensemble des sites feuilles du graphe G . Le motif *quadruplet* de base qui sous-tend les arbres de dépendance est représenté sur la figure 3, et sa généralisation à l'ensemble de l'arbre donne naissance à notre modèle graphique global orienté G illustré figure 4.

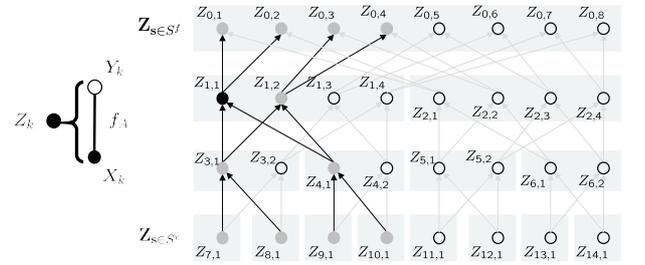


FIGURE 4 – Graphe de dépendance global orienté G , mise en évidence du sous-arbre local $\Upsilon_{\{\{1,1\},\{1,2\}\}}$ associé au couple de sites *produits* $\{\{1,1\},\{1,2\}\}$.

3 Hypothèse Markovienne et Segmentation Bayésienne

On montre que la distribution conjointe $P(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ admet une factorisation récursive et que G admet de fait la propriété globale de Markov sur les graphes orientés. On émet l'hypothèse classique d'indépendance des observations Y conditionnellement aux états cachés X (l'attache aux données se note $f_A = P(Y_s|X_s)$). $\pi(X_s \in S^r)$ définit la loi *a priori* sur les éléments à la racine du graphe. On montre que les variables cachées *produits* \mathbf{X}_s sont indépendantes sachant leurs

variables cachées *formantes* \mathbf{X}_{s^-} , ce qui permet de définir $a_{\{i,j\},k}$ la loi de transition ascendante sur le graphe entre les variables *formantes* $\mathbf{X}_{s^-} = \{\omega_i, \omega_j\}$ et le site produit associé $X_s = \{\omega_k\}$. On définit ainsi un graphe de Markov caché homogène avec indépendance des observations, que l'on note GMCwp-IN. Les lois *a posteriori* sur cet arbre sont accessibles, ce qui offre la possibilité de développer une segmentation bayésienne sur notre modèle et d'utiliser l'algorithme du MPM (Mode of Posterior Marginals) pour la prise de décision sur les éléments *produits* du modèle (c'est à dire $S \setminus S^r$: l'ensemble S amputé des sites racines S^r).

3.1 Probabilités *a Posteriori*

Soit $\{\mathbf{Y}_{\geq s}\}_{s \in \mathbf{s}} \subset \mathbf{Y}_s$ les observations montantes et $\{\mathbf{Y}_{\leq s}\}_{s \in \mathbf{s}} \subset \mathbf{Y}_s$ les observations descendantes sur le sous-arbre \mathbf{Y}_s associé au couple *produit* \mathbf{X}_s . $\mathbf{X}_{s^-} = \{X_{sg^-}, X_{sd^-}\}$ est le couple *formant* à l'origine du couple *produit* $\mathbf{X}_s = \{X_{sg}, X_{sd}\}$. Dans la suite, on associera le couple de classes $\{\omega_i, \omega_j\} \in \Omega^2$ avec le couple de variables \mathbf{X}_{s^-} et le couple de classes $\{\omega_k, \omega_l\} \in \Omega^2$ avec le couple de variables \mathbf{X}_s . Les probabilités de transitions de \mathbf{X}_{s^-} vers X_{sg} et X_{sd} s'écrivent alors respectivement $a_{(i,j)k}$ et $a_{(i,j)l}$.

- La passe descendante (de S^f vers S^r) sur notre arbre permet le calcul des lois descendantes partielles gauche et droite $d_{sg^-}(i) = P(x_{sg^-} = \omega_i, \mathbf{Y}_{\geq sg^-})$ et $d_{sd^-}(j) = P(x_{sd^-} = \omega_j, \mathbf{Y}_{\geq sd^-})$ pour chaque couple \mathbf{X}_{s^-} , $s \in S^{m,q}$, $m \in \{r+1, \dots, f\}$, avec q le paquet d'ondelettes considéré à l'échelle m . Ces probabilités sont calculés itérativement sur les échelles $r+1 \leq m \leq f$:

$$d_{sg^-}(i) = f_i^{(m+1, 2q)}(y_{sg^-}) P(x_{sg^-}).$$

$$\sum_{\{k,g,j\}} \frac{a_{(i,j)k} a_{(i,j)l}}{P(x_{sg}) P(x_{sd})} P(x_{sd^-}) d_{sg}(k) d_{sd}(l) \quad (1)$$

$$d_{sd^-}(j) = f_j^{(m+1, 2q+1)}(y_{sd^-}) P(x_{sd^-}).$$

$$\sum_{\{k,l,i\}} \frac{a_{(i,j)k} a_{(i,j)l}}{P(x_{sg}) P(x_{sd})} P(x_{sg^-}) d_{sg}(k) d_{sd}(l) \quad (2)$$

Où $(m+1, 2q)$ et $(m+1, 2q+1)$ sont les paquets *formants* associés au paquet *produit* (m, q) .

- De la même manière, la passe montante sur notre arbre permet le calcul des lois montantes partielles $m_s(k) = P(x_s = \omega_k, \mathbf{Y}_{\leq s})$ associé à chaque nœud $s \in S^{(m,q)}$, pour chaque paquet q à l'échelle $r+1 \leq m \leq f$:

$$m_s(k) = f_k^{(m,q)}(y_s) \sum_{\{i,j\}} a_{(i,j)k} m_{sg^-}(i) m_{sd^-}(j) \quad (3)$$

- Ces passes mènent aux probabilités *a posteriori* en passant par le calcul de la loi jointe *a posteriori* du quadruplet $\{\mathbf{X}_{s^-}, \mathbf{X}_s\}$: $P(\{\mathbf{X}_{s^-}, \mathbf{X}_s\} = \{\omega_i, \omega_j, \omega_k, \omega_l\}, \mathbf{Y}_s)$, pour chaque couple $s \in S \setminus S^r$.

$$P(\{\mathbf{X}_{s^-}, \mathbf{X}_s\}, \mathbf{Y}_s) = \frac{a_{(i,j)k} a_{(i,j)l}}{P(x_{sg}) P(x_{sd})} \cdot m_{sg^-}(i) \cdot m_{sd^-}(j) d_{sg}(k) d_{sd}(l) \quad (4)$$

Après marginalisation et normalisation de (4) on obtient finalement les probabilités *a posteriori* ξ_s ainsi que les probabilités *a posteriori*

jointes $\Phi_s = P(X_s, \mathbf{X}_{s^-} | \mathbf{Y}_s)$ et $\Psi_{s^-} = P(\mathbf{X}_{s^-} | \mathbf{Y}_s)$ pour chaque sommet s du graphe. Ces probabilités sont utilisées dans notre algorithme d'estimation des paramètres.

3.2 Estimation des paramètres

On note $\Theta = \{\Theta_L, \Theta_F\}$ l'ensemble des paramètres à estimer, avec $\Theta_L = \{\Pi, a_{(i,j)k}\}$ les paramètres de loi sur \mathbf{X} , et $\Theta_F = \{\Sigma, A\}$ les paramètres de l'attache aux données (variances Σ et paramètres de forme A). L'estimation se fait à partir de la seule observation \mathbf{Y} . L'algorithme utilisé est l'ICE [7, 8] afin de faciliter le calcul des paramètres d'attache aux données Θ_F pour la loi gaussienne généralisée.

3.2.1 Initialisation : $\Theta^{[0]}$

- Les lois *a priori* à la racine $\Pi = \{\pi_s(k)\}_{s \in S^r, k \in [1..K]}$ et la matrice de transition $a_{(i,j)k}$ sont initialisés de façon déterministe par :

$$\pi_s^{[0]}(k) = \frac{1}{K}, \quad a_{(i,j)k}^{[0]} = \begin{cases} 0.95 & \text{si } i = j \text{ et } k = i \\ 0.05 & \text{si } i = j \text{ et } k \neq i \\ 0.5 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

- Les paramètres de l'attache aux données pour la variance $\Sigma = \{\sigma_{p,k}^2\}_{p \in [0..N_p], k \in [1..K]}$ sont estimés par un algorithme des K-moyennes sur les observations $\mathbf{Y} = \mathbf{y}_p$ $p \in [0..N_p]$ associées à chaque paquet p . Les paramètres de forme A sont uniformément initialisés à 2 dans chaque paquet et pour toutes les classes.

3.2.2 Etape de Maximisation de $\Theta^{[q+1]}$ à partir de $\Theta^{[q]}$

- Estimation des paramètres de loi $\Theta_L^{[q+1]}$
- **La loi *a priori*** pour les variables X_s à la racine S^r : la réestimation est simplement obtenue en affectant directement les probabilités descendantes obtenues en chaque site de S^r avec les paramètres de l'itération q .
- **La loi de transition *a priori*** est réestimée à l'aide des lois de transition *a posteriori* calculées à l'itération q :

$$a_{(i,j),k}^{[q+1]} = \frac{\sum_{s \in S \setminus S^r} \Phi_s^{[q]}(i, j, k)}{\sum_{s \in S \setminus S^r} \Psi_{s^-}^{[q]}(i, j)} \quad (6)$$

- L'ICE fourni une réestimation empirique des paramètres de l'attache aux données $\Theta_F^{[q+1]} = \{\Sigma^{[q+1]}, A^{[q+1]}\}$ à partir d'un unique tirage $\mathbf{X} = \widehat{\mathbf{x}}^{[q]}$ selon la loi de \mathbf{X} conditionnelle à $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, cette dernière étant estimée en utilisant le paramètre courant $\Theta^{[q]}$ [8] :

- **Réestimation des variances $\Sigma^{[q+1]}$** :

$$\sigma_{p,k}^2 [q+1] = \frac{\sum_{s \in I_{p,k}^{[q]}} (y_s - \mu_{p,k}^{[q]})^2}{N_{p,k}} \quad (7)$$

Où $I_{p,k}^{[q]} = \{s | s \in S^p, \hat{x}_s^{[q]} = \omega_k\}$, S^p l'ensemble des sites de S appartenant au paquet p , et $N_{p,k}$ le cardinal de l'ensemble $I_{p,k}^{[q]}$.

– La réestimation des paramètres de forme $A^{[q+1]}$ est solution de l'équation suivante [8] :

$$\alpha_{p,k}^{[q+1]} + \phi(1/\alpha_k^{[q+1]}) + \log(\alpha_k^{[q+1]}/N_k) + \log(G_{\alpha_k^{[q+1]}}) - \alpha_k^{[q+1]} \frac{G'_{\alpha_k^{[q+1]}}}{G_{\alpha_k^{[q+1]}}} = 0$$

avec $G_{\alpha_k^{[q+1]}} = \sum_{n \in I^k} |y_n - \mu_k^{[q+1]}| \alpha_k^{[q+1]}$, $G'_{\alpha} = \frac{\partial G_{\alpha}}{\partial \alpha}$ et $\phi = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

4 Résultats

Nous testons notre méthode sur un signal synthétique. Les paquets d'ondelettes ont été simulés pour 3 échelles de décomposition, que l'on note $\{m, m+1, m+2\}$. Le paquet à l'échelle m possède 2048 coefficients. Nous comparons notre méthode avec une méthode de segmentation par chaîne de Markov classique (HMC-IN) avec loi d'attache GGD ([3]). Les caractéristiques de l'attache aux données pour les deux classes représentées dans le signal ainsi que les paramètres estimés par les deux algorithmes sont donnés dans le tableau 1. Ces deux classes sont identiquement localisées dans les paquets simulés, avec des caractéristiques d'attache aux données variables tout en préservant la notion de conservation de l'énergie d'échelle en échelle. On montre les résultats pour les paquets *formants* p_{g-} (fig. 5(b)) et p_{d-} (fig. 5(c)) à l'échelle $m+1$, profitant de la résolution temporelle apportée par l'échelle m et des résolutions fréquentielles des paquets à l'échelle $m+2$. Ce résultat donne un aperçu de la plus grande finesse de segmentation apportée par notre méthode dans le cas de la détection de signaux hautement transitoires et fortement bruités, et ceci simultanément pour deux bandes fréquentielles, comme le montrent les erreurs d'estimation du tableau 2.

TABLE 1 – Paramètres de la loi gaussienne généralisée (variance v_p^i et paramètre de forme α_p^i pour la classe ω_i et le paquet p) simulés et estimés par les modèles HMC-IN et GMCwp-IN

param.	Simu.	HMC	AMCwp
$\alpha_{p_{g-}}^1$	1.8	1.73	1.73
$v_{p_{g-}}^1$	0.5	0.44	0.49
$\alpha_{p_{d-}}^1$	1.8	1.77	1.79
$v_{p_{d-}}^1$	0.5	0.48	0.51
$\alpha_{p_{g-}}^2$	4	1.93	3.46
$v_{p_{g-}}^2$	1.3	0.72	1.54
$\alpha_{p_{d-}}^2$	4	2.73	3.39
$v_{p_{d-}}^2$	1.7	1.34	1.83

TABLE 2 – Erreurs de segmentation pour les résultats exposés figure 5.

Erreurs	HMC	AMCwp
$w_{p_{g-}}$	44%	6.03%
$w_{p_{d-}}$	7.3%	6.01%
moyenne	25.7%	6.02%

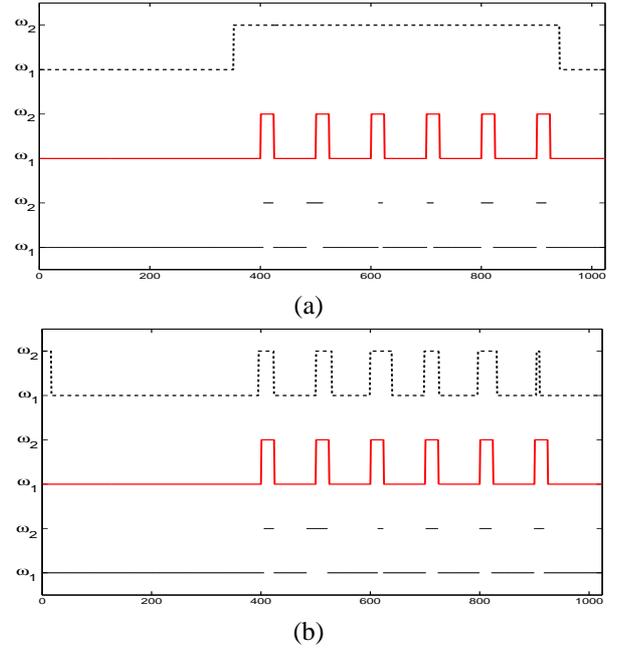


FIGURE 5 – Signaux synthétiques. (a) paquet *formant* p_{g-} et (b) paquet *formant* p_{d-} . On trouve au centre la vérité-terrain simulée. En tiret est donné la segmentation par le modèle HMC-IN, et en trait plein la segmentation par le modèle GMCwp-IN.

Références

- [1] MS Crouse, RD Nowak, and RG Baraniuk. Wavelet-based statistical signal processing using hidden markov models. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 46(4):886–902, 1998.
- [2] Y.P. Kahya, S. Yerer, and O. Cerid. A wavelet-based instrument for detection of crackles in pulmonary sounds. *Engineering in Medicine and Biology Society, 2001. IEEE-EMBS.*, 4:3175–3178, 2001.
- [3] S. Le Cam, A. Belghith, Ch. Collet, and F. Salzenstein. Wheezing Sounds Detection Using Multivariate Generalized Gaussian Distributions. *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009. ICASSP 2009. IEEE International Conference on*, 2009.
- [4] R.E. Learned and A.S. Willsky. A wavelet packet approach to transient signal classification. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2(3):265–278, 1995.
- [5] S. Lovejoy and D. Schertzer. Multifractals, cloud radiances and rain. *Journal of Hydrology*, 322(1-4):59–88, 2006.
- [6] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1998.
- [7] W. Pieczynski. Champs de Markov cachés et estimation conditionnelle itérative. *Traitement du Signal*, 11(2):141–153, 1994.
- [8] J.N. Provost, Ch. Collet, P. Rostaing, P. Pérez, and P. Boutheymy. Hierarchical Markovian segmentation of multispectral images for the reconstruction of water depth maps. *Computer Vision and Image Understanding*, 93(2):155–174, 2004.
- [9] M.J. Wainwright, E.P. Simoncelli, and A.S. Willsky. Random Cascades on Wavelet Trees and Their Use in Analyzing and Modeling Natural Images. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 11(1):89–123, 2001.