

# Équilibrage spectral d'une famille de signaux et séquences d'étalement pour le CDMA.

Thierry CHONAVEL<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institut Télécom; Télécom Bretagne, Lab-STICC UMR CNRS 3192  
Technopôle Brest-Iroise, CS 83818, 29238 Brest Cedex 3, France

<sup>2</sup>Université européenne de Bretagne  
thierry.chonavel@enst-bretagne.fr

**Résumé** – Cet article présente une technique de génération de bases orthogonales de signaux, dont les spectres sont optimisés conjointement au moyen d'un critère d'égalisation de l'énergie dans un ensemble de sous-bandes prescrites. Le procédé développé permet en particulier, pour les communications numériques CDMA, de construire en grand nombre des familles de séquences orthogonales dont les spectres sont similaires. On peut ainsi s'affranchir de l'emploi des séquences de mélange dont la synchronisation peut s'avérer délicate dans des contextes tels que les communications sous-marines. On présente ici l'équilibrage obtenu à partir de séquences initiales appartenant à la famille des séquences de Walsh. On illustre de plus l'intérêt de la blancheur spectrale pour la robustesse de la réception vis à vis de canaux multitrajets dans les communications à spectre étalé.

**Abstract** – This paper deals with a new technique for generating orthogonal families of signals with spectra jointly optimized in the following way: the energy of all signals spectra are made even in a set of prescribed frequency sub-bands. In particular, the method proposed in this paper can be used in the context of CDMA communications to build large sets of orthogonal families of signaling sequences, the elements of which having all the same spectra. This enables avoiding scrambling sequences in situations where their use can lead to difficulties, such as in underwater acoustic communications. We present here an example of spectrum balancing, obtained when initializing the procedure with Walsh sequences. In addition, we illustrate the interest of sequences whitness for combating multipath degradations in spread spectrum communications.

## 1 Introduction

En communications à spectre étalé, les utilisateurs émettent simultanément et dans la même bande de fréquences. Ils sont distingués par leurs codes. Classiquement, l'inhomogénéité spectrale des codes est compensée par l'emploi de séquences de mélange (scrambling) qui servent aussi à la séparation de stations de base voisines.

En communications hertziennes, la synchronisation des séquences de scrambling entre les stations de base et les terminaux ne pose pas de gros problèmes. Ainsi, en UMTS, le débit transmis est de 3.84Mchips/s et sur une distance de propagation de 1km, le temps de propagation correspond à  $(10^3/3.10^8) \times 3.84.10^6 \approx 13$  chips. On voit donc que la synchronisation de la séquence de scrambling ne devrait pas être trop compliquée du point de vue de la méconnaissance de la position relative de l'émetteur et du récepteur. Par contre, pour une communication acoustique CDMA (Code Division Multiple Access) sous-marine avec un débit chip de seulement 3.84kchips/s, ordre de grandeur typique pour un environnement sous marin et des distances kilométriques [10], sur la même distance, le temps de propagation correspond à  $(10^3/1.6.10^3) \times 3.84.10^3 = 2400$  chips. On voit donc que dans certaines applications parti-

culières la synchronisation d'une séquence de scrambling peut s'avérer délicate.

Pour ces situations difficiles, plutôt que d'envisager une synchronisation complexe de la séquence de scrambling, on propose ici de fabriquer des familles orthogonales de séquences dont les éléments possèdent des spectres proches de celui d'un bruit blanc dans la bande de fréquence des signaux de code et que l'on puisse fabriquer en grand nombre, afin de pouvoir affecter à chaque station un jeu de codes qui lui est propre, ou même en changer au cours du temps.

Les études menées à ce jour pour modifier une famille orthogonale de signalisation dans la liaison descendante (de la station de base vers les terminaux) d'une communication CDMA en vue de satisfaire de bonnes propriétés spectrales des signaux transmis par les divers utilisateurs sont essentiellement basées sur l'invariance de la famille des matrices de Walsh-Hadamard par transformations orthogonales. Mais les approches proposées dans [4] et [3], qui exploitent le fait que les codes de Walsh restent orthogonaux par permutations simultanées d'éléments binaires de chaque code, ne permettent pas d'assurer que chaque nouvelle famille de codes ainsi générée possède de bonnes

propriétés spectrales.

Afin d'assurer la construction de bases orthogonales dont les spectres sont contrôlés, il est possible de générer des bruits blancs, de les filtrer puis de les orthogonaliser [7]. Un meilleur contrôle de l'allure spectrale est obtenu dans [9] où les spectres sont constants par sous-bandes, l'orthogonalité des signaux étant assurée en imposant que leurs transformées de Fourier dans chaque sous bande soient à un facteur près les éléments d'un code de Hadamard. Mais dans [7] et [9] l'allure temporelle des signaux n'est pas contrôlée. En particulier, les signaux ne sont pas générés au rythme chip, ce qui présente pourtant un intérêt pour pouvoir exploiter les nombreuses techniques de réception adaptées à cette propriété, telle l'égalisation au rythme chip qui constitue un outil très intéressant pour l'égalisation CDMA en liaison descendante [8].

Dans cet article on propose une technique qui ne souffre pas des inconvénients des méthodes précédentes. Pour cela, on a développé une méthode qui recherche des séquences dans l'espace des signaux constants sur chaque temps chip. On se donne donc une base de cet espace (par exemple la base de Walsh-Hadamard) et on cherche une nouvelle base par transformation orthogonale de cette base initiale. Le contrôle du spectre des séquences générées est assuré par l'optimisation d'un critère qui vise à rendre conjointement égales les puissances de ces différentes séquences dans chacune des bandes d'un ensemble de bandes de fréquences que l'on se fixe initialement.

On peut avec ce procédé construire un nombre arbitraire de familles de codes orthogonaux et spectralement équilibrés, ce qui autorise l'emploi de familles de codes distinctes pour des stations de base voisines, en remplacement des séquences de scrambling. De plus, pour une même station de base, il est également possible de faire varier la famille de codes spectralement équilibrés au cours du temps. Finalement, les propriétés de séparation entre stations de base, de blancheur spectrale des signaux transmis et de sécurisation des données apportées par l'emploi de séquences de scrambling peuvent être retrouvées dans l'emploi de séquences spectralement équilibrées.

La section II présente l'algorithme d'équilibrage de base proposé. L'intérêt de l'équilibrage spectral d'un code d'étalement est illustré en section III.

## 2 Equilibrage de bases

Dans [2, 1], on a proposé une technique itérative convergente d'équilibrage de base, visant à partir d'une famille orthonormée à transformer celle-ci en une autre famille orthonormée dont les éléments possèdent tous une proportion identique de leur énergie hors d'une bande de fréquences d'intérêt prescrite.

On présente ici un nouvel algorithme, qui généralise le précédent et qui à partir d'une famille orthonormée de signaux donnée, représentés sous la forme de vecteurs de

taille fixée, la transforme en une autre famille orthogonale dont les éléments possèdent des spectres similaires. Pour cela, on cherche à rendre conjointement égales les énergies des signaux transformés dans un ensemble de sous bandes qui forment une partition de la bande de fréquences des signaux.

Pour un signal échantillonné  $\mathbf{v}_n = ([\mathbf{v}_n]_1, \dots, [\mathbf{v}_n]_N)^T$ , la part de son énergie contenue dans la bande de fréquences  $B = [f_1, f_2]$  est

$$\begin{aligned} E_B(\mathbf{v}_n) &= \sum_{a,b=1}^N [\mathbf{v}_n]_a [\mathbf{v}_n]_b^* e^{i\pi(f_1+f_2)(b-a)} \dots \\ &\quad \times \frac{\sin \pi(f_2-f_1)(b-a)}{\pi(b-a)}, \\ &\triangleq \sum_{a,b=1}^N [\mathbf{v}_n]_a [\mathbf{v}_n]_b^* [\mathbf{S}_B]_{ba}, \end{aligned} \quad (1)$$

où  $[\mathbf{M}]_{ab}$  représente le terme d'indices  $(a, b)$  de la matrice  $\mathbf{M}$ . On se donne ainsi un ensemble de matrices  $\{\mathbf{S}_k\}_{k=0, K-1}$  associée à une partition  $\{B_k\}_{k=0, K-1}$  du support fréquentiel des signaux. Pour des signaux réels, dont le spectre est pair et qui occupent la bande de fréquences  $[-KF, KF]$ , on peut se fixer des bandes de fréquences de la forme

$$B_k = [(-k-1)F, (-k+1)F] \cup [(k-1)F, (k+1)F], \quad (2)$$

et les matrices  $\mathbf{S}_k$  correspondantes sont de la forme

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_0]_{ab} &= \frac{\sin 2\pi F(a-b)}{\pi(a-b)}, \\ &\text{et} \\ [\mathbf{S}_k]_{ab} &= 2 \cos(2\pi kF(a-b)) \times \frac{\sin 2\pi F(a-b)}{\pi(a-b)}, \end{aligned} \quad (3)$$

pour  $k = 1, \dots, K-1$ . Bien que l'extension au cas complexe soit directe, on considère ici le cas de signaux réels, suffisant pour l'application présentée plus loin.

Pour une famille orthonormée  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N]$ , on cherche une transformation  $\mathbf{U}$  telle que les colonnes de la matrice  $\mathbf{W} = \mathbf{V}\mathbf{U}$  aient des spectres proches, en imposant que les énergies  $\{E_B(\mathbf{w}_n)\}_{n=1, N}$  soient identiques pour chacune des bandes  $B$  considérées. Pour réaliser cette opération, on a développé l'algorithme itératif suivant, qui peut être vu comme une généralisation de la méthode proposée dans [1].  $\mathbf{U}$  désignant une matrice unitaire, on notera  $\mathbf{M}_k = \mathbf{U}^T(\mathbf{V}^T \mathbf{S}_k \mathbf{V})\mathbf{U}$ . Les termes diagonaux de  $\mathbf{M}_k$  représentent les énergies des signaux décrits par les vecteurs colonnes de la matrice  $\mathbf{V}\mathbf{U}$  dans la bande  $B_k$ . Le but étant de trouver une transformation  $\mathbf{U}$  qui assure conjointement l'égalité des termes diagonaux de chacune des matrices  $\mathbf{M}_k$ , on procède par actualisations successives de la matrice  $\mathbf{U}$  au moyen de rotations de Givens [5]. Notons  $\mathbf{R}^{ab}(\theta)$  la rotation d'angle  $\theta$  qui opère dans le plan indicé par les coordonnées  $a$  et  $b$ . La transformation  $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}\mathbf{R}^{ab}(\theta)$  se traduit par l'actualisation  $\mathbf{M}_k \rightarrow \mathbf{R}^{ab}(\theta)^T \mathbf{M}_k \mathbf{R}^{ab}(\theta)$ . Pour rendre itérativement les termes de chaque matrice  $\mathbf{M}_k$  identiques, on choisira  $\theta$  comme solution d'un problème de minimisation de la forme  $\theta =$

$\arg \min_{\phi} C(\phi)$ , avec

$$C(\phi) = \sum_{k=0}^{K-1} \left| [R^{ab}(\phi)^T \mathbf{M}_k R^{ab}(\phi)]_{aa} - [R^{ab}(\phi)^T \mathbf{M}_k R^{ab}(\phi)]_{bb} \right|^2. \quad (4)$$

Une valeur modifiée de la valeur  $\theta$  qui minimise  $C$  est fournie dans l'algorithme ci dessous afin d'en assurer la convergence. Cette technique met clairement en avant des idées comparables à celles développées pour la diagonalisation conjointe de matrices (voir par exemple [11]). La procédure de construction des signaux  $\mathbf{w}_k$  peut être résumée comme suit :

- **Initialisation** : choisir  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$  ( $\mathbf{U}_0^T \mathbf{U}_0 = \mathbf{I}$ )  
 $\mathbf{M}_k = \mathbf{U}^T (\mathbf{V}^T \mathbf{S}_k \mathbf{V}) \mathbf{U}$ ,  
 $\mathbf{M}_k^- = \mathbf{0}$  ( $k = 0, \dots, K-1$ )
- **Iterations** :

**tant que**  $\sum_{k=0}^{K-1} \|\mathbf{M}_k - \mathbf{M}_k^-\| \geq \varepsilon$ , ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$\mathbf{M}_k^- = \mathbf{M}_k, (k = 0, \dots, K-1)$$

**boucles**  $a = 1 \rightarrow N-1$ ,  $b = a+1 \rightarrow N$   
 $\theta = \frac{1}{4} \arctan \left( \frac{2 \sum_{k=0}^{K-1} ([\mathbf{M}_k]_{ab} + [\mathbf{M}_k]_{ba})([\mathbf{M}_k]_{aa} - [\mathbf{M}_k]_{bb})}{\sum_{k=0}^{K-1} ([\mathbf{M}_k]_{ab} + [\mathbf{M}_k]_{ba})^2} \right)$   
 $\mathbf{M}_k = \mathbf{R}^{(a,b)}(\theta) \mathbf{M}_k \mathbf{R}^{(a,b)}(-\theta)$ , ( $k = 0, \dots, K-1$ )  
 $\mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{R}^{(a,b)}(-\theta)$

**fin boucles**

**fin tant que**

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} \mathbf{U}.$$

Pour chaque initialisation de  $\mathbf{U}_0$ , les colonnes de la matrice  $\mathbf{W}$  obtenue forment une famille de codes différente.

La figure 1 montre une croissance modérée de l'amplitude des maxima des séquences fournies par l'équilibrage. Pour des séquences équilibrées de longueur  $K$  la densité de probabilité de leur maximum prend la forme approchée

$$p_K(z) \approx K^2 \frac{2K}{\pi} e^{-\frac{K}{2} z^2} \left( \operatorname{erf} \left( z \sqrt{\frac{K}{2}} \right) \right)^{K^2-1}. \quad (5)$$

### 3 Application aux codes de Walsh

Sur la figure 2, on présente un équilibrage spectral des codes de Walsh de longueur 8 et 32. Le spectre est décomposé en  $K = 8$  et 32 sous bandes  $\{B_k\}_{k=0, K-1}$  respectivement. Les séquences échantillonnées comportent échantillons par temps-chip. La convergence est obtenue pour un nombre d'itérations allant de cent à quelques centaines.

On illustre l'intérêt de l'équilibrage spectral du point de vue du niveau d'interférence intersymbole résiduelle des codes en sortie d'une communication à spectre étalé. On considère ici une modulation QPSK des symboles étalés

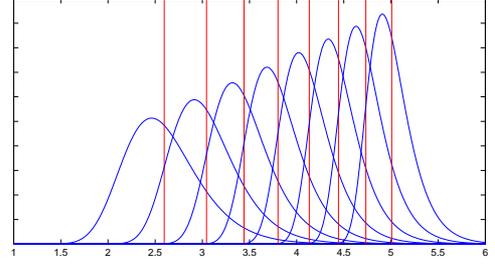


FIG. 1 – Distribution du maximum de l'ensemble des séquences de longueurs 8, 16, ..., 1024. Les valeurs moyennes du maximum sont indiquées en rouge.

et un récepteur RAKE, dont on sait qu'il est fortement affecté par l'interférence inter-symboles résiduelle [12].

La figure 3 fournit l'histogramme de l'erreur absolue de l'interférence résiduelle obtenue pour une transmission mono-utilisateur à spectre étalé, moyennée sur les différents codes précédents, ainsi que la probabilité d'erreurs correspondante calculée analytiquement à partir de l'histogramme des interférences. Sur l'histogramme, l'amplitude des symboles est normalisée à 1.

Pour obtenir ces résultats, on a simulé 1000 canaux, de réponse impulsionnelle aléatoire et de durée égale au temps symbole, à coefficients gaussiens complexes circulaires de variance totale égale à 2 et dont l'enveloppe décroît exponentiellement avec un facteur uniforme sur  $[0, 1]$ ; Les coefficients  $(h_t)_{t=0,7}$  de la réponse impulsionnelle échantillonnée au temps chip sont de la forme  $h_t \sim 10^{-\alpha t} b_t$ , où  $\alpha \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$  et  $b_t \sim \mathcal{NC}(0, 2)$ .

L'histogramme de l'interférence  $X$  sur chaque voie est de la forme

$$\begin{aligned} \text{Hist}(x) &= \sum_{i=1}^N p_i \mathbb{I}_{[-\delta/2, \delta/2]}(x - x_i) \\ p_i &\approx P(X \in [x_i - \delta/2, x_i + \delta/2]). \end{aligned} \quad (6)$$

On en déduit la probabilité d'erreur correspondante qui prend la forme

$$\begin{aligned} P_e &= \int \frac{p(x)}{2} \operatorname{erfc} \left( (1+x) \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{2} \operatorname{erfc} \left( (1+x_i) \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Dans le même esprit, des formules analytiques ont été proposées pour le calcul de probabilités d'erreur pour des systèmes CDMA en présence d'un nombre fini de niveaux d'interférence équiprobables dans [6].

L'amélioration de la probabilité d'erreur obtenue avec les séquences équilibrées illustre l'intérêt d'un étalement spectral optimisé pour chaque séquence.

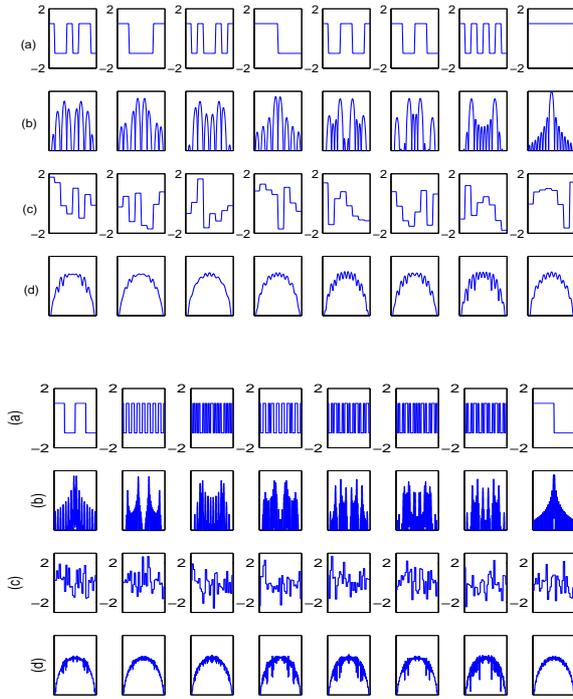


FIG. 2 – (a) codes de Walsh de longueur 8 et 32 (b) spectres correspondants (c) codes spectralement équilibrés (d) spectres des codes équilibrés.

## 4 Conclusion

Au delà des exemples proposés, on a présenté ici un algorithme qui permet d'obtenir des bases de signaux orthogonales et de spectres semblables dans un espace de signaux fixé.

## Références

- [1] Th. Chonavel. Bases équilibrées et signalisation multidimensionnelle. In *Actes du colloque GRETSI*, pages 243–258, Troies, France, septembre 2007.
- [2] Th. Chonavel. Modulations de phase multidimensionnelles. In *Actes des ateliers TAIMA*, pages 385–396, Hammamet, Tunisie, mai 2007.
- [3] S.S. Ghassemzadeh and M.J. Sherman. Method for whitening spread spectrum codes, us patent 7075968 b1, 2006.
- [4] T.R. Giallorenzi, S.C. Kingston, L.A. Butterfield, W.T. Ralston, L.L. Nieczyporowicz, and A.E. Lundquist. Non recursively generated orthogonal pn codes for variable rate cdma, us patent 6091760, 2000.
- [5] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix computation, third edition*. Johns Hopkins, 1996.

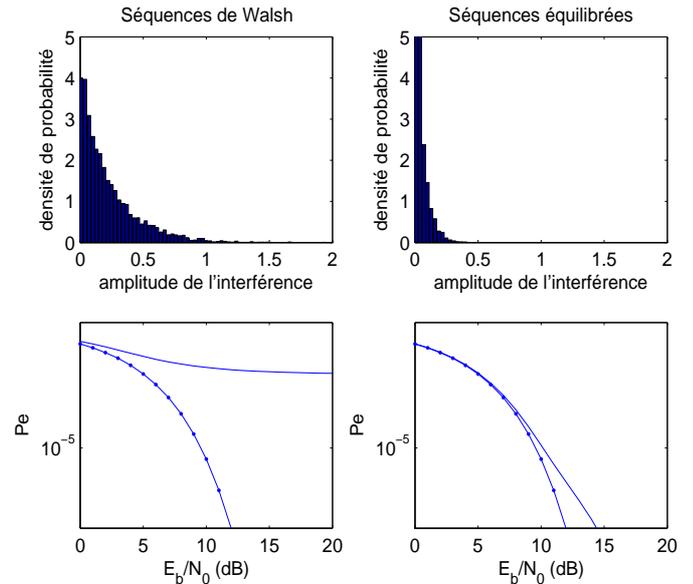


FIG. 3 – Histogrammes de l'interférence moyenne et probabilité d'erreur mono-utilisateur : codes de Walsh (à gauche) et codes équilibrés (à droite).

- [6] E. hardouin and C. Laot. Improved probability estimation for ds-cdma downlink equalizer-based receivers with small spreading factor. In *Proc. ICT 2003*, Indonésie, feb. 2003.
- [7] B.J. Hunsinger and D.D. Kumar. Method and system for simultaneously broadcasting and receiving digital and analog signals, us patent 6563880 b1, 2003.
- [8] T.P. Krauss, M.D. Zoltowski, and G. Leus. Simple mmse equalizers for cdma downlink to restore chip sequence : comparison to zero-forcing and rake. In *Proc. IEEE Proceedings of the Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP) 2000*, volume 2, pages 2865–2868, Indonésie, 2000.
- [9] B. Lozach, J. Bollo, and A. Le Guyader. method for generating mutually orthogonal signals having a controlled spectrum, organisation mondiale de la propriété intellectuelle, n° de publication : W0 2008/122744 a1, 2008.
- [10] Karim Ouertani, Samir Saoudi, Mahmoud Ammara, and Sébastien Houcke. Performance du récepteur rake pour des applications de communications discrètes à travers un canal acoustique sous-marin. In *Actes du colloque GRETSI*, pages 309–312, Troies, France, septembre 2007.
- [11] F. Theis and Y. Inouye. On the use of joint diagonalization in blind signal processing. In *Proc. ISCAS 2006*, Kos, Grèce, 25-28 octobre 2006.
- [12] S. Verdú. *Multiuser detection*. Cambridge University Press, 1998.