

Optimisation conjointe du nombre des symboles pilotes et de l'allocation des puissances pour les canaux MIMO non sélectifs en fréquence

Imed HADJ-KACEM^{1,2}, Noura SELLAMI¹, Inbar FIJALKOW², Aline ROUMY³

¹Laboratoire LETI, ENIS, Route Sokra km 3.5, B.P 3038 Sfax, Tunisia

²ETIS, ENSEA, Université de Cergy-Pontoise, CNRS UMR 8051, F-95000 Cergy-Pontoise, France

³INRIA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

imed.hadj-kacem@ensea.fr, noura.sellami@isecs.rnu.tn

Inbar.Fijalkow@ensea.fr, Aline.Roumy@irisa.fr

Résumé – Dans ce papier, nous proposons d'optimiser conjointement le nombre des symboles pilotes et l'allocation des puissances pour les canaux MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) non sélectifs en fréquence quand un détecteur basé sur le critère Maximum *A Posteriori* (MAP) est utilisé en réception et quand les symboles pilotes et de données peuvent avoir des puissances différentes. Nous calculons une expression analytique du Rapport Signal à Bruit (RSB) à la sortie du détecteur MAP. En se basant sur cette expression, nous définissons un RSB utile qui tient compte de la perte en termes de débit due à l'utilisation des symboles pilotes. Nous trouvons que la longueur optimale de l'intervalle d'apprentissage maximisant le rapport signal à bruit utile est égale au nombre d'antennes en émission quand l'optimisation est effectuée conjointement avec celle de l'allocation des puissances

Abstract – In this paper, we jointly optimize the training interval length and the power allocation for MIMO (Multiple- Input Multiple-Output) flat fading channels when a Maximum *A Posteriori* (MAP) detector is used at the receiver and the training and data powers are allowed to be different. We calculate the equivalent Signal-to-Noise Ratio (SNR) at the output of the MAP detector. Based on this expression, we define an effective SNR taking into account the data throughput loss due to the use of pilot symbols. We find that the optimal length of the training interval maximizing this quantity is equal to the number of transmit antennas when we jointly optimize the length of the training interval and the power allocation.

1 Introduction

L'utilisation des systèmes MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) est motivée par le gain significatif en termes de capacité qu'ils permettent d'obtenir notamment quand le canal est connu [1]. En pratique, le canal est estimé en utilisant des symboles pilotes connus par le récepteur. Quand le nombre de symboles pilotes augmente, l'estimée du canal devient plus fiable. Cependant, ceci entraîne une perte en termes de débit utile. Ainsi, un compromis doit être trouvé. Dans [2], une solution basée sur la maximisation de la borne inférieure de la capacité du canal a été proposée pour des canaux MIMO non sélectifs en fréquence. Dans [3], la solution proposée consiste à optimiser la longueur de la séquence d'apprentissage en minimisant le rapport de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de l'estimation du canal sur le débit utile pour un canal non sélectif en fréquence. Dans [4], nous avons considéré une transmission sur un canal SISO (Single-Input Single-Output) sélectif en fréquence quand un égaliseur basé sur le critère Maximum *A Posteriori* (MAP) est utilisé. Nous avons proposé de maximiser un Rapport Signal à Bruit (RSB) utile que nous avons

calculé à la sortie de l'égaliseur MAP et qui tient compte de la perte en termes de débit due à l'utilisation des symboles pilotes.

Dans ce papier, nous proposons de généraliser notre étude de [4] au cas des systèmes MIMO non sélectifs en fréquence. Nous considérons un détecteur MAP en réception. L'estimation du canal est effectuée selon le critère des Moindres Carrés (MC) [5]. Quand les symboles pilotes et de données peuvent avoir des puissances différentes, nous trouvons que la longueur optimale de l'intervalle d'apprentissage maximisant le rapport signal à bruit utile est égale au nombre d'antennes en émission. Ce même résultat a été trouvé dans [2] en maximisant la borne inférieure de la capacité du canal et dans [3] en minimisant le rapport de l'erreur quadratique moyenne de l'estimation du canal sur le débit utile pour un récepteur itératif.

Dans ce papier, les scalaires et les matrices sont en minuscule et en majuscule respectivement et les vecteurs sont soulignés. L'opérateur $(.)^T$ indique la transposition et I_m désigne la matrice identité de dimensions $(m \times m)$.

2 Modèle du système

Nous considérons un système MIMO avec n_E antennes émettrices et n_R antennes réceptrices. Les bits d'information en entrée sont modulés selon la modulation de phase à 2 états (MDP-2) dont l'alphabet est $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$. Nous supposons que la transmission se fait par blocs. Chaque antenne émettrice émet des blocs de T symboles dont les T_p premiers sont des symboles pilotes. Le canal est supposé invariant durant un bloc et peut changer d'un bloc à l'autre. Nous supposons également que les puissances des symboles pilotes et de données peuvent être différentes. Le signal reçu en bande de base échantillonné au rythme symbole à l'instant k à l'antenne réceptrice p est donné par

$$y_k^{(p)} = \begin{cases} \sqrt{\sigma_p^2} \sum_{i=1}^{n_E} h_{pi} x_k^{(i)} + n_k^{(p)}, & \text{pour } 0 \leq k \leq T_p - 1 \\ \sqrt{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^{n_E} h_{pi} x_k^{(i)} + n_k^{(p)}, & \text{pour } T_p \leq k \leq T - 1 \end{cases} \quad (1)$$

où $x_k^{(i)}$ est le $k^{\text{ème}}$ symbole transmis par la $i^{\text{ème}}$ antenne émettrice, σ_p^2 et σ_d^2 sont respectivement la puissance des symboles pilotes et celle des symboles de données et h_{ji} est le gain du canal entre l'antenne émettrice i et l'antenne réceptrice j . Dans (1), $n_k^{(p)}$ sont des échantillons indépendants d'un bruit blanc gaussien complexe centré et de variance σ^2 . Le vecteur reçu sur l'antenne réceptrice p durant la phase d'apprentissage, $\underline{y}^{(p)} = (y_0^{(p)}, y_1^{(p)}, \dots, y_{T_p-1}^{(p)})^T$, est donné par

$$\underline{y}^{(p)} = \sqrt{\sigma_p^2} X \underline{h}^{(p)} + \underline{n}^{(p)} \quad (2)$$

où $\underline{h}^{(p)} = (h_{p1}, h_{p2}, \dots, h_{pn_E})^T$, $\underline{n}^{(p)} = (n_0^{(p)}, n_1^{(p)}, \dots, n_{T_p-1}^{(p)})^T$ et X est la matrice contenant les symboles pilotes émis par les différentes antennes émettrices. Sous l'hypothèse que $T_p \geq n_E$, l'estimée aux moindres carrés du canal est donnée par [5] :

$$\hat{\underline{h}}^{(p)} = \frac{1}{\sigma_p^2} (X^T X)^{-1} X^T \underline{y}^{(p)}. \quad (3)$$

Nous supposons que les séquences d'apprentissage ont des propriétés idéales d'autocorrélation et d'intercorrrelation, c'est-à-dire $X^T X = T_p I_{n_E}$. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta \hat{\underline{h}}^{(p)} &= \hat{\underline{h}}^{(p)} - \underline{h}^{(p)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 (X^T X)^{-1}) \\ &= \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{T_p \sigma_p^2} I_{n_E}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

3 RSB équivalent à la sortie du détecteur MAP

Nous considérons un détecteur MAP en réception. Selon (1), le signal reçu sur les n_R antennes réceptrices à l'instant k , pour $T_p \leq k \leq T - 1$, est donné par :

$$\underline{y}_k = \sqrt{\sigma_d^2} H \underline{x}_k + \underline{n}_k, \quad (5)$$

où $\underline{x}_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n_E)})^T$, $\underline{n}_k = (n_k^{(1)}, n_k^{(2)}, \dots, n_k^{(n_R)})^T$ et H est la matrice du canal. Pour détecter les symboles transmis, le détecteur MAP calcule les probabilités $p(x_k^{(i)} = x | \underline{y}_k)$,

pour $1 \leq i \leq n_E$ et $x \in \{-1, 1\}$. Puisque les symboles transmis sont équiprobables, le détecteur MAP peut calculer uniquement les probabilités $p(\underline{y}_k | x_k^{(i)} = x)$ données par :

$$p(\underline{y}_k | x_k^{(i)} = x) = \sum_{\underline{x}_k \in X_1} p(\underline{y}_k | \underline{x}_k) \quad (6)$$

où X_1 est l'ensemble de toutes les valeurs pouvant être prises par \underline{x}_k avec $x_k^{(i)} = x$. La probabilité $p(\underline{y}_k | \underline{x}_k)$ est donnée par :

$$p(\underline{y}_k | \underline{x}_k) = \frac{1}{(\pi \sigma^2)^{n_R}} \exp\left(-\frac{\|\underline{y}_k - \sqrt{\sigma_d^2} H \underline{x}_k\|^2}{\sigma^2}\right). \quad (7)$$

En généralisant l'étude faite dans [6], nous montrons que le rapport signal à bruit équivalent à la sortie du détecteur MAP est donné par :

$$RSB_{eq} = \frac{\sigma_d^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{n_E \sigma_d^2}{T_p \sigma_p^2}\right)^{-1}. \quad (8)$$

4 Optimisation conjointe de la longueur de l'intervalle d'apprentissage et de l'allocation des puissances

Augmenter le nombre de symboles pilotes engendre une amélioration de la qualité de l'estimation du canal mais aussi une perte en termes du débit utile. Ainsi, pour tenir compte de cette perte, nous définissons, comme dans [4], un RSB utile à la sortie du détecteur MAP comme suit :

$$RSB_{u,eq} = \frac{T - T_p}{T} RSB_{eq}. \quad (9)$$

Notre objectif est de maximiser le RSB utile sous une contrainte d'énergie totale transmise par bloc et une contrainte de la longueur totale du bloc. Ainsi, nous définissons le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \max RSB_{u,eq}(T_p, \sigma_p^2, T_d, \sigma_d^2) \\ \text{s.c.} \\ \sigma_p^2 T_p + \sigma_d^2 T_d = \sigma_t^2 T \\ T_p + T_d = T \\ n_E \leq T_p \leq T - 1 \\ \sigma_p^2 \geq 0, \sigma_d^2 \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

où T_d est le nombre de symboles de données par bloc et $\sigma_t^2 T$ est l'énergie totale transmise par bloc.

Nous exprimons la fraction de l'énergie allouée aux symboles de données par bloc par :

$$\sigma_d^2 T_d = \alpha \sigma_t^2 T, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (11)$$

Ainsi, l'expression du RSB utile devient

$$RSB_{u,eq} = \frac{\sigma_t^2 (T - T_p) \alpha (1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(T - T_p) + n_E \alpha} \quad (12)$$

qui ne dépend donc que de α et de T_p , pour des valeurs fixées de σ_t^2 , T et n_E . Le problème (10) est alors équivalent à

$$\begin{cases} \max RSB_{u,eq}(T_p, \alpha) \\ \text{s.c.} \\ n_E \leq T_p \leq T - 1 \\ 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad (13)$$

Les contraintes sont ainsi devenues indépendantes puisque chaque contrainte ne dépend que de α ou de T_p [7, p133], ce qui permettra de simplifier la résolution du problème comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1 *Quand $T \neq 2n_E$, la longueur optimale de l'intervalle d'apprentissage et la puissance optimale des symboles pilotes maximisant le RSB utile sous les contraintes de (10) sont respectivement données par :*

$$\begin{aligned} T_p^* &= n_E \\ \sigma_p^{*2} &= \frac{\sigma_t^2 T (-n_E + \sqrt{n_E(T - n_E)})}{n_E(T - 2n_E)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Quand $T = 2n_E$, la solution de (10) est :

$$\begin{aligned} T_p^* &= n_E \\ \sigma_p^{*2} &= \frac{\sigma_t^2 T}{2n_E}. \end{aligned} \quad (15)$$

La preuve complète de la proposition est donnée dans l'Annexe.

5 Résultats des simulations

Dans cette section, nous proposons de valider nos résultats analytiques par des simulations. Figure 1 montre les performances, en termes de Taux d'Erreur Binaire (TEB), à la sortie du détecteur MAP en fonction de $RSB_u = \frac{T - T_p}{T} RSB$ où RSB est le rapport signal à bruit à l'entrée du détecteur MAP pour $T = 256$, $\sigma_t^2 = 4dB$ et $n_E = n_R = 2$. Les coefficients du canal h_{ji} sont modélisés par des variables aléatoires complexes gaussiennes centrées de variance 0.5. Dans nos simulations, nous considérons différentes valeurs de T_p et de σ_p^2 . D'après notre étude théorique, $T_p^* = n_E = 2$ et $\sigma_p^{*2} = 14.18dB$. Les simulations confirment que le détecteur MAP présente ses meilleures performances quand la valeur de T_p est minimale et pour $\sigma_p^2 = \sigma_p^{*2}$.

Sur la Figure 2, nous représentons les puissances optimales des symboles pilotes et celles de données maximisant le rapport signal à bruit utile pour $n_E = 5$, $\sigma_t^2 = 6dB$ et pour différentes valeurs de T , la longueur d'un bloc. Notons ici que σ_p^{*2} est donnée par (14) quand $T \neq 10$ et par (15) quand $T = 10$ et σ_d^{*2} est donnée par :

$$\sigma_d^{*2} = \frac{\sigma_t^2 T - \sigma_p^{*2} n_E}{T - n_E}. \quad (16)$$

Les courbes représentées en lignes continues sont obtenues en utilisant notre étude. Celles tracées en lignes discontinues sont obtenues en utilisant les résultats de [2]. Nous remarquons que le critère de la maximisation du rapport signal à bruit utile donne les mêmes résultats que celui qui se base sur la maximisation de la borne inférieure de la capacité du canal [2]. Nous vérifions également que lorsque T augmente, σ_p^{*2} augmente. Notons finalement que quand $T = 2n_E$, $\sigma_p^{*2} = \sigma_d^{*2} = \sigma_t^2$. Ce résultat peut être démontré en utilisant les équations (15) et (16).

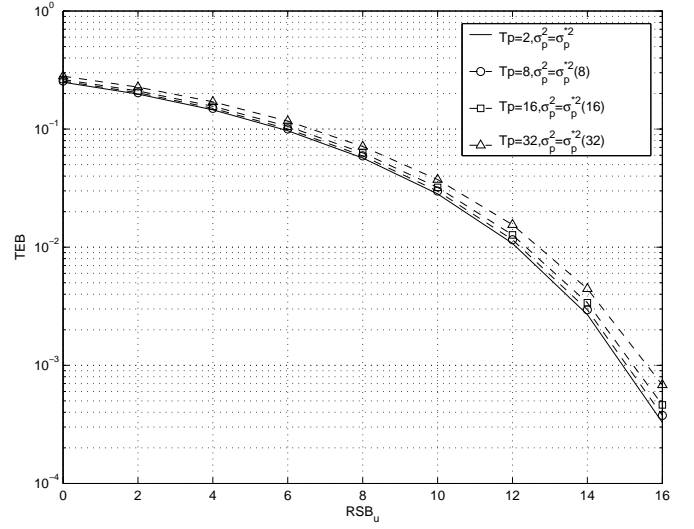


FIG. 1 – TEB en fonction de RSB_u à la sortie du détecteur MAP pour $T = 256$, $\sigma_t^2 = 4dB$ et $n_E = n_R = 2$.

6 Conclusion

Dans ce papier, nous avons considéré le problème d'optimisation conjointe de la longueur de l'intervalle d'apprentissage et de l'allocation des puissances pour les canaux MIMO non sélectifs en fréquence quand un détecteur MAP est utilisé en réception. Nous avons défini un rapport signal à bruit utile à la sortie du détecteur MAP. Nous avons montré que la longueur optimale de l'intervalle d'apprentissage maximisant le RSB utile est égale au nombre d'antennes en émission et nous avons donné l'allocation optimale des puissances.

7 Annexe

Soient $\{t, \alpha\} \in [n_E, +\infty[\times]0, 1[$ et $g(t, \alpha) = \frac{\sigma_t^2(T-t)\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)(T-t) + n_E\alpha}$. Ainsi, $RSB_{u,eq} = g(T_p, \alpha)$.

Nous considérons maintenant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max g(t, \alpha) \\ \text{s.t.} \\ n_E \leq t \leq T, 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad (17)$$

Puisque les contraintes sont indépendantes (chaque fonction de contrainte dépend uniquement de α ou de t), il est possible de commencer par maximiser la fonction objective en fonction de α ensuite en fonction de t . Le problème (17) est alors équivalent à deux sous-problèmes [7, p133]

$$\alpha^*(t) = \arg \max_{\alpha \in \mathbf{R}} \{g(t, \alpha), 0 < \alpha < 1\} \quad (18)$$

et

$$t^* = \arg \max_{t \in \mathbf{N}} \{g(t, \alpha^*(t)), n_E \leq t \leq T\} \quad (19)$$

Puisque, pour une valeur fixée de $t \neq T - n_E$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2} < 0$. g est alors concave en fonction de α . Ainsi, quand t est fixée, g

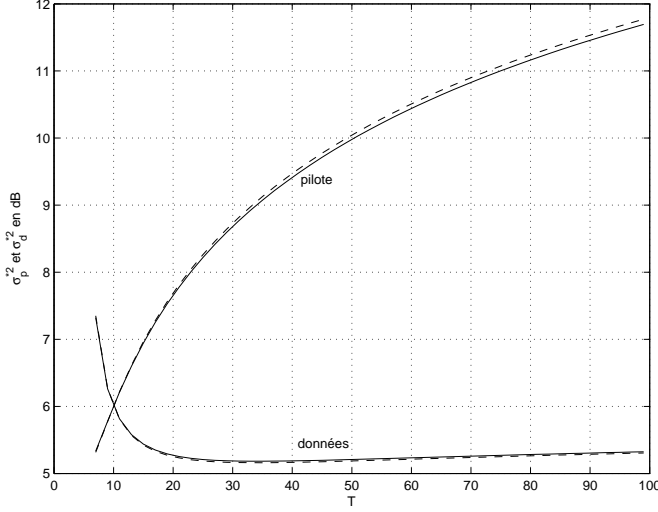


FIG. 2 – σ_p^{*2} et σ_d^{*2} en fonction de T pour $n_E = 5$ et $\sigma_t^2 = 6dB$.

possède un maximum unique atteint pour $\alpha = \alpha^*(t)$ telle que

$$\alpha^*(t) = \frac{(T-t) - \sqrt{n_E(T-t)}}{T-t-n_E} \quad (20)$$

Ainsi, pour une valeur donnée de $T_p \neq T - n_E$, le RSB utile est maximisé pour une valeur de la puissance pilote $\sigma_p^2 = \sigma_p^{*2}(T_p)$ donnée par

$$\sigma_p^{*2}(T_p) = \frac{(1 - \alpha^*(T_p)) \frac{\sigma_t^2 T}{T_p}}{\frac{\sigma_t^2 T (-n_E + \sqrt{n_E(T-T_p)})}{T_p(T-T_p-n_E)}} \quad (21)$$

Notons que lorsque $t = T - n_E$, $\alpha^*(t) = \frac{1}{2}$ et $\sigma_p^{*2}(T - n_E) = \frac{\sigma_t^2 T}{2(T-n_E)}$.

En se basant sur (20), nous notons que $0.5 < \alpha^*(t) < 1$ quand $n_E \leq t \leq T - n_E - 1$ et $0 < \alpha^*(t) < 0.5$ quand $T - n_E + 1 \leq t \leq T - 1$. Cette remarque sera utile dans la suite de la preuve.

Nous voulons maintenant résoudre le problème d'optimisation combinatoire donnée par (19). Pour se faire, nous séparons l'intervalle $[n_E, T]$ en trois sous-intervalles et nous analysons la fonction objective $g(x, \alpha^*(t))$ sur ces sous-intervalles. Nous considérons également les deux cas où $T \neq 2n_E$ et $T = 2n_E$.

1. Quand $T \neq 2n_E$

Supposons que $T > 2n_E$. Soit $M = \max_{T_p, \alpha} RSB_{u,eq}$. En utilisant l'optimisation combinatoire, $M = \max\{m_1, m_2, m_3\}$ où

$$\begin{aligned} m_1 &= \max_{n_E \leq m \leq T-n_E-1} g(m, \alpha^*(m)), m \in \mathbf{N} \\ m_2 &= \max_{T_p=T-n_E, \alpha} g(T_p, \alpha) \\ m_3 &= \max_{T-n_E+1 \leq m \leq T-1} g(m, \alpha^*(m)), m \in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (22)$$

Soit $t \in [n_E, T - n_E - 1]$ et $G(t) = g(t, \alpha^*(t))$. Puisque $G'(t) < 0$, G est une fonction décroissante et $\max(G) = G(n_E)$. Ainsi, $m_1 = g(n_E, \alpha^*(n_E))$. D'autre part, $m_2 = \max_{\alpha} g(T - n_E, \alpha) = g(T - n_E, \frac{1}{2}) = \frac{\sigma_t^2}{4}$. Soit maintenant

$f_t(\alpha) = g(t, \alpha) - \frac{\sigma_t^2}{4}$. Pour $t = n_E$, $f_t(\alpha) > 0$ pour tout $0.5 < \alpha < 1$. Puisque $\alpha^*(n_E) \in]0.5, 1[$, alors $m_1 > \frac{\sigma_t^2}{4} = m_2$. De la même manière, nous prouvons que $m_3 = g(T - n_E + 1, \alpha^*(T - n_E + 1))$ et $m_3 < m_2$. Ainsi, $m_1 > m_2 > m_3$ et la solution de (10) est donnée par

$$\begin{aligned} T_p^* &= n_E \\ \sigma_p^{*2} &= \frac{\sigma_t^2 T (1 - \alpha^*(n_E))}{n_E} = \frac{\sigma_t^2 T (-n_E + \sqrt{(T-n_E)n_E})}{n_E(T-2n_E)} \end{aligned} \quad (23)$$

Maintenant, quand $n_E < T \leq 2n_E$, $M = m'_3$ où

$$m'_3 = \max_{n_E \leq m \leq T-1} g(m, \alpha^*(m)), m \in \mathbf{N} \quad (24)$$

On peut facilement voir que $m'_3 = g(n_E, \alpha^*(n_E))$. Ainsi

$$\begin{aligned} T_p^* &= n_E \\ \sigma_p^{*2} &= \frac{\sigma_t^2 T (1 - \alpha^*(n_E))}{n_E} = \frac{\sigma_t^2 T (-n_E + \sqrt{(T-n_E)n_E})}{n_E(T-2n_E)} \end{aligned} \quad (25)$$

2. Quand $T = 2n_E$

Dans ce cas, $M = \max\{m_2, m_3\}$ où

$$\begin{aligned} m_2 &= \max_{T_p=T-n_E, \alpha} g(T_p, \alpha) \\ m_3 &= \max_{T-n_E+1 \leq m \leq T-1} g(m, \alpha^*(m)), m \in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (26)$$

De la même manière que dans le premier cas, nous prouvons que $m_2 > m_3$. Ainsi

$$\begin{aligned} T_p^* &= T - n_E = n_E \\ \sigma_p^{*2} &= (1 - \alpha^*(n_E)) \frac{\sigma_t^2 T}{n_E} = \frac{\sigma_t^2 T}{2n_E} \end{aligned} \quad (27)$$

Références

- [1] G.J. Foschini and M.J. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas," *Wireless Personal Communications*, vol. 6, no. 3, pp. 311–335, March 1998.
- [2] B. Hassibi and B. M. Hochwald, "How much training is needed in multiple-antenna wireless links?," *IEEE Trans. on Inf. Theory*, vol. 49, no. 4, pp. 951–963, April 2003.
- [3] S. Buzzi, M. Lops, and S. Sardellitti, "Performance of iterative data detection and channel estimation for single-antenna and multiple-antennas wireless communications," *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 53, no. 4, pp. 1085–1104, 2004.
- [4] I. Hadj Kacem, N. Sellami, A. Roumy, and I. Fijalkow, "Training sequence optimization for frequency selective channels with MAP equalization," *IEEE ISCCSP*, pp. 532–537, Malta, March 2008.
- [5] S. Crozier, D. Falconer, and S. Mahmoud, "Least sum of squared errors (LSSE) channel estimation," *IEE Proceedings*, vol. 138, pp. 371–378, August 1991.
- [6] A. Gorokhov, "On the performance of the viterbi equalizer in the presence of channel estimation errors," *IEEE Signal Process. Letters*, vol. 5, no. 12, pp. 321–324, December 1998.
- [7] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.