

# Approximation de l'axe médian pour les objets discrets avec prise en compte de la courbure

Julien DARDENNE<sup>1,2</sup>, Sébastien VALETTE<sup>1</sup>, Nicolas SIAUVE<sup>2</sup>, Rémy PROST<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université de Lyon, CREATIS-LRMN, CNRS UMR5220, Inserm U630;INSA-Lyon, Université de Lyon 1, France.

<sup>2</sup>Université de Lyon, AMPERE, CNRS UMR5005, Université de Lyon 1, France.

<sup>1</sup>prénom.nom@creatis.insa-lyon.fr

<sup>2</sup>prénom.nom@univ-lyon1.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous considérons le problème d'approximation de l'axe médian à partir d'un objet discret (image ou volume). Nous proposons une méthode d'approximation de l'axe médian basée sur des diagrammes de Voronoï contraints qui s'adapte à la forme d'un objet. Les diagrammes résultants sont filtrés pour capturer la topologie de l'axe médian. La méthode est testée sur des données synthétiques et sur des données réelles. Les résultats montrent que notre méthode est robuste aux conditions typiques de niveau de bruit dans les données discrètes.

**Abstract** – In this paper, we consider the medial axis approximation from a discrete object (image or volume). The proposed approach is based on the shape boundary subsampling via a clustering approach which generates a Voronoï Diagram well suited for Medial Axis extraction. The resulting Voronoï Diagram is further filtered so as to capture the correct topology of the medial axis. The method is tested on various synthetic and real images. The resulting medial axis is robust with respect to typical noise in the discrete data.

## 1 Introduction

Depuis les quarante dernières années, l'axe médian a été un sujet de recherche constant et a été proposé en reconnaissances de formes, en reconstruction de surfaces, dans le contrôle des animations, pour la génération de maillages et dans de nombreuses autres applications [2, 4, 6]. L'axe médian d'une forme fournit une représentation compacte de ses caractéristiques géométrique et topologique. Une définition concise de l'axe médian (ou squelette d'une forme) dans le cas continu a été donné par Blum [1], celle-ci postule l'analogie bien connue de la "prairie en feu" (i.e "grassfire analogy", figure 1 (a)). Dans la figure 1 (b), du bruit est ajouté à la forme originale et son axe médian est calculé. Nous pouvons voir que l'axe médian est très sensible aux bruits. En effet, des petites perturbations sur la frontière introduisent des "pics" dans l'axe médian. L'axe médian peut aussi être défini comme l'ensemble des centres des cercles maximaux passant par la frontière de la forme. Les définitions données ci-dessus sont formulées dans l'espace continu. Cependant, la plus part des applications nécessitent l'approximation de l'axe médian de données discrètes, tel que celles acquises avec des scanners médicaux. Dans le cas discret, les définitions sont analogues au cas continu.

Dans la figure 1 (d), nous calculons l'axe médian discret de la forme (c) où l'on a ajouté du bruit sur la frontière de la forme. Notre approche d'extraction de l'axe médian discret est robuste au bruit et la topologie de l'axe médian est exacte.

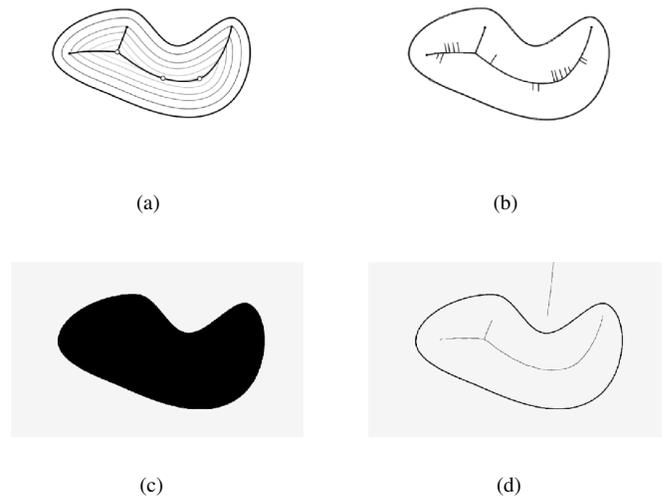


FIG. 1 – Représentation de l'analogie bien connue de la "prairie en feu" (i.e "grassfire analogy") pour l'extraction de l'axe médian (a). Calcul de l'axe médian de la frontière bruitée  $\partial_o$  d'une forme dans le cas continu (b). Pour notre approche, l'extraction de l'axe médian est robuste au bruit (d) pour l'image bruitée définie en (c).

## 2 Etat de l'art

Dans ce paragraphe, nous donnons un bref état de l'art des différentes approches d'extraction de l'axe médian continu et discret. Cet état de l'art est loin d'être complet en raison du grand nombre de méthodes publiés. Les approches peuvent être organisées en trois classes :

- fonction de distance,
- érosion morphologique,
- approche de type Voronoï.

### Fonction de distance

Le lieu des points de l'axe médiant coïncide avec les singularités de la fonction de distance à la frontière. Une fonction de distance, ou champ de distance  $D$ , est définie à une forme  $o$  par la plus petite distance entre un point de la frontière de la forme et le point  $x$  :

$$D(x) = \min_{x \in \partial_o, y \in S} (d(x, y)) \quad (1)$$

où  $d$  est une mesure de distance. Les maxima locaux de cette fonction de distance, ou les discontinuités correspondantes de ses dérivées, sont alors détectés. Ils (elles) indiquent un point de l'axe médian. Dans [2], Coeurjolly et al. présentent un algorithme optimal pour le calcul de l'axe médian discret. Cette transformation consiste à étiqueter tous les points de l'objet par la distance minimale au bord.

### Erosion morphologique

L'érosion morphologique est basée sur le principe de la "prairie en feu" et opère par l'érosion des points à partir de la frontière de l'objet, jusqu'à l'obtention d'une ligne de points ou l'érosion n'est plus possible. Les algorithmes d'érosion opèrent dans l'espace discret. Ils sont utilisés sur les données pixeliques et voxelliques en reconnaissance des formes et en analyse d'images.

### Approche de type Voronoï

Les diagrammes de Voronoï (DV) peuvent être définis comme  $n$  cellules distinctes (ou regions)  $C_i$  tels que :

$$C_i = \{w \in \Omega | d(w, z_i) < d(w, z_j) j = 1, 2, \dots, n, j \neq i\} \quad (2)$$

où  $d$  est une mesure de distance.

L'axe médian est représenté comme un sous-ensemble de la frontière des cellules de Voronoï qui sont définis à partir de la frontière  $\partial_o$ . Les éléments de l'axe médian sont les ensembles de points équidistant à, au moins, deux points de la frontière. Leur union représente une symétrie locale de la forme. Il a été montré (pour le cas bi-dimensionnel dans [4] et pour le cas tri-dimensionnel dans [6]) que sous certaines conditions d'échantillonnage et lorsque la distribution de cellules augmente, les sommets du diagramme de Voronoï d'un ensemble de points frontières converge vers l'axe médian. Dans le

cas continu, l'approximation de l'axe médian à partir de diagrammes de Voronoï a été réalisé [6]. Le Diagramme de Voronoï est déduit de la triangulation de Delaunay et un filtrage est appliqué sur le DV pour approximer l'axe médian. Dey et Zhao [6] calculent un sous-ensemble d'arêtes et de facettes de Voronoï localisé à l'intérieur de la surface de l'objet. Ils réalisent un filtrage des sommets de Voronoï et de leurs éléments incidents avec un critère basé sur l'aspect et l'angle des éléments.

Dans le cadre de l'analyse d'image médicale, les données réelles venant de scanner tomographique ou d'imagerie par résonance magnétique représentent un grand flux de donné et peuvent être bruité. Le calcul de l'axe médian nécessite alors beaucoup de temps de calcul et sa représentation est souvent dense à cause du bruit présent dans les données. Il y a deux challenges pour calculer un axe médian avec ce type de donnée :

- L'axe médian est hautement instable aux petits détails dans la forme.
- Seulement une approximation discrète de l'axe médian est connue et l'échantillonnage est dépendant de la distribution des points d'entrée.

## 3 Notre approche

La figure 2 résume notre approche. Elle est consituée de trois étapes. Nous calculons, dans un premier temps, une carte de distance euclidienne discrète  $g$  (b) à partir de la frontière de la forme (a). Nous calculons ensuite la matrice hessienne  $\mathbf{H}(g)$ , ses valeurs propres et ses vecteurs propres associés. (c) illustre le vecteur propre principal de  $\mathbf{H}(g)$ . La courbure (equation (6)) est utilisée pour générer une fonction de densité  $\rho$  (d). La seconde étape consiste à construire un diagramme de Voronoï Centroidal Constraint (e) par une approche variationnelle en utilisant la fonction de densité  $\rho$  (d). Dans une dernière étape nous filtrons les éléments des cellules frontières de ce diagramme afin d'obtenir une approximation cohérente de l'axe médian (f).

### 3.1 Définitions

Nous pouvons noter que notre domaine d'étude  $\Omega$  peut s'écrire par l'union des objets  $O_i$  :

$$\Omega = \cup_i O_i \quad (3)$$

Une frontière entre deux objets  $\partial_{O_i, j}$  est constituée de l'ensemble des pixels de l'objet  $O_i$  voisins de l'objet  $O_j$ . Nous définissons les frontières du domaine par  $\partial_o$  :

$$\partial_o = \partial_\Omega \cup [\cup_{i, j} \partial_{O_i, j}] \quad (4)$$

où  $\partial_\Omega$  représente la frontière du domaine.

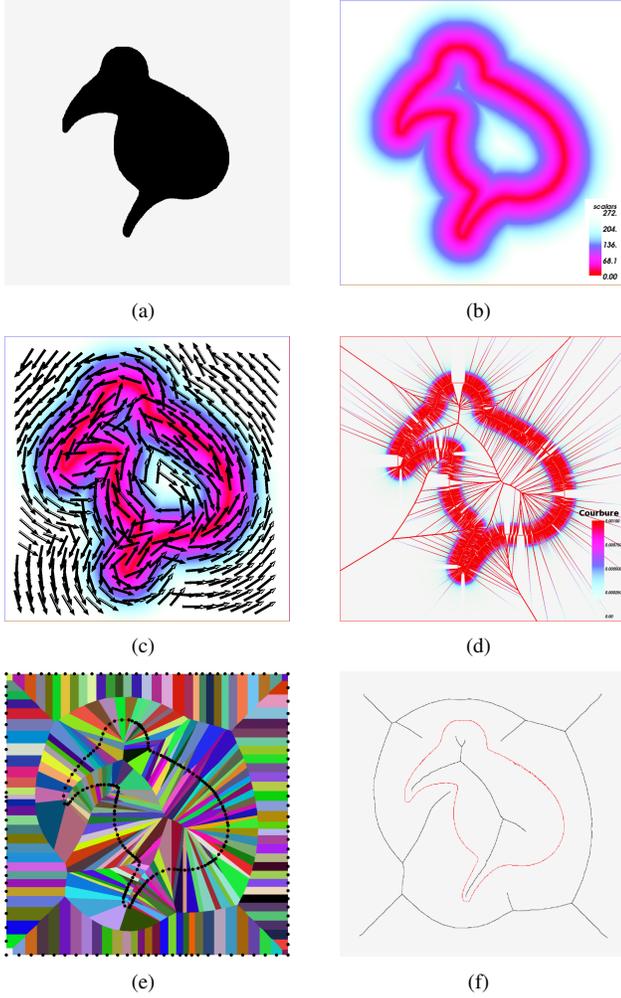


FIG. 2 – (a) Image Originale. (b) Carte de distance euclidienne discrète  $g$  construite à partir de la frontière de la forme . (c) Direction du vecteur principal de  $\mathbf{H}(g)$ . La courbure (equation (6)) est utilisée pour générer une fonction de densité  $\rho$  (d). Nous construisons un diagramme de Voronoï Centroidal contraint (e) en utilisant la carte de densité (d) lequel est finalement filtré. Une approximation de l’axe médian est obtenue (f).

### 3.2 Carte de densité pour une meilleur approximation de l’axe médian

Au voisinage des régions de forte courbure, il est préférable d’avoir une densité de cellule de Voronoï plus importante, au contraire, dans celles qui sont plates, il est préférable d’avoir une densité plus faible. Cette adaptation locale de la densité permet d’obtenir une meilleur approximation de l’axe médian. Nous proposons d’initialiser notre partitionnement en utilisant une carte de courbure. Nous utilisons la matrice hessienne ( $H$ ) pour décrire la courbure locale en chaque point ( $x$ ) de l’image.

$$\mathbf{H}(g) = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

où la fonction  $g$  est la distance euclidienne. La carte de dis-

tance euclidienne  $M_g$  est obtenue à l’aide de l’algorithme proposé dans [5]. Cet algorithme permet le calcul de distances exactes en considérant le carré de la distance euclidienne. Il détermine ainsi le chemin le plus court pour atteindre un point extérieur à l’objet. Ensuite, il calcule la longueur euclidienne de ce chemin. Les courbures principales locales  $\lambda_j^1$  et  $\lambda_j^2$  (resp. les directions principales) sont les valeurs propres (resp. les vecteurs propres) de  $\mathbf{H}$ . Le vecteur propre principal  $v_j^1$  définit la tangente au pixel  $p_j$  de  $g$ . Nous définissons un indicateur de courbure  $c_j$  par l’équation (6).

$$c_j = \sqrt{\lambda_j^1{}^2 + \lambda_j^2{}^2} \quad (6)$$

Nous définissons le poids  $\rho_j$ , associé à chaque pixel  $j$  ainsi :

$$\text{si } c_j \neq 0 \text{ alors } \rho_j = c_j^2 \text{ sinon } \rho_j = \beta \quad (7)$$

Dans nos expérimentations,  $\beta = 0.005$ . Notre motivation dans la définition de cette carte de courbure est la recherche d’un bon positionnement des cellules de Voronoï et ainsi d’une localisation efficace de l’axe médian.

Grâce à cette méthode, nous pouvons répartir  $N$  sites de Voronoï avec une densité choisie  $\rho(x)$  sur  $\partial_o$ . Où chaque frontière entre les cellules du DV contribue potentiellement à l’axe médian. Un filtrage décidera de cette contribution (voir section 3.4).

### 3.3 Diagramme de Voronoï Centroidal Contraint

La seconde étape est l’obtention d’un Diagramme de Voronoï Centroidal Contraint (DVCC) par un algorithme de partitionnement. Nous définissons un ensemble  $B_i$  pour chaque cellule de Voronoï par :

$$B_i = C_i \cap \partial_o \quad (8)$$

Chaque site de Voronoï  $z_i$  est positionné au barycentre des éléments frontières de sa cellule :

$$z_i = \frac{\sum_{B_j} \rho_j \cdot \gamma_j}{\sum_{B_j} \rho_j} \quad (9)$$

Les DVCCs minimisent le terme d’énergie suivant :

$$E_V = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{p_j \in C_i} \int_{p_j} \rho(x) \|x - z_i\|^2 dx \right) \quad (10)$$

où  $x$  est un point de l’espace,  $\rho(x)$  la fonction de densité associée et  $C_i$  est une cellule de Voronoï.

Notre approche est basée sur le partitionnement (“clustering”) d’une image dans un cadre variationnel. Elle permet de regrouper des pixels en  $K$  cellules par minimisation de l’ensemble des variances intra-cellules  $E_V$ . Minimiser  $E_V$  maximise la compacité des cellules [7]. La frontière de la forme est utilisée pour le partitionnement initial. Nous définissons l’image par les pixels étiquetés par leur appartenance à la frontière. A chaque cellule  $C_i$  est associée un site  $z_i$ . Afin d’assurer la conformité du diagramme, nous imposons qu’une cellule possède au moins un pixel frontière.

### 3.4 Méthode de Filtrage

Notre but est de supprimer les arêtes du graphe de Voronoï qui n'appartiennent pas à l'axe médian. Deux critères peuvent être utilisés pour approximer l'axe médian avec un sous-ensemble d'arêtes et de facettes de Voronoï. Le lecteur pourra se reporter à [3] pour plus de détails. Le premier critère permet de tester l'appartenance d'une frontière du DV à l'axe médian par la condition suivante. Si une frontière entre deux cellules de Voronoï intersecte une frontière entre deux objets ( $\partial_{O_i,j}$ ) alors cette frontière ne contribue pas à l'axe médian. Le second critère est basé sur le calcul d'un angle. Une frontière du DV est éliminée si l'angle entre la direction principale d'une région voisine  $V_i$  et la direction normale à la frontière est inférieure à un seuil  $\alpha$ . Dans nos expériences,  $\alpha = 0.8$

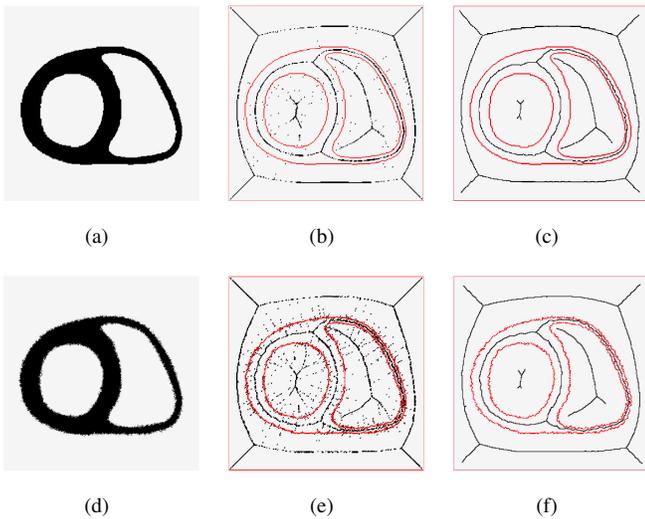


FIG. 3 – Comparaison de notre approche avec l'approche RDMA [2] : Formes initiales sans bruit (a) et avec bruit (d) ; RDMA (b) et (e) ; notre approche (c) et (f) est clairement plus robuste.

## 4 Résultats

La Figure 3 montre des résultats comparatifs entre notre approche et l'approche RDMA [2]. (a) et (d) sont des coupes IRM segmentées d'un coeur humain sans bruit et avec bruit sur la frontière de l'objet. (b) et (e) sont les résultats obtenus avec RDMA. (c) et (f) avec notre approche. Nous pouvons voir clairement que dans notre approche, l'axe médian est toujours continu et connexe. La Figure 4 illustre le résultat généré par notre approche sur le logo "GRETSI".

## 5 Conclusions

Nous avons présenté une approche qui estime l'axe médian pour des images ou des volumes. Elle est basée sur le calcul d'un diagramme de Voronoï pour un ensemble de

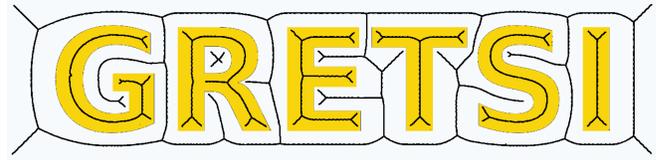


FIG. 4 – Approximation de l'axe médian du logo GRETSI.

points distribués selon la courbure de l'objet. Les résultats expérimentaux montrent que notre approche est robuste au bruit.

## 6 Remerciements

Les données du coeur humain ont été fournies par le Dr Patrick Clarysse CREATIS-LRMN Lyon. Ce travail est supporté, en partie, par le projet BioRFMod (ANR-06-JCJC-0124-01) et la région Rhône Alpes, Cluster 2 ISLE, PP3, subproject SIMED : Simulation en Imagerie MEDicale pour le Diagnostic et la Thérapie.

## Références

- [1] H. Blum, "A transformation for extracting new descriptors of form" *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pp. 362–380, 1967.
- [2] D. Coeurjolly and A. Montanvert, "Optimal separable algorithms to compute the reverse euclidean distance transformation and discrete medial axis in arbitrary dimension," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 29, no. 3, pp. 437–448, 2007.
- [3] Dardenne, J., Valette, S., Siauve, N., Prost, R. : Medial axis approximation with constrained centroidal voronoi diagrams on discrete data. In : *Computer Graphics International*, pp. 299–306 (2008)
- [4] L. Da F. Costa R. Fabbri, L. F. Estrozi, "On Voronoï diagrams and medial axes" *J. Math. Imaging Vis.*, vol. 17, no. 1, pp. 27–40, 2002.
- [5] Saito, T., Toriwaki, J.I. "New algorithms for Euclidean distance transformations of an n-dimensional digitised picture with applications." *Pattern Recognition*, 27(11). pp. 1551–1565, 1994.
- [6] T. K. Dey and W. Zhao, "Approximating the medial axis from the Voronoï diagram with a convergence guarantee" *Algorithmica*, vol. 38, no. 1, pp. 179–200, 2003.
- [7] S. Valette, J. M. Chassery, and R. Prost, "Generic remeshing of 3d triangular meshes with metric-dependent discrete Voronoï diagrams" *IEEE Trans Visu Comp Graph*, pp. 369–381, 2007.