

Une nouvelle classe de signaux multifractals possédant une structure de branchement sous-jacente

Geoffrey DECROUEZ, Owen Dafydd JONES

Department of Mathematics and Statistics
The University of Melbourne, Victoria 3010, Australie
dgg@unimelb.edu.au, odjones@unimelb.edu.au

Résumé – Cette étude propose un nouveau modèle de signaux multifractals. La classe de signaux obtenus peuvent être simulés efficacement à l'aide d'un algorithme en ligne, ce qui est généralement difficile avec des signaux à mémoire longue. Le mouvement Brownien en temps multifractal est un cas particulier de cette classe de signaux, indiquant une application potentielle en finance ou en télécommunications. Nous présentons ici la construction de cette classe de signaux, appelés Multifractal Embedded Branching Processes (MEBP). Nous donnons des conditions pour que le processus soit continu, et proposons un algorithme de simulation en ligne, qui peut être téléchargé depuis la page perso du second auteur. Enfin, nous donnons une bonne supérieure du spectre multifractal du changement de temps.

Abstract – We propose a new model of multifractal processes. This new class of signals can be efficiently simulated online, which is generally hard with long memory processes. Brownian motion in multifractal time belongs to this class of processes, indicating a potential application in finance or telecommunications. In this study, we present the construction of this class of processes, called Multifractal Embedded Branching Processes (MEBP). We give conditions under which these processes are continuous. An implementation of the online algorithm can be downloaded from the second author's webpage. Finally, we provide an upper bound of the multifractal spectrum of the time change.

1 Introduction

En 2004, Jones a introduit une nouvelle classe de processus auto-similaires, les processus CEBP [7]. Contrairement à d'autres processus auto-similaires, les processus CEBP peuvent être simulés en ligne. Les processus CEBP sont définis à l'aide de l'arbre de branchement, qui réalise une décomposition temps-échelle adaptée au signal. Pour de tels processus, l'arbre de branchement est de type Galton-Watson, ce qui revient à dire que le nombre de fils est indépendant et identiquement distribué d'un nœud à l'autre de l'arbre. Dans [8], l'arbre de branchement est utilisé pour tester le caractère auto-similaire des signaux et pour la définition d'un estimateur de l'exposant de Hölder de processus auto-similaires à accroissements stationnaires. Dans [9], l'arbre de branchement est utilisé pour tester la stationarité des signaux.

On commence par montrer que les processus CEBP sont des processus monofractals (Théorème 1), en s'appuyant sur sa structure de branchement sous-jacente. On propose dans un deuxième temps d'étendre le modèle en construisant un changement de temps multifractal à partir d'une cascade multiplicative aléatoire définie sur l'arbre de branchement du processus CEBP. Le processus obtenu, appelé Multifractal Embedded Branching Process (MEBP), garde les avantages du processus CEBP (simulation en ligne) et possède une structure plus riche. Le processus MEBP est un processus CEBP en temps multifractal. Les signaux auto-similaires en temps multifractal, et plus particulièrement les mouvement Browniens en temps mul-

tifractal, sont d'importants modèles en finance [4].

Cet article est organisé de la manière suivante. Nous commençons par rappeler la construction de l'arbre de branchement d'un processus CEBP, et la notion d'arbre aléatoire. Ensuite, nous énonçons le premier nouveau résultat important, à savoir que les processus CEBP sont des processus monofractals (Théorème 1). Ensuite, nous présentons la construction du changement de temps multifractal et des processus MEBP (Théorème 2) en introduisant des poids aléatoires sur l'arbre de branchement du processus CEBP. Une implémentation Matlab pour la génération de processus MEBP est disponible depuis la page perso du second auteur [6]. Nous finissons cette étude en donnant une borne supérieure pour le spectre multifractal du changement de temps. Le spectre multifractal est également estimé à l'aide de la méthode des coefficients dominants [5], et supportent nos résultats théoriques.

2 Le processus CEBP

Soit $X : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ un processus continu, avec $X(0) = 0$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on définit les temps de passage de niveau n (correspondant à l'échelle 2^n), dénotés T_k^n , par $T_0^n = 0$ et

$$T_{k+1}^n = \inf\{t > T_k^n \mid X(t) \in 2^n\mathbb{Z}, X(t) \neq X(T_k^n)\}.$$

Soit C_k^n le k -ième passage de niveau n . On entend par passage une partie du processus X de T_{k-1}^n à T_k^n avec comme information supplémentaire le temps du début de passage T_{k-1}^n et la



FIG. 1 – Construction de l'arbre de branchement.

position du processus $X(T_{k-1}^n)$ en début de passage :

$$C_k^n := \{(t, X(t)) \mid T_{k-1}^n \leq t < T_k^n\}$$

Un passage est de type haut si $X(T_k^n) = X(T_{k-1}^n) + 2^n$ ou bas si $X(T_k^n) = X(T_{k-1}^n) - 2^n$. En allant d'une échelle grossière à une échelle plus fine, on décompose chaque C_k^n en une suite de passages de niveau $n-1$. En associant chaque passage à un nœud d'un arbre et aux sous-passages les fils d'un nœud, on définit alors l'arbre de branchement du processus X , comme illustré Figure 1.

On représente le nombre de sous-passages à l'échelle 2^{n-1} remplaçant le k -ième passage de niveau n à l'aide de la variable aléatoire Z_k^n . Les Z_k^n sous-passages consistent de $(Z_k^n - 2)/2$ excursions suivies d'un passage direct. Une excursion est une paire haut-bas ou bas-haut ; un passage direct est une paire haut-haut ou bas-bas.

Un processus continu X est appelé Embedded Branching Process (EBP) si les variables aléatoires Z_k^n sont indépendantes et identiquement distribuées.

On adopte les notations suivantes pour la définition de l'arbre de branchement. Soit \emptyset la racine de l'arbre, représentant un unique passage de niveau 0. On dénote la première génération par i , $1 \leq i \leq Z_\emptyset$, où Z_\emptyset représente le nombre de fils de \emptyset . La deuxième génération est alors dénotée par ij , $1 \leq j \leq Z_i$, et ainsi de suite. Plus généralement, un nœud est un élément de $U = \cup_{n \geq 0} \mathbb{N}^{*n}$ et une branche un couple $(\mathbf{u}, \mathbf{u}j)$ où $\mathbf{u} \in U$ et $j \in \mathbb{N}^*$. La longueur d'un nœud $\mathbf{i} = i_1 \dots i_n$ est $|\mathbf{i}| = n$. Si $|\mathbf{i}| > n$, $\mathbf{i}|_n$ est la restriction de \mathbf{i} à ses n premiers termes. Par convention, $|\emptyset| = 0$ et $\mathbf{i}|_0 = \emptyset$.

Etant donné un processus EBP, soit $p(x) = P(Z_\emptyset = x)$ la distribution de la variable aléatoire Z_\emptyset . Pour un processus EBP, les Z_k^n sont indépendantes et distribuées comme Z_\emptyset . Si p satisfait $p(2) < 1$ et $\sum_x x \log(x)p(x) < \infty$ alors on dit que la distribution est régulière (on remarque les Z_k^n prennent leurs

valeurs dans $2\mathbb{N}$). Jones [7] a montré que pour toute distribution régulière p , il existe un processus EBP continu X pour lequel p est la distribution du nombre de fils à chaque nœud. En imposant d'autres conditions sur la durée des passages, le processus EBP est unique. On l'appelle processus EBP Canonique (CEBP).

Soit $\mu = \sum_x xp(x)$ l'espérance de Z_k^n et $H = \log 2 / \log \mu$. Alors X possède une invariance d'échelle discrète : pour tout $a = \mu^n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$X(t) = a^{-H} X(at) \text{ au sens des distributions finies.}$$

H est l'exposant de Hölder de X . De manière générale, on adopte la définition suivante pour l'exposant de Hölder. Soient $\epsilon > 0$, $I_\epsilon = [t - \epsilon, t + \epsilon]$ et X un processus continu.

$$h(t) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(2\epsilon)} \log \sup_{|u-t| < \epsilon} |X(u) - X(t)|$$

avec la convention $\log(0) = -\infty$.

Le mouvement Brownien est un processus CEBP [3]. En fait, on peut montrer que les processus CEBP sont monofractals, sous certaines conditions :

THÉORÈME 1. *Soit X un processus CEBP avec distribution régulière p et taille moyenne μ . Suppose que le nombre de fils est borné, c'est-à-dire qu'il existe M tel que $p(x) = 0$ pour tout $x \geq M$. Alors X est monofractal : avec probabilité 1, pour tout t ,*

$$h(t) = \frac{\log 2}{\log \mu}.$$

Nous ne donnons pas la preuve de ce résultat, qui s'obtient à l'aide d'une étude de la structure de branchement des processus CEBP.

Nous illustrons ce résultat en estimant le spectre multifractal des processus CEBP à l'aide de la méthode des coefficients dominants. La méthode des coefficients dominants estime la fonction de partition $\zeta(q)$ du processus en question, et est relié au spectre multifractal $D(a) = D_{\mathcal{H}}\{t \mid h(t) = a\}$ ($D_{\mathcal{H}}$ dénote la dimension de Hausdorff), à l'aide de la transformée de Legendre-Fenchel :

$$D(a) \leq \inf_q (1 + qa - \zeta(q)) \quad (1)$$

Lorsque $\zeta(q)$ est linéaire avec q , alors la borne supérieure se réduit à un point et le processus est monofractal. Nous présentons ce résultat sur la Figure 2, où la distribution du nombre de fils est géométrique, donc non borné, indiquant qu'il doit être possible de démontrer le Théorème 1 sous des hypothèses moins restrictives.

3 Le processus MEBP

Nous introduisons maintenant les processus MEBP, que l'on définit comme des processus CEBP en temps multifractal. Le changement de temps est défini à partir d'un processus en cascade sur l'arbre de branchement. A chaque branche $(\mathbf{i}, \mathbf{i}j)$ de

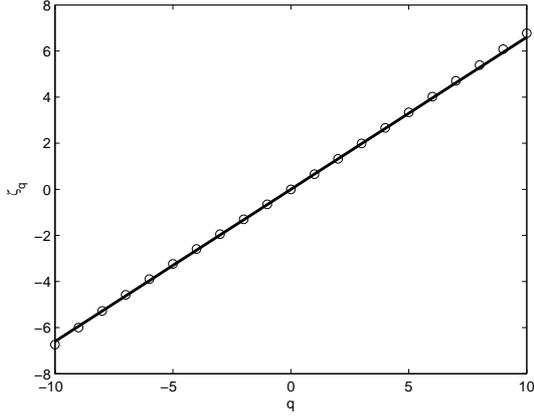


FIG. 2 – Estimation de la fonction de partition pour un processus CEBP avec distribution $P(Z_\emptyset = k) = \theta(1 - \theta)^{(k-2)/2}$, avec $k = 2, 4, 6, \dots$ et $\theta = 0.7$. La fonction de partition ('o') est obtenue après moyennage de 100 estimations. La courbe théorique est donnée en noir. Le caractère linéaire de la fonction de partition indique que le processus en question est monofractal. Les intervalles de confiance sont trop petits pour être ajoutés.

l'arbre, on associe une variable aléatoire (ou poids) $\rho_j(\mathbf{i})$. Les poids $\rho_1(\mathbf{i}), \dots, \rho_{Z_i}(\mathbf{i})$ peuvent être dépendantes et dépendre de Z_i , mais sont indépendantes des autres nœuds de l'arbre. Le poids associé au nœud \mathbf{i} est alors

$$\rho_{\mathbf{i}} = \prod_{k=1}^{|\mathbf{i}|} \rho_{i_k}(\mathbf{i}|_{k-1}).$$

$\rho_{\mathbf{i}}$ est le produit de tous les poids le long d'une ligne de descente, de la racine jusqu'à \mathbf{i} . $\rho_{\mathbf{i}}$ nous sert à définir les temps de passage du nouveau processus. En effet, on utilise ces poids pour définir une mesure, ν , sur la frontière $\partial\Upsilon$ de l'arbre de branchement. A partir de cette mesure (à support discret), on construit une deuxième mesure, ζ , dont le support est un intervalle de \mathbb{R} . On définit alors le changement de temps \mathcal{M} par $\mathcal{M}(t) = \zeta([0, t])$. Le processus MEBP est alors donné par $Y = X \circ \mathcal{M}^{-1}$, où X est le processus CEBP. Les processus X et Y possèdent donc la même structure, mais ont des temps de passage différents. Il existe des restrictions sur les poids associés aux branches de l'arbre afin que le changement de temps soit continu. Dans ce qui suit nous présentons les grandes lignes de la construction de la mesure ζ , puis nous résumons dans un théorème les conditions d'existence et de continuité des processus MEBP.

On garde les mêmes notations que précédemment, et on introduit quelques définitions supplémentaires relatives à l'arbre de branchement. On appelle arbre Υ un ensemble de nœuds tels que :

- $\emptyset \in \Upsilon$
- Si un nœud \mathbf{i} alors tout ancêtre $\mathbf{i}|_k$, $k \leq |\mathbf{i}|$ appartient aussi à l'arbre.
- Si $\mathbf{i} \in \Upsilon$, alors $\mathbf{i}j \in \Upsilon$ pour $j = 1, \dots, Z_i$ et $\mathbf{i}j \notin \Upsilon$ pour

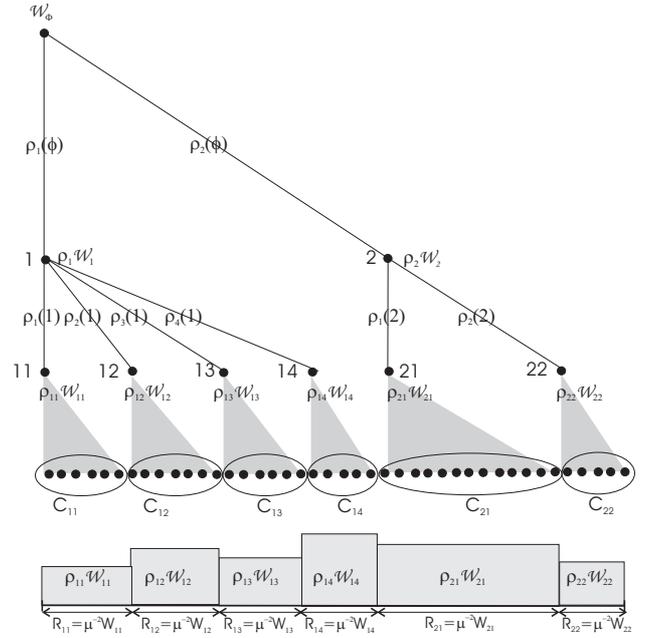


FIG. 3 – Construction de ν , ζ et $R_{\mathbf{i}}$.

$j > Z_i$, où Z_i est le nombre de fils de \mathbf{i} .

La bordure de l'arbre Υ est l'ensemble des nœuds de longueur infinie : $\partial\Upsilon = \{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 0, \mathbf{i}|_n \in \Upsilon\}$. On définit également $\Upsilon_{\mathbf{i}} = \{\mathbf{j} \in \Upsilon \mid |\mathbf{j}| \geq |\mathbf{i}| \text{ and } \mathbf{j}|_{|\mathbf{i}|} = \mathbf{i}\}$. Le processus CEBP est obtenu en associant à chaque branche de l'arbre un poids déterministe égal à $1/\mu$. Ici, nous attribuons à chaque branche une variable aléatoire, comme illustré sur Figure 3.

Soit $\mathbf{i} \in \Upsilon$. $\rho_{\mathbf{i}}$ est le poids attribué au nœud \mathbf{i} depuis la racine de l'arbre jusqu'à \mathbf{i} . On souhaite maintenant attribuer à ce même nœud un poids (aléatoire) correspondant au sous-arbre infini enraciné en \mathbf{i} . On appelle $\mathcal{W}_{\mathbf{i}}$ cette variable aléatoire. Elle est obtenue comme limite d'une martingale définie sur l'arbre de branchement

$$\mathcal{W}_{\mathbf{i}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \Upsilon_{\mathbf{i}}, |\mathbf{j}|=n} \rho_{\mathbf{j}} / \rho_{\mathbf{i}}.$$

Cette limite est non dégénérée sous certaines conditions sur les poids $\rho_{\mathbf{i}}$, que nous donnons plus bas. A chaque nœud $\mathbf{i} \in \Upsilon$, nous venons donc de définir le poids du sous arbre enraciné en \mathbf{i} (donné par $\mathcal{W}_{\mathbf{i}}$), ainsi que $\rho_{\mathbf{i}}$, que l'on peut interpréter comme un coefficient de pondération du poids associé à $\Upsilon_{\mathbf{i}}$.

On peut alors définir une mesure ν aux ensembles $C_{\mathbf{i}} = \{\mathbf{j} \in \partial\Upsilon \mid \mathbf{j}|_n = \mathbf{i}\}$, constitués de l'ensemble des nœuds sur la bordure de l'arbre qui ont pour ancêtre le nœud \mathbf{i} :

$$\nu(C_{\mathbf{i}}) = \rho_{\mathbf{i}} \mathcal{W}_{\mathbf{i}}$$

Ceci est illustré sur Figure 3. Cette mesure est cependant insuffisante pour construire le changement de temps multifractal puisqu'elle n'est définie que pour un ensemble discret de points, alors que l'on veut construire le processus MEBP pour tout réel t . On définit alors une nouvelle mesure ζ à partir de ν , qui réalise le lien entre $\partial\Upsilon$ et un intervalle ν -mesurable de

l'ensemble des réels. L'idée est d'associer à chaque ensemble C_i un intervalle R_i de la droite réelle, et de montrer que cette construction permet d'exprimer chaque réel t , sous certaines conditions, comme une intersection dénombrable de ces intervalles, $\{t\} = \bigcap_n R_{i|_n}, i \in \partial Y$. Chaque intervalle R_i étant ν -mesurable, on peut alors définir une mesure ζ pour chaque intervalle de la forme $[0, t)$, et le changement de temps multifractal $\mathcal{M}(t)$ est donné par

$$\mathcal{M}(t) = \zeta([0, t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta([0, T_{k_n}^{-n})).$$

où k_n est la position du noeud $i|_n$ au sein de la n -ième génération de Y .

Le théorème suivant résume les conditions pour que le processus MEBP soit bien défini et continu. La preuve rigoureuse de ce théorème utilise principalement des résultats de [1, 2, 10].

HYPOTHÈSE 1.

$$\begin{aligned} \rho_i > 0, \quad \mathbb{E} \sum_{i=1}^{Z_0} \rho_i(\emptyset) = 1, \quad 0 > \mathbb{E} \sum_{i=1}^{Z_0} \rho_i(\emptyset) \log \rho_i(\emptyset) > -\infty, \\ \mathbb{E} \sum_{i=1}^{Z_0} \rho_i(\emptyset) \log \sum_{i=1}^{Z_0} \rho_i(\emptyset) < \infty. \text{ et } \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \mathbb{E} Z_0^{1+\epsilon} < \infty \end{aligned}$$

THÉORÈME 2. Soit p une distribution régulière sur $2\mathbb{N}^*$ et X le processus CEBP associé. Si l'hypothèse 1 est vérifiée, alors on peut construire un processus croissant \mathcal{M} tel que \mathcal{M}^{-1} soit continu, et ainsi définir

$$Y = X \circ \mathcal{M}^{-1}.$$

Le processus Y est appelé processus MEBP.

Un algorithme de simulation de processus MEBP est disponible depuis la page perso de Jones [6].

Pour finir, nous donnons un résultat sur le spectre multifractal de \mathcal{M} .

THÉORÈME 3. Soit p une distribution régulière. On suppose que le nombre de fils à chaque nœud est borné, que les poids ρ sont i.i.d. et que l'hypothèse 1 est vérifiée. Soit $\tilde{T}(q) = -1 - \log_\mu \mathbb{E} \rho^q$. Alors, le spectre multifractal $D(a)$ de \mathcal{M} est borné par

$$D(a) \leq \inf_{q \in \mathbb{R}} (qa - \tilde{T}(q)). \quad (2)$$

Ce résultat se démontre en utilisant la démarche de Riedi [11]. Nous illustrons ce résultat en estimant la fonction de partition à l'aide des coefficients dominants. Les résultats sont présentés Figure 4.

Références

[1] J.D. Biggins *BHow fast does a General Branching Random Walk spread ?*. Classical and Modern Branching processes, (K.B. Athreya, P. Jagers, eds.). IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer-Verlag, New York, 84, pp. 19–40, 1996.

[2] J.D. Biggins et A.E. Kyprianou *Branching Random Walk : Senata-Heyde norming*. Ann. Prob., 25, pp. 337–360, 1997.

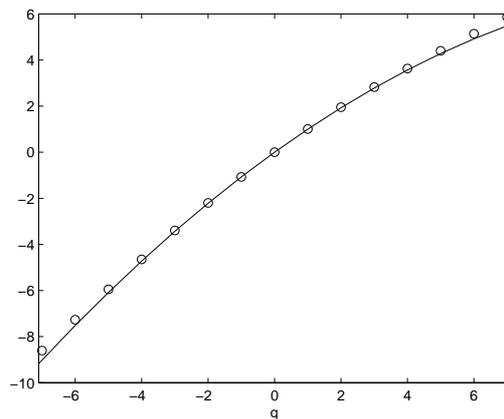


FIG. 4 – Estimation ('o') de la fonction de partition de \mathcal{M} à l'aide de la méthode des coefficients dominants. La courbe en trait plein représente $1 + \tilde{T}(q)$, donné dans le Théorème 3, avec des poids lognormaux.

[3] B.M. Hambly *On constant tail behaviour for the limiting random variable in a supercritical branching process*. J. Appl. Prob., 32(1), pp. 267–273, 1995.

[4] C.C. Heyde *A risky asset model with strong dependence through fractal activity time*. J. Appl. Prob., 36, pp. 1234–1239, 1999.

[5] S. Jaffard, B. Lashermes et P. Abry *Wavelet Leaders in Multifractal Analysis*. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 219–264, 2006.

[6] O.D. Jones. www.ms.unimelb.edu.au/~odj, Page perso de Owen Jones, 2009.

[7] O.D. Jones. *Fast, efficient on-line simulation of self-similar processes*. Thinking in Patterns : Fractals and Related Phenomena in Nature, M.M. Novak Ed., World Scientific 2004, pp. 165–175.

[8] O.D. Jones et Y. Shen. *Estimating the Hurst index of a self-similar process via the crossing tree*. Signal Processing Letters, 11, pp. 416–419, 2004.

[9] O.D. Jones et Y. Shen. *A non-parametric test for self-similarity and stationarity in network traffic*. Fractals and Engineering. New trends in theory and applications. J.Levy-Vehel and E. Lutton (Eds), Springer, pp. 219–234, 2005.

[10] Q. Liu *The growth of an entire characteristic function and the tail probability of the limit of a tree martingale*. Trees, Progress in Probability. Birkhäuser : Verlag Basel, Eds.B.Chauvin, S.Cohen, A.Rouault, 40, pp. 51–81, 1996.

[11] R.H. Riedi *Multifractal processes*. Theory And Applications Of Long-Range Dependence, P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. S. Taqqu, editors, 625–716, 2003.