

Génération de maillages triangulaires adaptatifs 2D avec des Diagrammes de Voronoï Centroïdaux

Julien DARDENNE^{1,2}, Sébastien VALETTE¹, Nicolas SIAUVE², Rémy PROST¹

¹Université de Lyon, CREATIS-LRMN, CNRS UMR5220, Inserm U630;INSA-Lyon, Université de Lyon 1, France.

²Université de Lyon, AMPERE, CNRS UMR5005, Université de Lyon 1, France.

¹prénom.nom@creatis.insa-lyon.fr

²prénom.nom@univ-lyon1.fr

Résumé – Dans cet article, nous considérons le problème de génération d'un maillage triangulaire 2D à partir d'une image binaire et d'une fonction de densité des triangles associée aux propriétés de l'image. Ce problème concerne principalement la simulation numérique de phénomènes physiques par la méthode des éléments finis. La triangulation doit respecter la géométrie des différentes régions constituant l'image. La forme et la taille des éléments triangulaires ont une incidence sur la précision des résultats. Nous proposons une méthode de génération d'un maillage triangulaires 2D qui s'adapte à la forme des régions d'une image.

Abstract – In this paper, we consider the problem of triangular mesh generation from a binary image with respect to density function of triangles. This problem is relevant for the numerical simulation of physical phenomena by the finite element method. The triangulation has to respect the geometry of the various regions constituting the image. The shape and size of triangular elements have an impact on the results accuracy. We propose a 2D triangular mesh generation algorithm which adapts itself to the objects boundaries in the image.

1 Introduction

La résolution numérique d'un système d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis nécessite de discrétiser le domaine d'étude sous la forme d'un maillage triangulaire. La précision de la solution obtenue par la simulation numérique dépend fortement :

- de la qualité du maillage utilisé en terme de forme de ses éléments,
- de la capacité du maillage à approximer les frontières du domaine.

Les méthodes actuelles [5] construisent le maillage après extraction des frontières. Ces méthodes diffèrent principalement par la façon dont sont générés les sommets du maillage. Nous proposons dans cet article, une méthode permettant de générer un maillage adaptatif de bonne "qualité" directement à partir de données images. Notre contribution est générique et peut s'appliquer dans d'autres domaines tel que les maillages actifs pour la segmentation et le suivi d'objets vidéo [7].

2 Méthodes de génération de maillages 2D

Il existe principalement deux types d'approches pour créer un maillage bi-dimensionnel adapté au contenu d'une image :

Approches basées noeuds : Elles sont liées au diagramme de Voronoï et à son dual géométrique, la triangulation de Delaunay. La technique de maillage de type "Delaunay" est une procédure itérative qui construit la triangulation du domaine en insérant des points internes et en vérifiant le critère de Delaunay [3]. Ce critère indique qu'il n'existe aucun noeud dans le cercle circonscrit à chaque triangle. Une seconde approche consiste à construire le maillage par propagation d'un front d'onde. L'idée principale est de mailler le domaine par itérations successives en faisant propager vers l'intérieur un front initialisé sur la frontière du domaine, jusqu'à son recouvrement complet.

Approches basées mailles : Cette approche repose sur un partitionnement hiérarchique de l'image. Les partitions, de taille variable, sont subdivisées récursivement afin de capturer la frontière des régions ou de satisfaire un critère sur la taille des éléments. Les cellules extérieures au domaine à mailler sont supprimées. Les cellules restantes sont décomposées en triangles. L'ensemble de ces triangles forme le maillage du domaine [6].

3 Définitions

Une image segmentée est un ensemble de pixels où l'on attribue une étiquette à chaque pixel. Les pixels qui ont la même

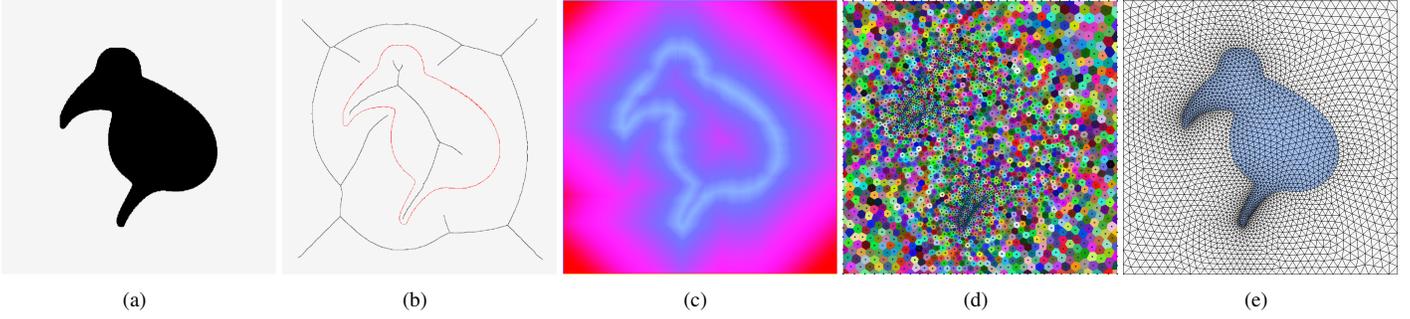


FIG. 1 – Une approximation de l’axe médian (b) de l’image (a) est calculée. Une carte de densité est alors calculée (c). Un Diagramme de Voronoï Centroidal (d) de (a) est calculé en prenant en compte (c). Le dual de ce diagramme est obtenu (e) et constitue notre maillage.

étiquette appartient à une même région de l’objet. Le domaine à mailler Ω peut s’écrire par l’union des objets O_i :

$$\Omega = \cup_i O_i \quad (1)$$

Une frontière entre deux objets $\partial_{O_i, j}$ est constituée de l’ensemble des pixels de l’objet O_i voisins de l’objet O_j . Nous définissons les frontières du domaine à mailler par ∂_O :

$$\partial_O = \partial_\Omega \cup [\cup_{i, j} \partial_{O_i, j}] \quad (2)$$

où ∂_Ω représente le bord de l’image. A une image est associée un graphe tel que, pour chaque pixel, un sommet lui est associé et les pixels voisins sont connectés par une arête [1]. Ce graphe, dit primaire ou de voisinage, est noté $G = (V, E)$. Où V et E sont, respectivement, l’ensemble des sommets et l’ensemble des arêtes du graphe. Le dual de ce graphe \bar{G} représente les arêtes inter-pixels et les sommets inter-pixels (figure 2).

4 Notre Approche

La première étape consiste à partitionner les pixels en n cellules C_i qui approximent un Diagramme de Voronoï Centroidal. Ce partitionnement prend en compte la fonction de densité de triangles désirée $\rho(x)$ et un ensemble de contraintes pour placer correctement les sites z_i des cellules de Voronoï au voisinage des frontières ∂_O . La seconde étape consiste à construire la triangulation entre les sites z_i . La figure 1 résume la succession des étapes du processus de maillage. Nous partons d’une image (a). Une approximation de l’axe médian (b)

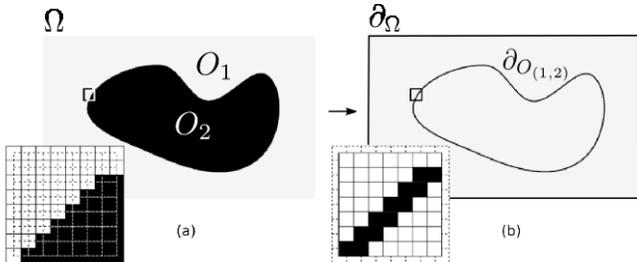


FIG. 2 – Représentation du graphe primaire G (a) et dual \bar{G} (b).

est créée en utilisant l’approche décrite dans [4]. Nous calculons ensuite une carte $\rho(x)$ traduisant la densité locale de triangles souhaitée (c). Nous calculons une approximation du diagramme de Voronoï Centroidal (d) de l’image (a) en prenant en compte les poids $\rho(x)$ issus de (c). Le dual de ce diagramme est construit (e) et constitue le maillage triangulaire, quasi-Delaunay.

4.1 Partitionnement de l’image

Dans [8], il a été établi une approximation discrète du Diagramme de Voronoï Centroidal où la triangulation est construite à partir du dual du diagramme. Nous utilisons cette approche pour regrouper des pixels et former par la suite le maillage. Le principe de l’algorithme est la mise en compétition des partitions entre elles, par des tests élémentaires sur leurs différentes frontières. Dans ce cas, nous utilisons un algorithme proche des *K-means*. La première étape de cette méthode est l’obtention d’une approximation d’un Diagramme de Voronoï Centroidal (DVC) où chaque site z_i est le centre de gravité de sa cellule :

$$z_i = \frac{\int_{C_i} x \cdot \rho(x) dx}{\int_{C_i} \rho(x) dx} \quad (3)$$

Les DVC minimisent le terme d’énergie suivant :

$$E_V = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p_j \in C_i} \int_{p_j} \rho(x) \|x - z_i\|^2 dx \right) \quad (4)$$

où x est un point de l’espace, $\rho(x)$ la fonction de densité associée et C_i est une cellule de Voronoï. Nous minimisons E_V , c’est à dire nous maximisons la compacité des régions [8]. Le critère d’énergie pour l’ensemble des cellules de Voronoï se simplifie en :

$$F = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{p_j \in C_i} \rho_j z_i^T (z_i - 2\gamma_j) \right] \quad (5)$$

avec

$$\rho_j = \int_{p_j} \rho(x) dx \quad (6)$$

$$\gamma_j = \frac{1}{\rho_j} \int_{p_j} x \cdot \rho(x) dx \quad (7)$$

où p_j est un élément de \overline{G} , ρ_j est le poids associé à p_j , γ_j représente le barycentre de p_j .

Nous définissons un ensemble B_i pour chaque région de Voronoï par :

$$B_i = C_i \cap \partial_O \quad (8)$$

Finalement, la position des sites z_i dépend des conditions suivantes :

- Si la cellule C_i ne coupe pas ∂_O ($B_i = \emptyset$), nous sommes dans le cas non-contraint. Nous fixons z_i au barycentre de la cellule : $z_i = G_i$.

$$z_i = G_i = \frac{\sum_{C_i} \rho_j \cdot \gamma_j}{\sum_{C_i} \rho_j} \quad (9)$$

- Si la cellule C_i contient une partie de la frontière $\partial_{O_{m,n}^i}$ ($B_i \neq \emptyset$), nous sommes dans le cas contraint et le site de la région est fixé au barycentre de la frontière :

$$z_i = \frac{\sum_{B_i} \rho_j \cdot \gamma_j}{\sum_{B_i} \rho_j} \quad (10)$$

Ces conditions sont illustrées par la figure 3. Grâce à cette méthode, nous pouvons répartir N cellules de Voronoï dans l'espace en préservant les frontières du domaine ∂_O et en imposant une densité de triangles $\rho(x)$ variable.

4.2 Maillage triangulaire

Dans le cas général un diagramme de Voronoï est associé à un nuage de points. Il forme un ensemble de cellules dont le dual géométrique est la triangulation de Delaunay (fig. 1, (d) et (e)). Les sommets du diagramme de Voronoï sont les

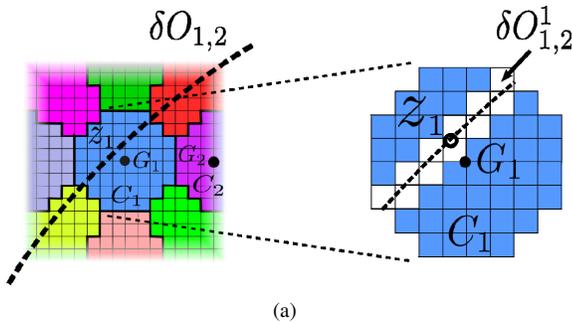


FIG. 3 – La cellule C_1 est dite "contrainte". Le site z_1 est estimé à partir de $\delta O_{1,2}$ qui représente le sous-ensemble frontière de la cellule C_1 . La cellule C_2 est dite "non contrainte" car elle n'est pas liée à une frontière.

centres des cercles circonscrits aux triangles. Les arêtes de Voronoï sont les médiatrices des arêtes de la triangulation de Delaunay. Cette définition est dans un espace continu. Notre algorithme de partitionnement créé une approximation du diagramme de Voronoï. Les relations d'adjacence entre les cellules de Voronoï permettent de construire le maillage triangulaire.

Cependant, des ambiguïtés dues au partitionnement de l'espace discret peuvent apparaître lorsque au moins quatre cellules de Voronoï forment un cycle dans un plan. Ces ambiguïtés provoquent une insuffisance du nombre d'arêtes. Il en résulte un manque de triangles dans les zones d'ambiguïtés. Pour résoudre les ambiguïtés, nous utilisons localement une insertion d'arête dans le maillage en considérant les frontières et la qualité des éléments ajoutés. Un exemple du processus est illustré par la figure 4.

Dans notre algorithme, chaque triangle est alloué à la région de l'image qui a le plus de pixels contenus dans le triangle.

4.2.1 Maillage adaptatif

Nous souhaitons avoir une densité de triangles plus importante dans les régions complexes et étroites. Cette densité est nécessaire pour avoir une bonne précision locale dans la méthode par éléments finis. L'axe médian permet de définir une carte de densité $\rho(x)$ basée sur la largeur locale (Local Feature Size) [2] de façon à mailler plus finement certaines régions du domaine d'étude. Nous avons proposé dans [4] une méthode de calcul de l'axe médian à partir d'un DVC contraint.

5 Résultats

Les figures 5 et 6 illustrent deux maillages issus de notre approche : la triangulation uniforme du logo GRETSI avec 3000 sommets et la triangulation adaptative de trois coupes IRM segmentées d'un coeur humain avec 6000 sommets. Les angles minimaux sont respectivement de 42.93° et 24.67° . On remarque la bonne adaptativité de notre algorithme aux formes de l'image.

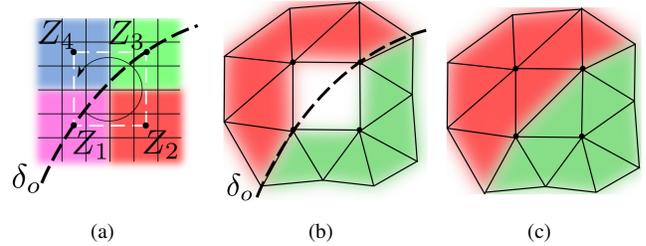


FIG. 4 – Diagramme comportant quatre cellules de Voronoï formant un cycle dans un plan (a), la triangulation obtenue (b) possède une ambiguïté topologique, la restauration de la frontière (c) est réalisée par une insertion d'arête.

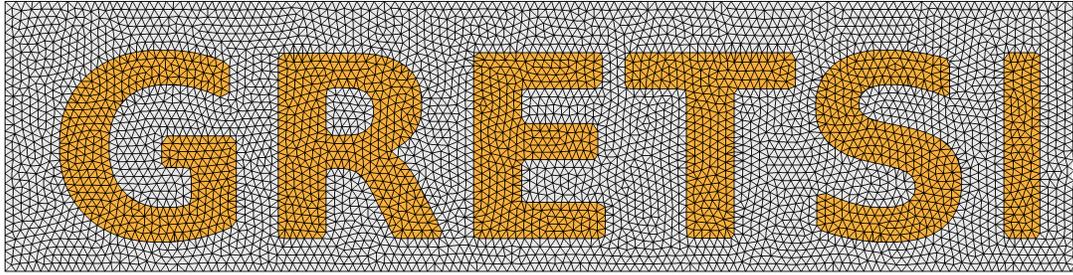


FIG. 5 – Triangulation uniforme du logo GRETSI avec 3000 sommets.

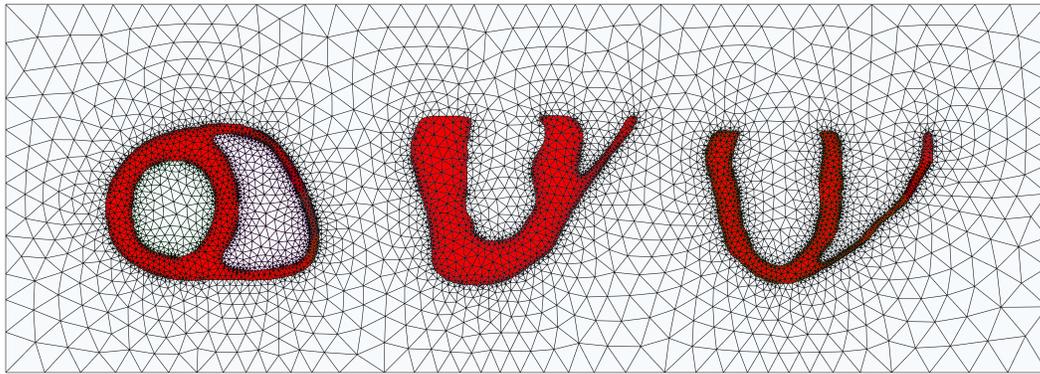


FIG. 6 – Triangulation adaptative de trois coupes IRM segmentées d'un coeur humain avec 6000 sommets.

6 Conclusions

Notre approche permet d'obtenir un maillage avec une densité non uniforme de triangles de très bonne qualité. L'un des avantages de notre méthode est de traiter directement les pixels de l'image.

7 Remerciements

Les données du coeur humain ont été fournies par le Dr Patrick Clarysse CREATIS-LRMN Lyon. Ce travail est supporté, en partie, par le projet BioRFMod (ANR-06-JCJC-0124-01) et la région Rhône Alpes, Cluster 2 ISLE, PP3, subproject SIMED : Simulation en Imagerie MEDicale pour le Diagnostic et la Thérapie.

Références

- [1] Kovalevsky, V.A. : Finite topology as applied to image analysis. *Comput. Vision Graph. Image Process.* 46(2), 141–161 (1989)
- [2] Alliez, P., Cohen-Steiner, D., Yvinec, M., Desbrun, M. : Variational tetrahedral meshing. *ACM Transactions on Graphics* 24(3), 617–625 (2005)
- [3] Altunbasak, Y., Object-scalable, content-based video representation and motion tracking for visual communications and multimedia, USA, PhD. Thesis, University of Rochester, School of Engineering and Applied Sciences, 1996, 238p
- [4] Dardenne, J., Valette, S., Siauve, N., Prost, R. : Medial axis approximation with constrained centroidal voronoi diagrams on discrete data. In : *Computer Graphics International*, pp. 299–306 (2008)
- [5] Frey, P.J., George P.L. : *Maillages, applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris (1999)
- [6] Laurent, N., Lechat, P., Sanson, H., Limitation Of Triangles Overlapping In Mesh-Based Motion Estimation Using Augmented Lagrangian, *IEEE International Conference on Image Processing*, Chicago, USA, 4-7 October, 1998, pp. 223-227.
- [7] Valette, S., Magnin, I., Prost, R. : Mesh-based video objects tracking combining motion and luminance discontinuities criteria, *Signal Processing*, Vol. 84, no. 7, pp. 1213-1224 (2004)
- [8] Valette, S., Chassery, J.M., Prost, R. : Generic remeshing of 3d triangular meshes with metric-dependent discrete voronoi diagrams. *IEEE Trans Visu Comp Graph* pp. 369–381 (2008)