

# Une Approche Géométrique de la Séparation Aveugle de Sources

Cosmin LAZAR<sup>1,2</sup>, Danielle NUZILLARD<sup>1</sup>, Patrice BILLAUDEL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CReSTIC URCA,  
Moulin de la Housse, BP 1039, 51089 Reims cedex 2, France

<sup>2</sup>IFTS URCA,  
08000 Charleville, France

Cosmin.lazar, Danielle.nuzillard, Patrice.billaudel@univ-reims.fr

**Résumé** – Le problème de la Séparation Aveugle de Sources est abordé sous l’angle géométrique. Le modèle de mélange linéaire étant une transformation géométrique de l’espace des sources, les coefficients de la matrice de mélange peuvent être facilement retrouvés si les bords de la distribution des sources sont connus. Dans cette approche simple et intuitive, les vecteurs colonne de la matrice de mélange sont retrouvés par la recherche des points situés aux extrémités de l’espace des observations. Les résultats sont meilleurs que ceux obtenus les algorithmes classiques si le signal n’est pas bruité, les performances se dégradent si le RSB est de l’ordre de 40 dB à 50 dB.

**Abstract** – The problem of Blind Source Separation is approached from the geometrical point of view. The mixture model is a linear geometric transformation of the sources, the coefficients of the mixing matrix can be easily found if the edges of distribution of sources are known. In this simple and intuitive approach, vectors column of the matrix mixture are found by searching for points at the ends of space observations. The results are better than those obtained with conventional algorithms when the signal is not noisy, the performance is degraded if the SNR is about 40 dB to 50 dB.

## 1 Représentation géométrique du modèle de mélange linéaire

Une nouvelle approche pour résoudre le problème de la séparation des mélanges linéaires est proposée. Elle repose sur l’interprétation géométrique du modèle de mélange, idée qui apparaît pour la première fois dans [1], puis dans [2] et a ensuite été généralisée aux cas où il y a plus de sources que d’observations [3]. La méthode proposée est applicable pour l’extraction de sources non négatives à partir de mélanges dont les coefficients sont non négatifs. Les sources ne sont pas nécessairement bornées mais doivent vérifier certaines conditions.

Pour des raisons de simplicité, considérons le cas de 2 sources uniformes *indépendamment et identiquement distribuées (i.i.d.)*, non négatives, de distribution bornée  $[0, 1]$ . Dans le plan  $(s_1, s_2)$ , chaque instant  $i$  est représenté par un point  $(s_1^i, s_2^i)$  et tous les points dans l’espace des sources sont contenus dans le cône dont les génératrices sont définies par l’origine (le point  $(0, 0)$ ) et les points  $(0, 1)$  respectivement  $(1, 0)$ . La particularité de ces deux vecteurs est que l’angle défini par ces derniers a la valeur maximale. Tous les points de la forme  $(0, s_2^i)$  et  $(s_1^j, 0)$  se retrouvent sur ces génératrices. On appelle ces points *les points extrêmes* de la distribution.

De manière évidente, l’effet du modèle de mélange linéaire sur les sources est une transformation géométrique dans l’espace de représentation. Cette transformation géométrique fait que dans l’espace des observations  $X$ , les données restent toujours à l’intérieur des génératrices d’un autre cône. Comme la transformation géométrique du mélange linéaire s’applique sur tous les points  $(s_1^i, s_2^j)$ , elle s’applique implicitement sur les points extrêmes définissant les génératrices du cône initial ; les

points extrêmes vont toujours garder le plus grand angle parmi toutes les autres paires de points. Ces points se retrouvent sur les génératrices du nouveau cône qui enferme toutes les données  $X_i$ . Sous certaines hypothèses ces points représentent les vecteurs de mélange multipliés par un facteur d’échelle. Une approche par déflation a également été proposée dans [4].

## 2 Notre approche

### 2.1 Deux sources

Soit  $X \in \mathbb{R}^{2 \times n}$  la matrice des observations, où  $X^{2 \times n} = A^{2 \times 2} S^{2 \times n}$ . Nous supposons que :

1. les sources  $s_1$  et  $s_2$  sont distribuées aléatoirement et  $s_1 \geq 0$  et  $s_2 \geq 0$ ,
2.  $\exists$  au moins une réalisation  $i$  telle que  $s_1^i \neq 0$  et  $s_2^i = 0$  (la première source est active et la seconde est inactive),
3.  $\exists$  au moins une réalisation  $j$  telle que  $s_1^j = 0$  et  $s_2^j \neq 0$  (la première source n’est pas active et la seconde est active).

Si les conditions 1, 2 et 3 sont satisfaites, on peut écrire la proposition suivante :

**Proposition 1** *Les points extrêmes de la matrice d’observations  $X$  représentent les vecteurs colonne de la matrice  $A$  multipliés par un facteur d’échelle. Ils peuvent être retrouvés comme étant la paire des points  $(X_k, X_l)$ ,  $X_{k,l} \in X$  pour laquelle l’angle :*

$$\alpha(X_k, X_l) = \arccos \frac{X_k^T X_l}{\|X_k\| \|X_l\|}$$

est maximal parmi toutes les autres paires de points de l'ensemble  $X$ .

*Démonstration* : La démonstration se base sur deux observations :

1. l'effet du modèle de mélange linéaire sur les données source est une transformation géométrique dans l'espace de représentation,
2. une transformation géométrique d'un ensemble de données a le même effet que si on l'effectuait sur l'ensemble des données normalisées. Autrement dit, les vecteurs de l'ensemble  $X = AS$  et de l'ensemble  $X_{norm} = AS_{norm}$  ont la même direction. Cette observation est illustrée dans les figures 1 et 2 pour deux et trois sources respectivement.

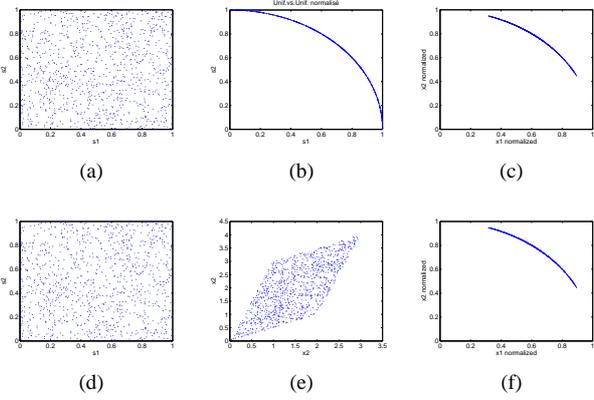


FIG. 1 – Première ligne : a) deux sources uniformes, b) deux sources uniformes - chaque instant  $i$  est normalisé, c) mélange des deux sources après la normalisation de chaque instant  $i$ . Deuxième ligne : d) deux sources uniformes, e) représentation du mélange de deux sources uniformes, f) représentation du mélange de deux sources après la normalisation de chaque instant du mélange.

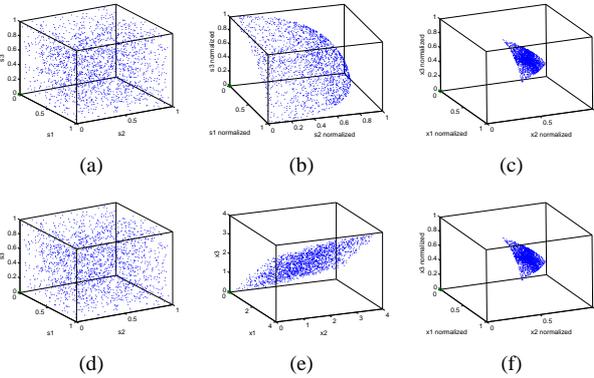


FIG. 2 – Première ligne : a) trois sources uniformes, b) trois sources où chaque instant  $i$  est normalisé, c) mélange des trois sources après la normalisation de chaque instant  $i$ . Deuxième ligne : d) trois sources uniformes, e) mélange de trois sources uniformes, f) mélange de trois sources après la normalisation de chaque instant du mélange.

Soit  $A$  ( $2 \times 2$ ) la matrice de mélange

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

soit  $S$  la matrice de sources

$$S = \begin{pmatrix} s_1^1 & \cdots & 0 & \cdots & s_1^i & \cdots & s_1^n \\ s_2^1 & \cdots & s_2^j & \cdots & 0 & \cdots & s_2^n \end{pmatrix} \quad (2)$$

alors la matrice des observations est  $X = AS$

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & a_{12}s_2^j & \cdots & a_{11}s_1^i & \cdots & x_1^n \\ x_2^1 & \cdots & a_{22}s_2^j & \cdots & a_{21}s_1^i & \cdots & x_2^n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Les matrices des sources normalisées et des mélanges normalisés sont respectivement les matrices  $S_{norm}$  et  $X_{norm}$ .

$$S_{norm} = \begin{pmatrix} s_{1norm}^1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & s_{1norm}^n \\ s_{2norm}^1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & s_{2norm}^n \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$X_{norm} = \begin{pmatrix} x_{1norm}^1 & \cdots & a_{12} & \cdots & a_{11} & \cdots & x_{1norm}^n \\ x_{2norm}^1 & \cdots & a_{22} & \cdots & a_{21} & \cdots & x_{2norm}^n \end{pmatrix} \quad (5)$$

Dans la matrice  $X_{norm}$ , les  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  colonnes représentent les vecteurs colonnes de la matrice de mélange. Les vecteurs de mélange peuvent être ainsi déterminés comme étant les points extrêmes de la matrice  $X_{norm}$ . Ceux-ci représentent la paire de points  $(X_{inorm}, X_{jnorm})$  pour lesquels l'angle entre eux défini par  $\arccos(X_{inorm}^T X_{jnorm})$  est maximal parmi toutes les autres paires de points de l'ensemble  $X_{norm}$ . En remplaçant  $X_{inorm}$  et  $X_{jnorm}$  par  $\frac{X_i}{\|X_i\|}$  et par  $\frac{X_j}{\|X_j\|}$ , la proposition est démontrée.

Cette proposition est généralisable pour  $p$  sources avec les hypothèses suivantes.

## 2.2 P sources

Soit  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  la matrice des observations, où  $X^{m \times n} = A^{m \times p} S^{p \times n}$ . Nous supposons que :

1. les sources  $s_1, s_2, \dots, s_p$  sont distribuées aléatoirement et  $s_1, s_2, \dots, s_p \geq 0$ ,
2. pour chaque source  $k, k \in [1, p], \exists$  au moins une réalisation  $i$  telle que  $s_k^i \neq 0$  et  $\forall j \in [1, p], s_{j,j \neq k}^i = 0$  (la  $k^{\text{ème}}$  source est active et les autres sont inactives).

**Proposition 2** Les points extrêmes de la matrice d'observations  $X$  représentent les vecteurs colonne de la matrice  $A$  multipliés par un facteur d'échelle. Ils peuvent être retrouvés comme étant le  $p$ -uplet des points  $X_p \in X$  pour lequel la somme des angles entre toutes paires de points définies sur le  $p$ -uplet est maximale parmi tous les autres  $p$ -uplets de l'ensemble  $X$ .

Il est à noter que si les hypothèses sont vérifiées la normalisation est suffisante et qu'il n'est nécessaire pas que les sources soient bornées. Les données sont projetées à chaque instant sur l'hypersphère de rayon unité, il suffit de rechercher l'angle solide maximum du polyèdre image de la matrice de mélange pour accéder aux vecteurs de mélange. En pratique, le fait d'avoir des données dont les distributions sont bornées avec une pdf non nulle près des bornes augmente la probabilité que les hypothèses soient vérifiées. Dans [1], les auteurs

remarquent que le parallélogramme de la distribution des données apparaît clairement pour des distributions bornées, ils estiment les pentes du parallélogramme, en déduisent la matrice de mélange et l'inversent.

### 3 Algorithme

Si la matrice d'observations  $X$  est obtenue à partir d'un mélange linéaire des sources *i.i.d.*, l'algorithme se résume en 2 étapes :

---

**Algorithm 1** Pseudocode de l'algorithme PExSAS (Séparation Aveugle de Sources par la recherche des Points Extrêmes)

---

1. Projection des observations  $X_i$  sur la sphère unité :

$$X_i = \frac{X_i}{\|X_i\|} \quad (6)$$

Suite à cette normalisation tous les points se trouvent sur le cercle unité ou dans une région sur la surface de la sphère (ou hypersphère) unité, comme illustré dans la Fig.2(f) pour 3 sources.

2. Sur la surface de la sphère (ou hypersphère) unité, on cherche le *p-uplet* qui maximise la fonction :

$$\sum_{i,j=1:p;i \neq j} \arccos(x_i^T x_j) \quad (7)$$

Ces points représentent les extrémités de la distribution des points sur la sphère unité et constituent les vecteurs colonne de la matrice de mélange.

---

## 4 Evaluation et Comparaison

L'algorithme a été testé avec des sources dont les fdps sont : a) gaussienne, b) Gamma, c) uniforme, d) Beta, e) exponentielle, f) un mélange de deux gaussiennes, g) un mélange de trois gaussiennes.

L'erreur d'Amari [8] a été utilisée comme critère de performance, elle est définie par l'équation (8).

$$d(A, W) = \frac{1}{2p(p-1)} \sum_{i=1}^p \left( \frac{\sum_{j=1}^p |b_{ij}|}{\max_j |b_{ij}|} - 1 \right) + \frac{1}{2p(p-1)} \sum_{j=1}^p \left( \frac{\sum_{i=1}^p |b_{ij}|}{\max_i |b_{ij}|} - 1 \right) \quad (8)$$

où  $b_{ij} = (AW_{ij}^{-1})$  et  $W$  est la matrice de mélange estimée. L'indice vaut zéro si l'estimation est parfaite.

### 4.1 Trois sources

Les sources ont été tirées aléatoirement à partir de trois distributions (dont les notations a, b, c, d, e, f, g, sont celles définies ci-dessus). Les performances de l'algorithme proposé restent comparables avec celles des algorithmes FastICA [5] et

JADE [6] et de plus, elles sont meilleures que celles des méthodes de séparation par factorisation en matrices non-négatives [7] [9], tableau 1. Les meilleures performances sont obtenues si les sources sont exponentielles.

Il est à noter que si on considère d'une part l'espace des sources défini par les vecteur-sources  $v_1 = (1, 0, 0)^T$ ,  $v_2 = (0, 1, 0)^T$ ,  $v_3 = (0, 0, 1)^T$ , et d'autre part une matrice de mélange  $A$  qui est l'identité, alors en appliquant le mélange à 3 vecteurs dont le vecteur  $v_1$  et le vecteur  $v = (0, 1, 1)^T$  par exemple, l'hypothèse 2 menant à la proposition 2, sous-section 2.2 n'est pas vérifiée, l'angle entre  $(v_1, v)$  est maximal mais la somme des angles  $(v_1, v) + (v, v_2)$  n'est pas maximale. La somme maximale est celle entre les angles  $(v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1)$ .

### 4.2 Quatre sources

En augmentant le nombre de sources, les performances de l'algorithme proposé se dégradent, tableau 2. Pourtant, quand les sources sont des distributions exponentielles, ses performances restent dans des limites acceptables par rapport aux algorithmes utilisés pour la comparaison. Ceci est dû au fait que si les distributions exponentielles favorisent les hypothèses de l'algorithme.

### 4.3 Influence du niveau du bruit

L'influence du niveau de bruit sur les performances de l'algorithme proposé a été étudié en superposant un bruit à la matrice d'observations  $X$ . Les résultats sont présentés dans la figure 3. Si le RSB est très grand, les performances de séparation de l'algorithme PExSAS mesurées par l'erreur d'Amari sont supérieures à celles des autres algorithmes pour des sources exponentielles. Par contre, l'algorithme proposé est très sensible au bruit, au-delà de 40 dB les résultats se dégradent, ce qui fait qu'une méthode de réduction de bruit doit précéder la séparation dans le cas des observations noyées dans du bruit.

Dans [1] et [2], les auteurs considèrent des sources dont la pdf est uniforme, et relient le taux de diaphonie résiduelle à l'erreur sur comise sur le calcul des pentes du cône. Une méthode qui utilise le maximum de vraisemblance d'une distribution de points le long des génératrices du cône doit permettre de s'affranchir du bruit de manière plus robuste.

### 4.4 Discussion

Chaque vecteur de mélange est estimé par une recherche exhaustive parmi les points qui maximisent le critère (7). Le premier vecteur de mélange correspond au point dont l'angle solide est le plus important par rapport à un point choisi aléatoirement ; le deuxième correspond au point dont l'angle solide est le plus grand par rapport au premier et ainsi de suite. Le coût de la méthode augmente en  $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$  où  $p$  est le nombre de sources.

La précision de la méthode ne dépend pas du nombre d'échantillons si les sources satisfont l'hypothèse 2, sous-section 2.2.

	<i>Fdp</i> sources	FastICA	JADE	NMF ALS	NMF (Lee-Seung)	PEXSAS
1	c+c+c	0.1159	<b>0.0357</b>	0.1666	0.4303	0.0675
2	c+d+e	0.1538	0.0960	0.1256	0.2319	<b>0.0454</b>
3	d+e+f	0.1327	<b>0.0855</b>	0.2128	0.4402	0.1247
4	e+e+e	0.1612	0.0824	0.0853	0.2154	<b>0.0298</b>

TAB. 1 – Erreur d’Amari pour 3 sources et 1 000 données pour un  $RSB = 50$  dB. Les *fdp* des sources sont indiquées dans la deuxième colonne. Les résultats représentent la moyenne de 100 essais. Les distributions sont bornées  $[0 \infty)$ . Les meilleurs taux de séparation sont mis en évidence.

	<i>Fdp</i> sources	FastICA	JADE	NMF ALS	NMF (Lee-Seung)	PEXSAS
1	c+c+c+c	0.0257	<b>0.0168</b>	0.5216	0.6976	0.6538
2	e+e+e+e	0.2443	<b>0.0400</b>	0.3607	0.6493	<b>0.0779</b>
3	c+d+e+f	<b>0.0518</b>	0.0523	0.4855	0.6660	0.6266

TAB. 2 – Erreur d’Amari pour quatre sources et 10 000 données dans le cas d’un  $RSB = 50$  dB. Les *fdp* des sources sont indiquées dans la deuxième colonne du tableau. Les résultats représentent la moyenne de 100 essais. Les distributions sont bornées  $[0 \infty)$ . Les meilleurs taux de séparation sont mis en évidence dans le tableau.

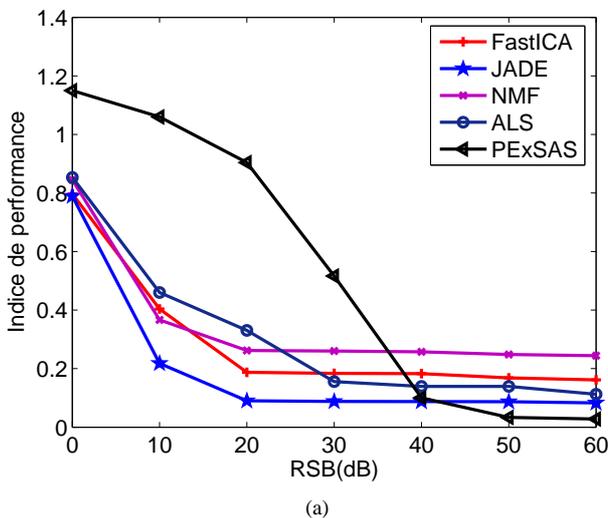


FIG. 3 – Performances en fonction du niveau de bruit ; comparaison avec les méthodes FastICA, JADE, NMF et NMF-ALS ;  $p = 3$  sources,  $m = 10$  vecteurs d’observations et  $n = 1000$  instances, la distribution des sources est exponentielle.

Sinon, la précision décroît quand le nombre de sources augmente.

Dans [10], les auteurs considèrent des sources non gaussiennes, unimodales et symétriques, en utilisant une méthode qui calcule la densité de probabilité des observations projetées sur le cercle unité, ils améliorent la qualité des résultats et diminuent fortement (par 100) les coûts de calculs.

## Références

- [1] A. Puntonet, A. Mansour, C. Jutten, *A geometrical Algorithm for Blind Separation of Sources*, GretsI’95, Juanles-Pins, pp. 273–276, 18-21 septembre 1995.
- [2] A. Puntonet, C. Prieto, *An adaptive geometrical procedure for blind separation of sources*, Neural Processing Letters, vol. 2, n. 5, pp. 23–27, 1995.
- [3] F. J. Theis, E. W. Lang, C. G. Puntonet, *A geometric algorithm for overcomplete linear ICA*, Neurocomputing n. 56, pp. 381–398, 2004.
- [4] P. Georviev, D. Nuzillard, A. Ralescu, *Sparse Deflations in Blind Signal Separation*, in proc. Independent Component Analysis and Blind Source Separation (ICA’06), Charleston USA, 2006.
- [5] A. Hyvärinen, *Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis*, IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 10, n. 3, pp. 626–634, 1999.
- [6] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, *Blind beamforming for non Gaussian signals*, IEE Proc.-F, vol. 140, n. 6, pp. 362–370, 1993.
- [7] D. Lee and H. Seung, *Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization*, Nature vol. 401, pp. 788–791, 1999.
- [8] S. Amari, A. Cichocki and H. H. Yang, *A new learning algorithm for blind signal separation*, Proc. of Neural Information Processing Systems, NIPS 96, vol. 8 pp. 757–763, 1996.
- [9] P. Paatero, *Least squares formulation of robust non-negative factor analysis*, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 37, pp 23–35, 1997.
- [10] F. J. Theis, A. Jung, C. G. Puntonet, E. W. Lang, *Linear geometric ICA : Fondamentals ans Algorithms* geometric algorithm for overcomplete linear ICA, Neural Computation 15, 419-4339, 2003.