

Écoute Coopérative de Spectre pour la Radio Cognitive

Leonardo DI CARDOSO¹, Pascal BIANCHI², Jamal NAJIM², Mérouane DEBBAH¹, Mylène MAIDA³

¹SUPELEC - Chaire Alcatel-Lucent
Plateau du Moulon, F-91192 Gif-sur-Yvette

²Télécom ParisTech - CNRS (LTCI)
46, rue Barrault, F-75013 Paris

³Université de Paris Sud, Laboratoire de Mathématiques
Bât. 425, Faculté des sciences, F-91405 Orsay cedex

{leonardo.cardoso, merouane.debbah}@supelec.fr, {bianchi, najim}@telecom-paristech.fr
mylene.maida@normalesupr.org

Résumé – Dans cet article, nous proposons une méthode d’écoute coopérative du spectre dans le but de détecter la présence de bandes de fréquences inoccupées. La méthode en question est autodidacte en ce sens qu’aucune information sur le signal émis n’est requis. Nous analysons les performances du test proposé en termes de probabilité de fausse alarme et de puissance. L’analyse théorique des performances repose sur la théorie des matrices aléatoires appliquée aux modèles dits “spiked”.

Abstract – In this paper, we propose a cooperative sensing method which allows to determine the unoccupied bands of the spectrum of wireless communication systems. Our approach is blind *i.e.*, it does not require any cooperation between the transmitters and the sensors. We study the performance of the test in terms of probability of false alarm and miss probability. The theoretical analysis is based on results of Random Matrix Theory for spiked models.

1 Introduction

¹ Il est aujourd’hui largement reconnu que les systèmes sans fil de communications numériques n’exploitent pas l’intégralité de la bande de fréquence disponible. Les systèmes sans fils de futures générations seront donc amenés à tirer parti de l’existence de telles bandes de fréquence inoccupées, grâce à leur faculté d’écouter et de s’adapter à leur environnement. Une telle aptitude relève du concept de “radio cognitive” introduit par Joseph Mitola en 2000 [1]. Dans ce contexte, il s’agit donc de rendre les systèmes de communications capables de capter des informations sur leur environnement, de façon à ce qu’ils puissent transmettre de manière opportuniste. On trouve dans la littérature plusieurs techniques permettant d’écouter le spectre afin de détecter l’éventuelle présence d’un signal dans une bande de fréquence donnée. On peut citer les approches reposant sur des tests d’énergie ou la détection de la présence de composantes cyclostationnaires dans le signal écouté. Toutefois, le problème de l’écoute de spectre pour la radio cognitive se caractérise par des impératifs particuliers :

- l’absence de connaissance a priori sur la structure du signal (statistiques, variance du bruit, etc.) ;
- la nécessité de détecter la présence d’un émetteur dans un

laps de temps très court ;

- la nécessité de construire des tests robustes à la présence de canaux très sélectifs.

Les travaux de Cabric et al. [2], Akyildiz et al. [3] produisent une synthèse des approches classiques du point de vue des réseaux cognitifs. D’après ces travaux, il est clair qu’un travail reste à mener afin de proposer des approches nouvelles et adaptées aux fortes contraintes mentionnées ci-dessus. Le problème fondamental est de détecter la présence d’un émetteur par le biais de mesures bruitées. Ceci s’avère être une tâche délicate lorsque la puissance du signal reçu est susceptible d’être faible en raison des évanouissements du canal, et en raison de l’absence de connaissance à la fois des canaux et du signal émis. Considérons le scénario suivant. Des utilisateurs primaires communiquent vers leur destination. Au système primaire se superpose un système dit secondaire, composé de K stations de base. Ces stations de base écoutent le spectre, pour décider de la présence/absence de bandes libres. Nous supposons que les K stations de base du système secondaire partagent leurs observations. Ceci peut être effectué par le biais d’un canal dédié (possiblement filaire). Nous supposons que le partage d’information n’est pas limité en capacité. Désignons par $\mathbf{y}(k) = [y_1(k), y_2(k), \dots, y_K(k)]^T$ la série temporelle obtenue en empilant les K observations réalisées par l’ensemble des capteurs au même instant k . Le problème de la détection d’une bande

¹Ce travail a été conjointement soutenu par le programme Projets Jeunes Chercheurs du GdR-Isis et par l’Agence Nationale de la Recherche (Projet ANR MDCO SESAME).

libre revient au test d'hypothèses suivant :

$$\mathbf{y}(k) = \begin{cases} \mathbf{w}(k) : & H_0 \\ \mathbf{h} s(k) + \mathbf{w}(k) : & H_1 \end{cases}, \quad (1)$$

où $\mathbf{w}(k)$ représente un bruit blanc gaussien complexe circulaire centré de matrice de covariance égale à σ^2 fois l'identité, où $\mathbf{h} = [h_1, \dots, h_K]^T$ est un vecteur colonne regroupant l'ensemble des coefficients d'atténuation complexes entre l'émetteur éventuel et l'ensemble des K récepteurs. $s(k)$ est le signal utile dont on souhaite détecter la présence. Pour simplifier, nous ferons l'hypothèse que $s(k)$ est un processus gaussien complexe circulaire indépendant et identiquement distribué de variance unité.

Notations

Pour $i \in \{0, 1\}$, $\mathbb{P}_{H_i}[\mathcal{E}]$ représente la probabilité d'un événement \mathcal{E} sous l'hypothèse H_i . Pour toute variable aléatoire (v.a.) réelle T et pour tout γ , la notation $T \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$ représente la fonction de test qui rejette l'hypothèse nulle quand $T > \gamma$. Dans ce cas, la probabilité de fausse alarme (PFA) du test est donnée par $\mathbb{P}_0[T > \gamma]$. La puissance du test est donnée par $\mathbb{P}_1[T > \gamma]$. La notation $\xrightarrow[p.s.]{H_i}$ représente la convergence presque sûre sous l'hypothèse H_i . Pour chaque bijection $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, où \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont deux ensembles, on désigne par F^{-1} la fonction réciproque associée à F . Pour chaque ensemble $A \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)$ représente l'indicatrice de A . Pour chaque vecteur \mathbf{x} , $\|\mathbf{x}\|$ représente la norme euclidienne de \mathbf{x} .

2 Rapport de Vraisemblance Généralisé

Soit $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(N-1)]$ la matrice $K \times N$ regroupant toutes les données, où N représente le nombre d'échantillons observé par chaque capteur. On désigne par $p_0(\mathbf{Y}; \sigma^2)$ et par $p_1(\mathbf{Y}; \mathbf{h}, \sigma^2)$ les densités de probabilité de la matrice d'observation \mathbf{Y} indexée par les paramètres inconnus \mathbf{h} et σ^2 sous les hypothèses H_0 et H_1 respectivement :

$$p_0(\mathbf{Y}; \sigma^2) = (\pi\sigma^2)^{-NK} \exp\left(-\frac{N}{\sigma^2} \text{tr} \hat{\mathbf{R}}\right) \quad (2)$$

$$p_1(\mathbf{Y}; \mathbf{h}, \sigma^2) = (\pi^K \det \mathbf{R})^{-N} \exp\left(-N \text{tr}(\hat{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1})\right) \quad (3)$$

où $\mathbf{R} = \mathbf{h}\mathbf{h}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_K$ est la matrice de covariance du processus $\mathbf{y}(k)$ sous H_1 et où $\hat{\mathbf{R}}$ est la matrice de covariance empirique $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H$. Dans le cas idéal où les paramètres \mathbf{h} et σ^2 sont supposés connus, un test uniformément plus puissant est obtenu en rejetant l'hypothèse nulle pour de grandes valeurs du rapport de vraisemblance $p_1(\mathbf{Y}; \mathbf{h}, \sigma^2)/p_0(\mathbf{Y}; \sigma^2)$. Dans notre contexte, \mathbf{h} et σ^2 sont malheureusement inconnus : l'existence d'un test uniformément plus puissant n'est plus garantie. Une approche classique, dite test du rapport de vraisemblance généralisé (GLRT pour Generalized Likelihood Ratio Test) consiste à rejeter l'hypothèse nulle lorsque la statistique :

$$L_N = \frac{\sup_{\mathbf{h}, \sigma^2} p_1(\mathbf{Y}; \mathbf{h}, \sigma^2)}{\sup_{\sigma^2} p_0(\mathbf{Y}; \sigma^2)} \quad (4)$$

est supérieure à un seuil ξ_N , où ξ_N est fixé de sorte à ce que la PFA $\mathbb{P}_0(L_N > \xi_N)$ n'excède pas un niveau $\alpha \in (0, 1)$ prédéterminé. La proposition suivante fournit l'expression du rapport de vraisemblance généralisé L_N . Désignons par $\lambda_1 > \lambda_2 \dots > \lambda_K \geq 0$ les valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ (distinctes avec probabilité 1). Soit $\phi_{N,K}$ la fonction définie pour tout x de l'intervalle $(1, K)$ par $\phi_{N,K}(x) = C_{N,K} x^{-N} \left(1 - \frac{x}{K}\right)^{(1-K)N}$, où $C_{N,K} = \left(1 - \frac{1}{K}\right)^{(1-K)N}$.

Proposition 1 ([4]). *Le rapport de vraisemblance généralisé s'écrit $L_N = \phi_{N,K}(T_N)$ où T_N est la statistique définie par :*

$$T_N = \frac{\lambda_1}{\frac{1}{K} \text{tr} \hat{\mathbf{R}}}. \quad (5)$$

Notons que la fonction $\phi_{N,K}$ est croissante sur l'intervalle $(1, K)$. Par conséquent, le GLRT revient au test suivant :

$$T_N \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma_N \quad (6)$$

où $\gamma_N = \phi_K^{-1}(\xi_N)$ est un certain seuil fixé de sorte à ce que la PFA n'excède pas le niveau α .

3 Etude asymptotique du seuil

Afin de compléter la définition du test il est essentiel de proposer une procédure permettant de fixer le seuil du test. Selon l'approche usuelle, nous proposons de fixer le seuil γ_N de sorte à maximiser la puissance $\mathbb{P}_1[T_N > \gamma_N]$ du test, tout en imposant que la PFA $\mathbb{P}_0[T_N > \gamma_N]$ n'excède pas un certain niveau $\alpha \in (0, 1)$ fixé. Selon cette définition, le seuil vaut :

$$\gamma_N = p_N^{-1}(\alpha) \quad (7)$$

où $p_N(t)$ représente la fonction de répartition complémentaire de T_N sous l'hypothèse H_0 . Pour chaque t , le calcul de $p_N(t)$ nécessite l'évaluation de l'intégrale d'une fonction de K variables. Cette évaluation doit être effectuée par l'organe de décision pour chaque valeur de K, N . Afin de simplifier la procédure de test, nous suggérons d'étudier le comportement du seuil γ_N lorsque le nombre d'observations augmente. Plus précisément, nous considérons le cas où le nombre K de sources et le nombre N d'observations tendent vers l'infini au même rythme :

$$N \rightarrow \infty, K \rightarrow \infty, \frac{K}{N} \rightarrow c, \quad (8)$$

où $0 < c < 1$ est une constante. On définit $c_N = K/N$. Le Théorème 1 ci-dessous établit que, dans le régime asymptotique (8), le seuil γ_N s'écrit en fonction d'une loi de Tracy-Widom. La fonction de répartition $F_{TW}(\cdot)$ de Tracy-Widom correspond à la loi asymptotique de la plus grande valeur propre (correctement recentrée et renormalisée) d'une matrice de Wigner [5]. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_{TW}(t) = \exp\left(-\int_t^\infty (x-t)q^2(x) dx\right), \quad (9)$$

où q est la solution de l'équation différentielle de Painlevé II

$$\begin{aligned} q''(x) &= xq(x) + 2q^3(x), \\ q(x) &\sim \text{Ai}(x) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

où $\text{Ai}(x)$ représente la fonction d'Airy. Soit $\bar{F}_{TW}(t)$ la fonction de répartition complémentaire $\bar{F}_{TW}(t) = 1 - F_{TW}(t)$. Posons :

$$b_N = (1 + \sqrt{c_N}) \left(\frac{1}{\sqrt{c_N}} + 1 \right)^{1/3}. \quad (10)$$

Théorème 1. *Les propositions suivantes sont vraies.*

1. Pour tout niveau $\alpha \in (0, 1)$, la puissance du test (6) est maximale si et seulement si

$$\gamma_N = (1 + \sqrt{c_N})^2 + \frac{b_N}{N^{2/3}} \zeta_N \quad (11)$$

pour une certaine suite ζ_N qui converge vers $\bar{F}_{TW}^{-1}(\alpha)$.

2. La PFA du test

$$T_N \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} (1 + \sqrt{c_N})^2 + \frac{b_N}{N^{2/3}} \bar{F}_{TW}^{-1}(\alpha) \quad (12)$$

converge vers α dans le régime asymptotique (8).

Le Théorème 1 indique que, lorsque N, K sont suffisamment grands, le seuil γ_N peut être approché par le membre de droite de (12).

4 Exposants d'Erreur

4.1 Notion d'exposants d'erreur

Afin de caractériser les performances du test, l'approche traditionnelle consiste à étudier sa puissance ou, de manière équivalente, la probabilité d'erreur de deuxième espèce. La probabilité d'erreur de deuxième espèce $\beta_{N,T}(\alpha)$, ou probabilité de manque, correspond à la probabilité sous H_1 de décider l'hypothèse H_0 , lorsque la PFA est fixée à la valeur α , soit :

$$\beta_{N,T}(\alpha) = \inf \mathbb{P}_1 [T_N < \gamma], \quad (13)$$

où l'infimum est pris sur tous les seuils γ tels que la PFA $\mathbb{P}_0 [T_N > \gamma]$ n'excède pas α . Comme la probabilité de manque n'a pas d'expression simple dans le cas général, on étudie son comportement asymptotique dans le régime (8). Lorsque le niveau $\alpha \in (0, 1)$ est fixé, on définit l'exposant d'erreur par la limite suivante, si elle existe :

$$\mathcal{E}_T = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{N} \log \beta_{N,T}(\alpha). \quad (14)$$

L'exposant d'erreur \mathcal{E}_T fournit une information précieuse au sujet de la performance du test T_N lorsque le nombre d'observations est grand et lorsque α est fixé. En pratique, si le nombre d'observations dont on dispose est grand, on peut toutefois penser à réduire conjointement la PFA et la probabilité de manque, plutôt que de faire fonctionner le test à niveau constant. Il est donc important d'étudier les performances du test

lorsque les deux probabilités d'erreur tendent vers zéro. Un couple $(a, b) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ est dit *couple d'exposants d'erreur atteignable* s'il existe une suite de niveaux α_N telle que dans le régime asymptotique (8),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{N} \log \alpha_N = a \quad (15)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{N} \log \beta_{N,T}(\alpha_N) = b. \quad (16)$$

On désigne par \mathcal{S}_T l'ensemble des couples atteignables pour le test T_N . On nommera cet ensemble \mathcal{S}_T la *courbe des exposants d'erreur*.

4.2 Performance du GLRT

Rappelons que, sous H_0 , la mesure empirique des valeurs propres de la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H$ converge faiblement vers la loi de Marčenko-Pastur (renormalisée par σ^2) dans le régime asymptotique (8). Plus précisément, la fonction de répartition $\frac{\#\{i, \lambda_i \leq x\}}{K}$ converge vers $P_{\text{MP}}((-\infty, \frac{x}{\sigma^2}])$ lorsque $N, K \rightarrow \infty$ où P_{MP} est la loi de Marčenko-Pastur, définie par

$$P_{\text{MP}}(dy) = \mathbf{1}_{(\lambda^-, \lambda^+)}(y) \frac{\sqrt{(\lambda^+ - y)(y - \lambda^-)}}{2\pi c y} dy,$$

où $\lambda^+ = (1 + \sqrt{c})^2$ et $\lambda^- = (1 - \sqrt{c})^2$. La transformée de Stieltjes de P_{MP} joue un rôle clé dans la suite : $\mathbf{f}(x) = \int \frac{1}{y-x} P_{\text{MP}}(dy)$. Elle s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} \frac{(1-x-c) + \sqrt{(1-x-c)^2 - 4cx}}{2cx} & \text{si } x > \lambda^+ \\ \frac{(1-x-c) - \sqrt{(1-x-c)^2 - 4cx}}{2cx} & \text{si } 0 < x < \lambda^- \end{cases}$$

On définit en outre $\tilde{\mathbf{f}}(x) = -\frac{1}{x(1+c\mathbf{f}(x))}$. Introduisons maintenant la fonction suivante, définie pour chaque $x > \lambda^+$:

$$\mathbf{F}^+(x) = \log(x) + \frac{1}{c} \log(1+c\mathbf{f}(x)) + \log(1+\tilde{\mathbf{f}}(x)) + x\mathbf{f}(x)\tilde{\mathbf{f}}(x).$$

Dans la suite, nous faisons l'hypothèse que la constante suivante ρ existe :

$$\rho = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{h}\|^2}{\sigma^2}. \quad (17)$$

On nommera ρ le rapport signal-sur-bruit (RSB) limite. Nous introduisons également la constante $\lambda_{\text{spk}}^\infty = (1 + \rho) \left(1 + \frac{c}{\rho}\right)$. Sous l'hypothèse H_1 , la plus grande valeur propre de la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$ a le comportement suivant quand $N, K \rightarrow \infty$:

$$\lambda_1 \xrightarrow[H_1]{p.s.} \begin{cases} \sigma^2 \lambda_{\text{spk}}^\infty & \text{si } \rho > \sqrt{c}, \\ \sigma^2 \lambda^+ & \text{sinon,} \end{cases} \quad (18)$$

voir par exemple [6] pour une preuve de ce résultat. Pour tout $\rho > \sqrt{c}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$I_\rho^+(x) = \frac{x - \lambda_{\text{spk}}^\infty}{(1 + \rho)} - (1 - c) \log \frac{x}{\lambda_{\text{spk}}^\infty} - c (\mathbf{F}^+(x) - \mathbf{F}^+(\lambda_{\text{spk}}^\infty)).$$

On peut démontrer (la preuve est omise par manque de place) que la fonction I_ρ^+ est la fonction de taux associé au principe de grandes déviations (PGD) de la statistique de test T_N lorsque $\rho > \sqrt{c}$. En particulier, I_ρ^+ varie de $I_\rho^+(\lambda^+)$ à 0 sur l'intervalle $[\lambda^+, \lambda_{\text{spk}}^\infty]$ et varie de 0 à ∞ sur l'intervalle $[\lambda_{\text{spk}}^\infty, \infty)$. Sous l'hypothèse H_0 , on peut montrer de même que la fonction de taux associée au PGD de T_N vaut pour tout $x \in [\lambda^+, \infty)$:

$$I_0^+(x) = x - \lambda^+ - (1 - c) \log \frac{x}{\lambda^+} - 2c (\mathbf{F}^+(x) - \mathbf{F}^+(\lambda^+)).$$

La fonction I_0^+ varie de 0 à ∞ sur l'intervalle $[\lambda^+, \infty)$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de cette section.

Théorème 2. *Les propriétés suivantes sont vraies.*

1. Pour chaque niveau fixé $\alpha \in (0, 1)$, l'exposant d'erreur \mathcal{E}_T défini par (14) existe et vérifie :

$$\mathcal{E}_T = I_\rho^+(\lambda^+) \quad (19)$$

si $\rho > \sqrt{c}$ et $\mathcal{E}_T = 0$ sinon.

2. La courbe d'exposants d'erreur de T_N est donnée par :

$$\mathcal{S}_T = \{(I_0^+(x), I_\rho^+(x)) : x \in (\lambda^+, \lambda_{\text{spk}}^\infty)\} \quad (20)$$

si $\rho > \sqrt{c}$ et $\mathcal{S}_T = \emptyset$ sinon.

La preuve de ce résultat est omise par manque de place. Nous noterons toutefois que la démonstration repose sur l'obtention d'un principe de grandes déviations portant sur T_N .

5 Illustrations et Résultats Numériques

La figure 1 représente l'exposant d'erreur associé au test. On se compare à l'exposant d'erreur du test de Neyman-Pearson, que l'on peut obtenir par application du lemme de Stein. La figure 2 représente la courbe COR (Caractéristique Opérationnelle de Réception) associée au test T_N (Test 1), c'est à dire la puissance maximale du test en fonction de son niveau. La courbe COR du test T_N est comparée à la courbe COR du test proposé dans [7] et qui fait appel au nombre de conditionnement de la matrice de covariance empirique λ_1/λ_K . On observe que le test fondé sur T_N est uniformément plus puissant que le test proposé dans [7].

Remerciements

Nous tenons à remercier Olivier Cappé pour ses commentaires qui ont considérablement enrichi le travail présenté dans cet article.

Références

- [1] J. Mitola. *Cognitive Radio An Integrated Agent Architecture for Software Defined Radio*. PhD thesis, Royal Institute of Technology (KTH), May 2000.
- [2] D. Cabric, S. M. Mishra, and R. W. Brodersen. Implementation issues in spectrum sensing for cognitive radios. In *Signals, Systems and Computers, 2004. Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference on*, volume 1, pages 772–776 Vol.1, 2004.

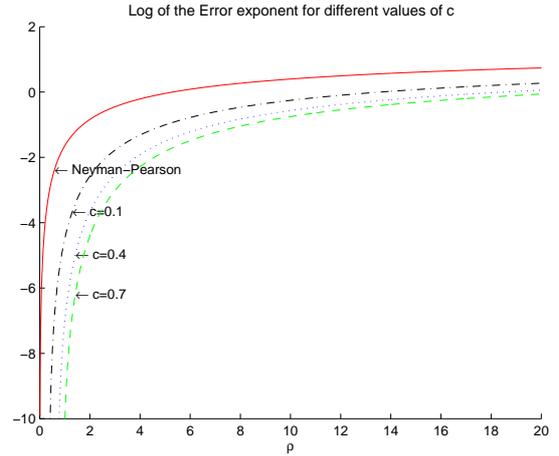


FIG. 1 – Logarithme de l'exposant d'erreur \mathcal{E} en fonction du SNR ρ pour différentes valeurs de c . Comparaison avec l'exposant d'erreur du test de Neyman-Pearson (cas où les paramètres sont connus).

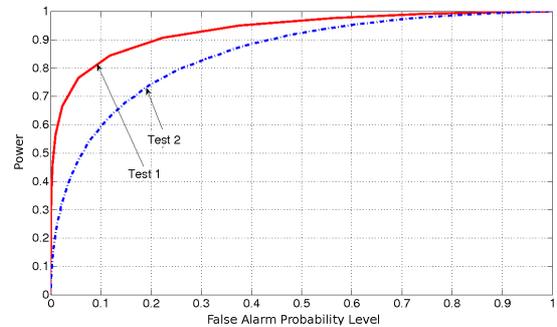


FIG. 2 – Courbe COR du Test T_N (Test 1) et comparaison avec le test fondé sur le nombre de conditionnement λ_1/λ_K (Test 2) – $K=10$, $N=50$, $\rho=1$.

- [3] I. F. Akyildiz, W. Y. Lee, M.C. Vuran, and S. Mohanty. NeXt generation/dynamic spectrum access/cognitive radio wireless networks : a survey. *Comput. Networks*, 50(13) :2127–2159, 2006.
- [4] M. Wax and T. Kailath. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Trans. on Signal, Speech, and Signal Processing*, 33(2) :387–392, April 1985.
- [5] C. A. Tracy and H. Widom. Level-spacing distributions and the Airy kernel. *Comm. Math. Phys.*, 159(1) :151–174, 1994.
- [6] J. Baik and J. Silverstein. Eigenvalues of large sample covariance matrices of spiked population models. *J. Multivariate Anal.*, 97(6) :1382–1408, 2006.
- [7] L. S. Cardoso, M. Debbah, P. Bianchi, and J. Najim. Cooperative Spectrum Sensing Using Random Matrix Theory. 2008.