

# Extension des algorithmes imbriqués pour la résolution de problèmes d’optimisation convexe en imagerie\*

Nelly PUSTELNIK<sup>1</sup>, Caroline CHAUX<sup>1</sup>, Jean-Christophe PESQUET<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université Paris-Est

Laboratoire de l’Institut d’Informatique Gaspard Monge  
5 rue Descartes, 77454 Marne la Vallée, France

nelly.pustelnik@univ-paris-est.fr, caroline.chaux@univ-paris-est.fr  
jean-christophe.pesquet@univ-paris-est.fr

**Résumé** – Les algorithmes explicite-implicite et de Douglas-Rachford appartiennent à la classe des algorithmes itératifs d’optimisation convexe qui ont démontré leur efficacité dans la résolution de problèmes inverses de grande taille. Nous avons récemment proposé une imbrication de ces méthodes permettant d’étendre leur contexte d’application à la minimisation, sous contrainte d’appartenance à un convexe, d’une fonctionnelle composée d’une somme d’un terme différentiable et d’un terme non lisse. Nous proposons dans cet article d’étendre cette classe d’algorithmes imbriqués à la minimisation d’une fonctionnelle constituée d’une somme de trois fonctions convexes dont une est différentiable, de gradient Lipschitz. Nous mettons en évidence l’intérêt de ce type de minimisation sur un exemple de restauration d’image nécessitant une double régularisation: une régularisation dans un domaine transformé (utilisation d’une représentation en ondelettes) et une régularisation dans le domaine image (favorisant la parcimonie spatiale).

**Abstract** – Forward-Backward and Douglas-Rachford algorithms belong to the class of convex optimization iterative algorithms that demonstrated their efficiency for solving large-size inverse problems. We have recently proposed nested algorithms based on these methods allowing to extend their application context to the constrained minimization of a criterion constituted by the sum of a differentiable term and a non-smooth term. In this paper, we propose to generalize this class of nested algorithms to the minimization of a functional which corresponds to a sum of three convex functions where one is differentiable with a Lipschitz continuous gradient. The interest of this minimization is demonstrated on an image restoration example which requires a twofold regularization: one is performed in the transform domain (wavelet-frame representations are used) whereas the other one is performed in the image domain (in order to promote spatial sparsity).

## 1 Introduction

Afin de restaurer des données dégradées, des approches variationnelles peuvent être mises en œuvre. Elles sont fondées sur la minimisation d’un critère non nécessairement différentiable permettant d’inclure un terme de fidélité aux données, auquel s’ajoute un (ou plusieurs) terme(s) de régularisation (indicatrice d’ensemble de contrainte convexe, norme  $\ell_1$ , variation totale, ...). Dans le cas où le terme de régularisation est considéré comme unique, des études visant à accroître la qualité de reconstruction ont porté sur l’intégration de représentations parcimonieuses dans des algorithmes de type *Expectation Maximization* [6], puis dans des algorithmes tels que celui de Landweber seuillé [5]. Dans [4], les auteurs ont généralisé cette approche pour différentes fonctions de régularisation en utilisant la notion d’opérateur proximal. Cet opérateur a été initialement introduit par Moreau dans [7]. Il est défini pour une fonction  $f$  de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert réel séparable et  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  correspond à la classe des fonctions convexes propres semi-continues inférieurement sur  $\mathcal{H}$  prenant leurs valeurs dans  $] -\infty, +\infty]$ . L’opérateur proximal associé à  $f$  en

un point  $x \in \mathcal{H}$  est noté  $\text{prox}_f x$  et correspond à l’unique minimiseur de  $f + \frac{1}{2}\|x - \cdot\|^2$ . Cet opérateur généralise la notion de projection sur un convexe  $C$  fermé non vide (notée  $P_C$ ); en effet,  $\text{prox}_{\iota_C} = P_C$  où  $\iota_C$  est la fonction indicatrice du convexe  $C$  ( $\iota_C(x) = 0$  si  $x \in C$  et  $+\infty$  sinon). Dans [2], les auteurs présentent des formes explicites de cet opérateur proximal pour les potentiels de nombreuses lois de probabilité log-concaves. Plus récemment, dans [9, 10], la classe des problèmes d’optimisation étudiés a été élargie à la minimisation d’une somme de plus de deux fonctions. Par exemple, l’ajout de l’indicatrice d’un convexe a permis dans [9] de considérer une classe assez générale de bruit de dégradation. La résolution de ce type de problème de minimisation plus complexe passe par l’imbrication de différents algorithmes (explicite-implicite [4], Douglas-Rachford [3], Dykstra [12]). Les preuves de convergence de ces algorithmes imbriqués et les conditions d’initialisation permettant d’améliorer leurs performances (en terme de vitesse de convergence) ont été données dans [9]. Dans ces algorithmes composés, deux conditions sont nécessaires : l’une des trois fonctions doit être l’indicatrice d’un convexe fermé non vide  $C$  et une autre doit être de gradient  $\beta$ -Lipschitz. Par ailleurs, dans [10, 11, 13] les auteurs se sont intéressés à une

\*Ce travail a été financé par l’ANR OPTIMED (ANR-05-MMSA-0014-01)

régularisation hybride composée d'un terme de variation totale et d'une norme  $\ell_1$  et, plus généralement dans [10], à la minimisation d'une somme finie de fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ . Une condition restrictive sur l'emploi de cette méthode est cependant de pouvoir calculer l'opérateur proximal de chacune de ces fonctions.

Comme il est parfois plus pertinent de calculer le gradient d'une fonction plutôt que son opérateur proximal (inversion d'opérateurs linéaires de grande taille, opérateur proximal non explicite, ...), l'idée de cet article consiste à étendre la classe des algorithmes imbriqués que nous avons proposé dans [9], afin de minimiser la somme de trois fonctions sans que l'une d'entre elle soit nécessairement l'indicatrice d'un convexe. Cet article a ainsi pour objectif de développer un algorithme adapté à la minimisation de

$$\min_{x \in \mathcal{H}} g(x) + f(x) + h(x) \quad (1)$$

où  $g$ ,  $f$  et  $h$  sont des fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  et  $g$  est une fonction de gradient  $\beta$ -Lipschitz avec  $\beta \in ]0, +\infty[$ .

## 2 Problème de minimisation

Parmi les algorithmes existant pour minimiser une fonction objectif non-différentiable composée d'une somme de trois fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  dont l'une d'entre elles est de gradient  $\beta$ -Lipschitz, on peut citer l'algorithme explicite-implicite (ou forward-backward) [4]. Cet algorithme, robuste aux erreurs numériques, construit une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  par les itérations : ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n (\text{prox}_{\gamma_n(f+h)}(x_n - \gamma_n \nabla g(x_n)) + a_n - x_n)$$

où  $\gamma_n > 0$  est le pas de l'algorithme,  $\lambda_n > 0$  est le paramètre de relaxation et  $a_n$  représente une erreur tolérée dans le calcul de l'opérateur proximal. De plus,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers une solution du problème (1) sous les hypothèses suivantes :

### Hypothèse 2.1

- (i)  $0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < \sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < 2\beta^{-1}$
- (ii) ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )  $\lambda_n \in ]0, 1]$  et  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$
- (iii)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\| < +\infty$ .

Dans cet algorithme, la principale difficulté réside dans le calcul de  $\text{prox}_{\gamma_n(f+h)}$ . Dans le cas où  $h$  est la fonction indicatrice d'un convexe, des propriétés liées au calcul de  $\text{prox}_{\iota_C + f}$  ont été énoncées dans [3, 9]. Il est démontré dans [3] que si  $\text{prox}_f \in C$ ,  $\text{prox}_{\iota_C + f} = \text{prox}_f$ . De plus, si l'espace de Hilbert considéré est  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ , alors  $\text{prox}_{\iota_C + f} = P_C \circ \text{prox}_f$ . Cette propriété s'étend au cas où  $f$  et  $C$  sont séparables [9].

Si maintenant ces hypothèses ne sont pas vérifiées, le calcul de cet opérateur peut être effectué par deux approches : soit en considérant la définition de l'opérateur proximal et, par conséquent, en résolvant un nouveau problème de minimisation convexe ; soit en utilisant l'algorithme de Dykstra proposé dans [12] permettant de calculer l'opérateur proximal d'une somme

de deux fonctions. Concernant la première solution, dans [9], l'opérateur proximal est calculé en utilisant l'algorithme de Douglas-Rachford [3]. Cependant, l'algorithme proposé dans la seconde approche possède le principal avantage d'avoir des hypothèses moins fortes sur les conditions de qualification des fonctions. Dans le problème de minimisation que nous considérons ici, nous cherchons à généraliser ce calcul d'opérateur proximal au cas où  $h$  n'est pas nécessairement égale à  $\iota_C$ .

Optons dans un premier temps pour l'algorithme de Douglas-Rachford et revenons à la définition de l'opérateur proximal : ( $\forall x \in \mathcal{H}$ )

$$\text{prox}_{\gamma_n(f+h)}x = \arg \min_{y \in \mathcal{H}} \frac{1}{2} \|y - x\|^2 + \gamma_n f(y) + \gamma_n h(y).$$

L'algorithme de Douglas-Rachford permet de minimiser une somme de deux fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ , que nous noterons  $g_1$  et  $g_2$  et donc différentes combinaisons sont envisageables afin de résoudre le problème de minimisation énoncé précédemment :

- ①  $g_1 = \frac{1}{2} \|\cdot - x\|^2 + \gamma_n f$  et  $g_2 = \gamma_n h$
- ②  $g_1 = \gamma_n h$  et  $g_2 = \frac{1}{2} \|\cdot - x\|^2 + \gamma_n f$
- ③  $g_1 = \frac{1}{2} \|\cdot - x\|^2 + \gamma_n h$  et  $g_2 = \gamma_n f$
- ④  $g_1 = \gamma_n f$  et  $g_2 = \frac{1}{2} \|\cdot - x\|^2 + \gamma_n h$ .

L'algorithme de Douglas-Rachford ( $\mathcal{DR}$ ) construit les itérations suivantes : ( $\forall m \in \mathbb{N}$ )

$$(z_{m+\frac{1}{2}}, z_{m+1}) = \mathcal{DR}_{g_1, g_2}(z_m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_{m+\frac{1}{2}} = \text{prox}_{\vartheta g_2}(z_m) \\ z_{m+1} = z_m + \tau_m (\text{prox}_{\vartheta g_1}(2z_{m+\frac{1}{2}} - z_m) - z_{m+\frac{1}{2}}) \end{cases},$$

où  $\vartheta > 0$  et  $(\tau_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels positifs.

### Hypothèse 2.2

- (i)  $\text{dom } g_1 \cap \text{int } \text{dom } g_2 \neq \emptyset$
- (ii) ( $\forall m \in \mathbb{N}$ ),  $\tau_m \in ]0, 2]$
- (iii)  $g_2$  est une fonction fortement convexe.

Sous les hypothèses 2.2, la suite  $(z_{m+\frac{1}{2}})_{m > 1}$  converge fortement vers le minimiseur de  $\text{prox}_{\gamma_n(f+h)}x$ . Par conséquent dans les choix précédemment considérés, seuls ② et ④ assurent la convergence forte de l'algorithme Douglas-Rachford nécessitant que  $g_2$  soit une fonction de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  fortement convexe. L'opérateur proximal associé à  $g_2$  en ② est

$$\text{prox}_{\vartheta g_2} = \text{prox}_{\frac{\vartheta \gamma_n}{1+\vartheta} f} \left( \frac{\cdot + \vartheta x}{1+\vartheta} \right). \quad (2)$$

Considérons à présent le calcul de l'opérateur proximal de  $f + h$  en utilisant l'algorithme de Dykstra : les conditions à satisfaire pour obtenir la convergence forte vers  $\text{prox}_{\gamma_n(f+h)}$  sont la connaissance des opérateurs proximaux de  $f$  et  $h$  (également nécessaires à l'utilisation de l'algorithme de Douglas-Rachford). L'algorithme est le suivant : soit  $r_0 \in \mathcal{H}$  et  $p_0 =$

$q_0 = 0$ , les suites  $(r_m)_{m \geq 1}$  et  $(s_m)_{m \geq 1}$  sont générées par les itérations suivantes : ( $\forall m \in \mathbb{N}$ )

$$(s_m, p_{m+1}, r_{m+1}, q_{m+1}) = \mathcal{D}_{\gamma_n f, \gamma_n h}(r_m, p_m, q_m) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s_m &= \text{prox}_{\gamma_n f}(r_m + p_m) \\ p_{m+1} &= r_m + p_m - s_m \\ r_{m+1} &= \text{prox}_{\gamma_n h}(s_m + q_m) \\ q_{m+1} &= s_m + q_m - r_{m+1}. \end{cases}$$

Les suites  $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$  et  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ainsi générées convergent fortement vers la solution de  $\text{prox}_{\gamma_n(f+h)}(r_0)$  [12, Theorem 3.3].

## 2.1 Algorithme proposé

La forme des algorithmes finaux, une fois l'imbrication effectuée sont donnée ci-après. Deux algorithmes imbriqués sont alors envisageables : l'algorithme de Douglas-Rachford intégré dans les itérations de l'algorithme explicite-implicite :

### Algorithme 2.1

- (i) Choisir  $x_0 \in \mathcal{H}$  et  $n = 0$ .
- (ii) Choisir  $\lambda_n \in ]0, 1]$ ,  $\gamma_n \in ]0, 2\beta^{-1}[$  et  $\vartheta > 0$ .
- (iii) Poser  $d_n = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n)$ .
- (iv) Pour  $m = 0, \dots, M_n$ 
  - a) Choisir  $\tau_m \in ]0, 2]$  et  $z_{n,0} \in \mathcal{H}$
  - b)  $(z_{n,m+\frac{1}{2}}, z_{n,m+1}) = \mathcal{DR}_{g_1, g_2}(z_{n,m}, d_n)$
  - c) Si  $z_{n,m+\frac{1}{2}} = z_{n,m-\frac{1}{2}}$ , aller en (v).
- (v) Faire  $x_{n+1} = x_n + \lambda_n (z_{n,m+\frac{1}{2}} - x_n)$ .
- (vi) Incrémenter  $n$  ( $n \leftarrow n + 1$ ) et aller en (ii).

ou celui de Dykstra intégré dans les itérations de l'algorithme explicite-implicite :

### Algorithme 2.2

- (i) Choisir  $x_0 \in \mathcal{H}$  et  $n = 0$ .
- (ii) Choisir  $\lambda_n \in ]0, 1]$  et  $\gamma_n \in ]0, 2\beta^{-1}[$ .
- (iii) Poser  $r_{n,0} = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n)$ .
- (iv) Poser  $p_{n,0} = q_{n,0} = 0$ .
- (v) Pour  $m = 0, \dots, M_n$ 
  - a)  $(s_{n,m}, p_{n,m+1}, r_{n,m+1}, q_{n,m+1}) = \mathcal{D}_{\gamma_n f, \gamma_n h}(r_{n,m}, p_{n,m}, q_{n,m})$
  - b) Si  $r_{n,m+1} = r_{n,m}$ , aller en (vi).
- (vi) Faire  $x_{n+1} = x_n + \lambda_n (r_{n,m+1} - x_n)$ .
- (vii) Incrémenter  $n$  ( $n \leftarrow n + 1$ ) et aller en (ii).

**Proposition 3** *Sous les hypothèses 2.1 et 2.2 pour l'Algorithme 2.1 (resp. sous les hypothèses 2.1 pour l'Algorithme 2.2), il existe une suite d'entiers positifs  $(\bar{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, si ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )  $M_n \geq \bar{M}_n$  alors,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers une solution du problème (1).*

Une idée de la démonstration de convergence des algorithmes 2.1 et 2.2 peut être trouvée dans [9]. Celle-ci est essentiellement basée sur la convergence forte de l'algorithme de Dykstra ou de Douglas-Rachford.

## 4 Résultats

Pour illustrer l'intérêt de ces algorithmes, nous effectuons la restauration d'une image (figure 1(a)) composée d'une planète et d'un fond étoilé. Elle est dégradée par un opérateur de convolution  $A$  (ici un flou uniforme de taille  $3 \times 3$ ) et un bruit de Poisson de paramètre d'échelle 0.05. Cette image dégradée (figure 1(b)) est notée  $z \in \mathcal{G}$  avec  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^N$  où  $N$  représente la taille de l'image. La fonctionnelle à minimiser associée à notre problème est la suivante : ( $\forall x \in \mathcal{H}$ )

$$D_{\text{KL}}(AF^*x, z) + f(x) + \kappa \sum_{i \in S} (F^*x)^{(i)} + \iota_C(F^*x). \quad (3)$$

Dans cet exemple,  $g = D_{\text{KL}}$  représente la divergence de Kullback-Leibler souvent utilisée dans le contexte d'une dégradation poissonnienne et  $F^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$  est un opérateur linéaire de synthèse de trame avec  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^K$  et  $K \geq N$ , ce qui conduit à  $x = (x^{(k)})_{1 \leq k \leq K}$ . Une version de la représentation en arbre dual [14] conduisant à une trame ajustée ( $F^* \circ F = \nu \text{Id}$  avec  $\nu = 2$ ) est utilisée associée à des filtres symlets de longueur 6. La fonction  $f$  correspond à une régularisation dans le domaine transformé  $\mathcal{H}$  telle que  $f(x) = \sum_{k=1}^K \chi_k |x^{(k)}| + \omega_k |x^{(k)}|^{p_k}$  où  $\chi_k > 0$ ,  $\omega_k > 0$  et  $p_k \in \{4/3, 3/2, 2\}$  sont adaptés par sous-bandes. Enfin,  $h = \kappa \sum_{i \in S} (F^* \cdot)^{(i)} + \iota_C \circ F^*$  introduit d'une part, un terme favorisant la parcimonie dans le domaine spatial, sur une zone  $S \subset \mathcal{G}$  et d'autre part, une contrainte dure sur l'appartenance à un convexe  $C \subset \mathcal{G}$ . Dans notre exemple, en accord avec la dynamique de l'image, on a choisi :  $C = [0, 255]^N$ . Le support  $S$  correspond ici à la zone entourant la planète représentée figure 1(c). Nous utilisons la méthode d'extension quadratique proposée dans [9] pour gérer le caractère non  $\beta$ -Lipschitz différentiable de la divergence de Kullback-Leibler.

L'image reconstruite dans le cas où  $\kappa = 0.08$  est représentée figure 1(d). Pour mettre en évidence l'intérêt de la fonction  $h$  proposée en (3), nous examinons à l'aide d'un zoom sur une zone de l'image, les effets des trois types de restauration. La figure 2(b) correspond au cas où l'image est restaurée avec  $\kappa = 0$  (régularisation uniquement dans le domaine transformé  $\mathcal{H}$ ). Puis, la figure 2(c) illustre l'effet de cette même régularisation lorsqu'on l'applique seulement sur la zone centrale. Enfin la figure 2(d) correspond au zoom de la figure 1(d) (régularisation des éléments de la zone centrale dans le domaine transformé et régularisation dans  $\mathcal{G}$  pour les éléments appartenants à  $S$ ). Pour les différentes approches, il n'y a pas de différence significative en ce qui concerne la restauration de la partie centrale mais on peut constater que le choix de  $h$  préconisé permet une bonne détection des étoiles sur l'arrière plan.

Sur la figure 3, nous présentons les courbes de convergence sur les itérées des algorithmes 2.1 et 2.2 en fonction du temps CPU (en secondes). Il en ressort que les itérations imbriquées de l'algorithme de Dykstra semblent converger au moins aussi rapidement voire légèrement plus rapidement, que les itérations de celui de Douglas-Rachford, sans avoir de paramètres supplémentaires à ajuster comme  $\tau_m$  et  $\vartheta$ .

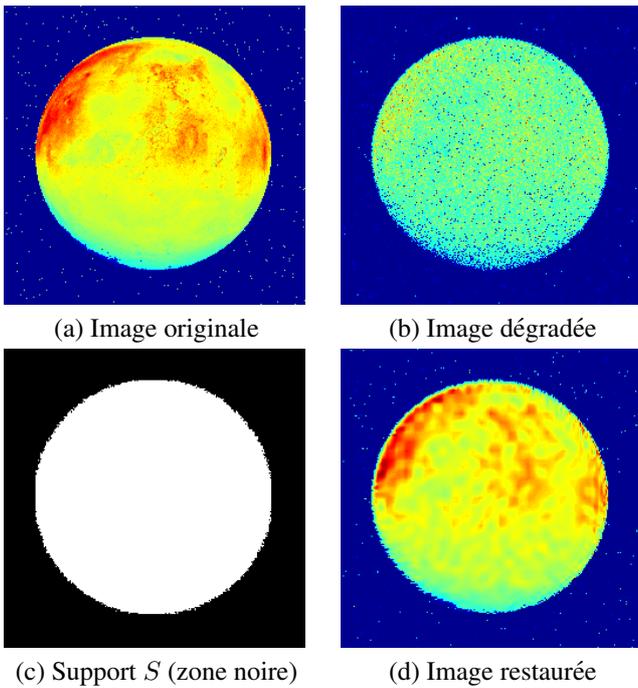


FIG. 1 – Résultats de restauration sur une image d’astronomie.

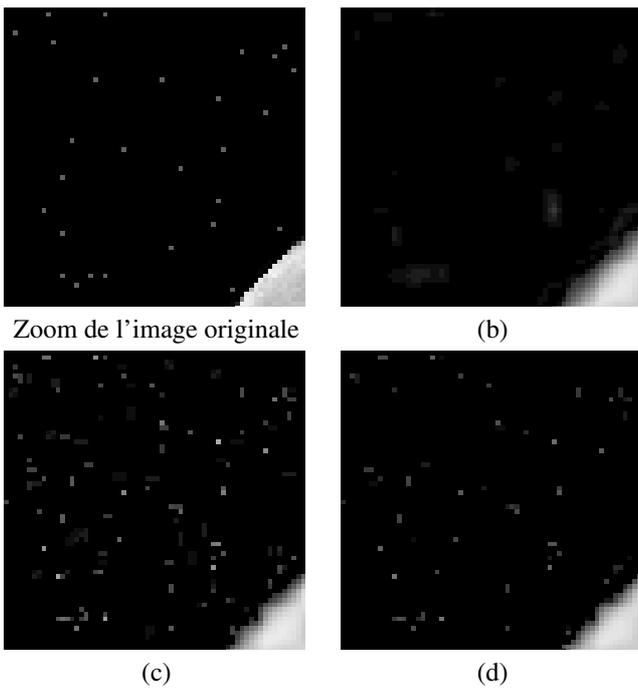


FIG. 2 – Comparaison visuelle pour différentes régularisations (zooms).

## Références

- [1] J. M. Bioucas-Dias et M. A. T. Figueiredo. *A new TwIST : two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration*, IEEE Trans. on Image Proc., vol. 16, pp. 2992–3004, 2007.
- [2] C. Chaux, P. L. Combettes, J.-C. Pesquet, et V. R. Wajs. *A variational formulation for frame-based inverse problems*, Inverse Problems, vol. 23,

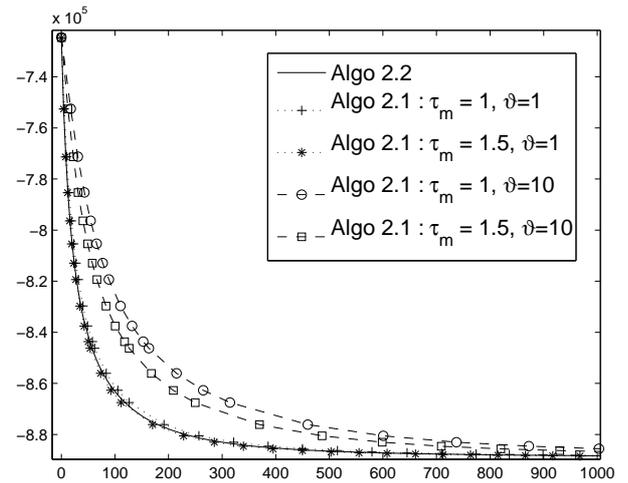


FIG. 3 – Comparaison en temps CPU de l’algorithme imbriquant Dykstra (Algo. 2.2) et Douglas-Rachford (Algo. 2.1) pour différentes valeurs de  $\tau_m$  et  $\vartheta$ .

pp. 1495–1518, 2007.

- [3] P. L. Combettes et J.-C. Pesquet. *A Douglas-Rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery*, IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, vol. 1, pp. 564–574, 2007.
- [4] P. L. Combettes et V. R. Wajs. *Signal recovery by proximal forward-backward splitting*, Multiscale Model. Simul., vol. 4, pp. 1168–1200, 2005.
- [5] I. Daubechies, M. Defrise et C. De Mol. *An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint*, Comm. Pure Applied Math., vol. 57, pp. 1413–1457, 2004.
- [6] M. A. T. Figueiredo et R. D. Nowak. *An EM algorithm for wavelet-based image restoration*, IEEE Trans. on Image Proc., vol. 12, pp. 906–916, 2003.
- [7] J. J. Moreau. *Proximité et dualité dans un espace hilbertien*, Bull. Soc. Math. France, vol. 93, pp. 273–299, 1965.
- [8] N. Pustelnik, C. Chaux et J.-C. Pesquet. *A wavelet-based quadratic extension method for image deconvolution in the presence of Poisson noise*, dans IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Taipei, Taiwan, 19–24 April 2009. pp. 4.
- [9] C. Chaux, J.-C. Pesquet et N. Pustelnik. *Nested iterative algorithms for convex constrained image recovery problems*, SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009. A paraître.
- [10] P. L. Combettes et J.-C. Pesquet. *A proximal decomposition method for solving convex variational inverse problems*, Inverse Problems, vol. 24, no. 6, December 2008.
- [11] J. M. Bioucas-Dias et M. A. T. Figueiredo. *An iterative algorithm for linear inverse problems with compound regularizer*, IEEE International Conference on Image Processing, San Diego, CA, U.S.A., 12–15 Oct. 2008. pp. 4
- [12] H. H. Bauschke et P. L. Combettes. *A Dykstra-like algorithm for two monotone operators*, Pacific Journal of Optimization, vol. 4, pp. 383–391, Sept. 2008.
- [13] J. Bect, L. Blanc-Féraud, G. Aubert et A. Chambolle. *A  $l^1$ -unified variational framework for image restoration*, Proc. European Conference on Computer Vision, Prague, République Tchèque, pp. 1–13, Mai 2004.
- [14] C. Chaux, L. Duval et J.-C. Pesquet. *Image analysis using a dual-tree M-band wavelet transform*, IEEE Trans. on Image Proc., vol. 15, pp. 2397–2412, 2006.