

Echantillonnage minimal de la sphère céleste adapté au réseau d’antennes gravitationnelles terrestres*

Olivier Rabaste^{*(1,2)}, Éric Chassande-Mottin⁽¹⁾

⁽¹⁾ CNRS, AstroParticule et Cosmologie, 10, rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 PARIS Cedex 13, FRANCE

⁽²⁾ ONERA, Département Electromagnétisme et Radar, Chemin de la Hunière 91761 Palaiseau Cedex

`olivier.rabaste@onera.fr, ecm@apc.univ-paris7.fr`

Résumé – Grâce à un récent accord d’échange de données, les détecteurs Virgo et LIGO forment un réseau d’antennes gravitationnelles à l’écoute des événements violents de l’Univers. Nous nous intéressons ici aux méthodes d’analyse cohérente, similaires à celles qui sont employées pour les réseaux d’antennes électromagnétiques. Si ces méthodes permettent la détermination de la position de la source astrophysique, elles sont également limitées par le coût calculatoire que cette estimation engendre. Nous proposons de traiter cette question par la détermination d’une grille céleste de taille minimale. Pour cela, nous formulons le problème de couverture de la sphère sous la forme d’un problème de couverture d’ensemble. Nous proposons alors de le résoudre par un algorithme glouton fondé sur une relaxation du problème lagrangien dual. Les ensembles obtenus permettent d’obtenir de bonnes performances de détection.

Abstract – Thanks to a recent data exchange agreement, the detector Virgo and LIGO now form a network of gravitational wave antennas listening to the violent events of the Universe. Here we are interested in coherent analysis methods, akin to the ones in used for electromagnetic sensor arrays. While those methods allow the determination of the astrophysical source position, they are limited by the large computational cost that this estimation generates. We propose to address this issue by the construction of a sky grid of minimal size. We formulate this problem as a set covering problem and we solve it via a greedy algorithm based on a Lagrangian relaxation of the dual problem. The minimal sets obtained by this method lead to good detection performance.

1 Introduction

Une collaboration internationale [1] vise à effectuer la première observation directe des ondes gravitationnelles, dont l’existence est prédite par la théorie de la Relativité Générale d’Einstein. Ces ondes sont des déformations de la métrique de l’espace-temps se propageant à la vitesse de la lumière. Elles sont observables au moyen d’interféromètres de Michelson aux proportions imposantes (plusieurs kilomètres de longs) qui permettent de mettre en évidence les très faibles variations de distance induites par leur passage.

Un ensemble de sources astrophysiques émettent des ondes gravitationnelles dans la bande de fréquence (entre quelques dizaines de Hertz et quelques kiloHertz) ouverte par les détecteurs actuellement en opération. Nous nous intéressons ici aux sources de transitoires gravitationnels (typiquement d’une durée d’une centaine de ms à quelques secondes) impliquant généralement des objets compacts (étoiles à neutrons ou trous noirs).

Les détecteurs d’ondes gravitationnelles sont des antennes quasi-omnidirectionnelles. Pour cette raison, la position de la source ne peut pas être obtenue avec un unique interféromètre. Cette information est toutefois importante

car elle permet de tourner vers la région spécifiée d’autres instruments d’observation pour la recherche d’une éventuelle contrepartie (optique, sursaut gamma, . . .) qui confirmerait l’origine astrophysique du transitoire gravitationnel détecté. Une estimation de la position peut être obtenue en combinant les informations provenant de plusieurs détecteurs.

Les signaux gravitationnels recherchés étant généralement connus à quelques paramètres physiques près, les chaînes de traitement utilisées pour la détection sont pour la plupart fondées sur le principe du rapport de vraisemblance généralisé (RVG), qui permet d’effectuer conjointement l’estimation des divers paramètres et la détection proprement dite. Appliqué à l’estimation de la position de la source, celui-ci conduit à la production d’une carte de vraisemblance obtenue par la répétition du calcul de la vraisemblance en un ensemble de points répartis de manière régulière sur la sphère céleste. Le maximum de cette carte fournit la position estimée de la source.

La principale limitation de cette méthode vient du coût de calcul engendré. Les méthodes d’estimation permettant le calcul de la vraisemblance en un unique point sont pour certaines lourdes à mettre en œuvre, et leur répétition en un grand nombre de points conduit à des coûts de calcul prohibitifs. Pour limiter la taille de la grille céleste, il est nécessaire de l’adapter à la résolution angulaire du réseau

* OR a reçu une bourse postdoctorale du Virgo-EGO Scientific Forum.

formé d’antennes gravitationnelles. Contrairement aux réseaux d’antennes électromagnétiques, les antennes gravitationnelles sont disposées et orientées irrégulièrement à la surface de la Terre. La résolution angulaire dépendant directement de la géométrie du réseau, elle varie selon la direction du ciel considérée. Ainsi l’échantillonnage régulier de la sphère céleste utilisé habituellement n’est pas adapté à ce réseau et une procédure permettant de construire une grille céleste de petite taille adaptée au réseau de détecteurs gravitationnels s’avère nécessaire.

Dans cet article, nous proposons une méthode d’échantillonnage assurant la couverture totale du ciel avec un minimum de points. Ce problème peut se formuler sous la forme d’un problème de recouvrement de la sphère par des ellipses issues du développement de Taylor d’ordre 2 du rapport de vraisemblance issu de l’utilisation du RVG. La méthode proposée peut se décomposer en deux étapes. Une première étape consiste à relâcher les contraintes de recouvrement : plutôt que de travailler avec un ensemble continu (la surface de la sphère), nous proposons de discrétiser le problème en utilisant un ensemble Ω très dense de points qui recouvre la sphère uniformément. Le problème de recouvrement de la sphère peut alors être remplacé par un problème de recouvrement de l’ensemble des points de Ω . La deuxième étape de la méthode consiste à réduire l’ensemble sur-échantillonné à un ensemble de taille minimale adapté au réseau de détecteurs gravitationnels en résolvant un problème d’optimisation en nombre entier sous contraintes linéaires. Nous proposons de résoudre ce problème de grande taille par un algorithme glouton fondé sur une relaxation du problème lagrangien dual.

2 Ellipses de vraisemblance

Le rapport de vraisemblance (RV) est une fonction des données et des paramètres caractéristiques du signal, parmi lesquels la position de la source. Le test du RVG consiste à maximiser le RV par rapport à ces paramètres inconnus. Nous supposons ici que cette maximisation a été effectuée pour tous les paramètres sauf les coordonnées de la source (ϕ, θ) . La maximisation de la vraisemblance résultante $\Lambda(\phi, \theta)$ s’effectue en calculant la valeur pour différents échantillons de la grille céleste. On cherche à minimiser la taille de cette grille en prenant en compte les spécificités de la fonction de vraisemblance.

En présence d’un signal et en l’absence de bruit, cette vraisemblance est maximale dans la direction de la source (ϕ_0, θ_0) . Le comportement de la statistique $\Lambda(\phi, \theta)$ autour du point (ϕ_0, θ_0) est obtenu par un développement de Taylor au deuxième ordre (le terme du premier ordre est zéro puisque Λ est maximal en (ϕ_0, θ_0)). On quantifie ainsi la perte de vraisemblance induite par un écart entre la direction considérée (ϕ, θ) et la direction véritable (ϕ_0, θ_0) . En tolérant une perte maximale $\Lambda(\phi, \theta)/\Lambda(\phi_0, \theta_0) \geq \alpha^2$,

on obtient alors une cellule elliptique d’équation :

$$\sum_{\alpha, \beta} \partial_{\alpha\beta}^2 \Lambda|_{\phi_0, \theta_0} \Delta\alpha \Delta\beta \leq 2\Lambda(\phi_0, \theta_0) (1 - \alpha^2). \quad (1)$$

où $\alpha, \beta = \phi$ et/ou θ , $\Delta\phi = \phi - \phi_0$ et $\Delta\theta = \theta - \theta_0$.

Dans [2], nous avons obtenu l’expression de Λ et de son développement dans le cas de la détection cohérente d’un signal test (transitoire gravitationnel monochromatique de fréquence f_0) sous hypothèse gaussienne pour le bruit instrumental. Nous utilisons cette expression dans les résultats discutés en Sec. 4.

La forme et la taille des ellipses dépendent des positions et orientations des détecteurs à travers des expressions compliquées. Un ordre de grandeur peut cependant être obtenu par le raisonnement suivant. Les détecteurs étant distants de $d \sim 10^4$ km et les ondes gravitationnelles se propageant théoriquement à la vitesse de la lumière, on peut estimer la résolution angulaire* typique à 3 degrés pour un signal test de fréquence $f_0 \sim 150$ Hz qui correspond au point de sensibilité maximum des détecteurs. La couverture complète du ciel est donc assurée avec un millier d’ellipses.

3 Résolution du problème de recouvrement

3.1 Relaxation

Le problème d’échantillonnage est équivalent à celui du recouvrement de la sphère par des ellipses. Ce problème est difficile car les ellipses varient avec la direction considérée. Nous proposons ici de résoudre le problème de recouvrement en le discrétisant : plutôt que de considérer la surface de la sphère, on considère un ensemble Ω très dense de N points qui recouvrent la sphère uniformément. Cet ensemble peut être simplement construit par tirage uniforme de points sur la surface de la sphère. Ce tirage est ici effectué quasi-aléatoirement au moyen de séquences de Halton [3] car ces séquences permettent d’obtenir une grille plus régulière que les séquences pseudo-aléatoires.

La contrainte initiale de recouvrement de la sphère (critère continu) impose en particulier le recouvrement de l’ensemble des points de Ω (critère discret). Nous remplaçons ici le critère continu par le critère discret. Notons toutefois que ces deux contraintes ne sont pas équivalentes : le critère discret n’implique pas le critère continu. Il y a donc relaxation des contraintes de recouvrement.

Notons $\Omega = \{s_k = (\phi_k, \theta_k); k = 1 \dots N\}$. On associe à tout s_k l’ellipse \mathcal{E}_k définie au point (ϕ_k, θ_k) par Eq. (1). Afin d’obtenir un critère symétrique, on définit la notion d’adjacence suivante : deux échantillons s_j et s_k sont adjacents si $s_j \in \mathcal{E}_k$ et $s_k \in \mathcal{E}_j$. La symétrie de ce critère

*Ceci est déterminé en s’autorisant une différence de temps d’arrivée à chaque détecteur d’au plus une fraction de la période du signal.

est importante car $s_j \in \mathcal{E}_k$ n'implique pas nécessairement $s_k \in \mathcal{E}_j$ en raison des tailles variables des ellipses. On recherche le plus petit sous-ensemble $\Omega_m \subset \Omega$ tels que tous les éléments de Ω aient un adjacent dans Ω_m .

3.2 Problème de couverture d'ensemble

Remarquons tout d'abord que les relations d'adjacences définies précédemment peuvent être exprimées par une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de taille $|\Omega| \times |\Omega|$ où $a_{kn} = 1$ si x_k et x_n sont adjacents, et $a_{kn} = 0$ sinon. Définissons ensuite le vecteur \mathbf{x} de taille $|\Omega|$ à valeur dans $0,1$. Tout sous-ensemble Ω_s de Ω définit une réalisation particulière de ce vecteur en posant $x_k = 1$ si $s_k \in \Omega_s$ et $x_k = 0$ sinon. Or le produit \mathbf{Ax} est un moyen simple de déterminer si l'ensemble Ω_s permet de recouvrir l'ensemble des points de Ω : en effet si le vecteur \mathbf{Ax} présente une composante nulle, alors l'échantillon correspondant de Ω n'est pas recouvert par Ω_s . Il s'ensuit que le problème de recouvrement de la sphère peut s'exprimer sous la forme d'un problème d'optimisation en nombre entier avec contraintes linéaires :

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{u}^T \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{|\Omega|} x_k \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{u}, \\ & x_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, |\Omega|, \end{aligned} \quad (2)$$

où $\mathbf{u} = [1, \dots, 1]^T$ est un vecteur de taille $|\Omega|$. Ici l'objectif consiste à minimiser le nombre de composantes non nulles de \mathbf{x} et donc la taille de l'ensemble minimal Ω_m , tandis que les contraintes permettent d'imposer une couverture totale de Ω .

Ainsi formulé, ce problème est un cas particulier de la famille des *problèmes de couverture d'ensemble*, qui sont NP-complets. Une littérature abondante existe sur le sujet (voir [4] pour une revue). La plupart des méthodes proposées ne sont toutefois pas applicables à des problèmes de grande taille. Or ici l'ensemble Ω peut contenir plusieurs dizaines voire centaines de millier d'échantillons. Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode adaptée à des problèmes de grande taille. Nous proposons ici une méthode inspirée des solutions proposées dans [5] et [6] pour résoudre des problèmes impliquant un grand nombre de variables et de contraintes. Elle repose sur un algorithme glouton qui utilise une heuristique fondée sur la relaxation lagrangienne du problème dual pour résoudre le problème d'optimisation.

3.3 Résolution du problème de couverture d'ensemble

Le problème dual de (2) est défini par [5, 6] :

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{u}_m^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{u}_m, \\ & y_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, |\Omega_e|, \end{aligned} \quad (3)$$

et sa relaxation lagrangienne est donnée par :

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\mu}} \quad & \max_{\mathbf{y}} L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{s.t.} \quad & \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & 0 \leq y_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4)$$

où $L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}_m^T \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{y} - \mathbf{u}_m)$ est la fonction de Lagrange et $\boldsymbol{\mu}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. La maximisation de $L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ par rapport à \mathbf{y} est ici directe : elle est obtenue en posant $y_k = 1$ si la $k^{\text{ème}}$ colonne du vecteur ligne $\mathbf{u}_m^T - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A}^T$ est positive, et $y_k = 0$ sinon. La fonction $\max_{\mathbf{y}} L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ peut quant à elle être minimisée de manière efficace par un algorithme de sous-gradient car elle est toujours convexe par rapport à $\boldsymbol{\mu}$ [7]. Contrairement à [5] et [6], nous exploitons ici uniquement l'information provenant du vecteur $\boldsymbol{\mu}$, qui est une solution presque optimale et presque admissible du problème (4).

Une solution du problème de recouvrement est alors construite itérativement par un algorithme glouton suivant le schéma suivant. A chaque itération, la composante x_k correspondant au plus grand terme de $\boldsymbol{\mu}$ est ajoutée à la solution et toutes les lignes correspondantes j telles que $x_j \in \mathcal{E}_k$ sont éliminées (les contraintes correspondantes étant alors satisfaisantes). Cela conduit à un problème réduit qui est traité de manière similaire. Par construction, la solution finale satisfait les contraintes de recouvrement.

La méthode que nous proposons pour résoudre le problème d'échantillonnage de la sphère céleste peut finalement être résumée de la manière suivante :

1. Tirage quasi-aléatoire de l'ensemble initial Ω ;
2. Initialisation de l'ensemble minimal $\Omega_m = \emptyset$;
3. Recherche de tous les points s_k tels que $\mathcal{E}_k = \{s_k\}$; ces points sont ajoutés à l'ensemble minimal Ω_m et retirés de l'ensemble Ω ainsi que les colonnes et les lignes correspondantes dans la matrice \mathbf{A} ;
4. Tant que $\Omega_e \neq \emptyset$:
 - Résolution de la relaxation lagrangienne (4) du problème (2) ;
 - Ajout à Ω_m de l'échantillon s_k correspondant au plus grand multiplicateur de Lagrange μ_k ; la colonne correspondante ainsi que toutes les lignes j telles que $s_j \in \mathcal{E}_k$ sont supprimées de la matrice \mathbf{A} ; l'ensemble Ω est réduit de manière similaire.

4 Résultats

Nous considérons pour les simulations une onde gravitationnelle oscillante de fréquence centrale $f_0 \sim 150$ Hz, et un réseau représentatif des détecteurs en opération actuellement, soit Virgo (Italie), LIGO (deux détecteurs aux Etats-Unis) et GEO (Allemagne). Les orientations des détecteurs sont supposées parallèles. La résolution angulaire obtenue pour un tel réseau est présentée en figure 1. Pour appliquer la méthode proposée, nous utilisons un ensemble

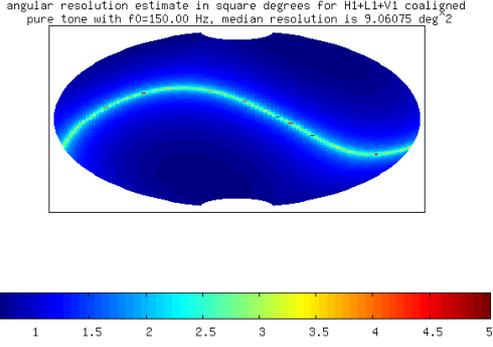


FIG. 1 – Estimation de la résolution angulaire pour le réseau discuté en section 4 .

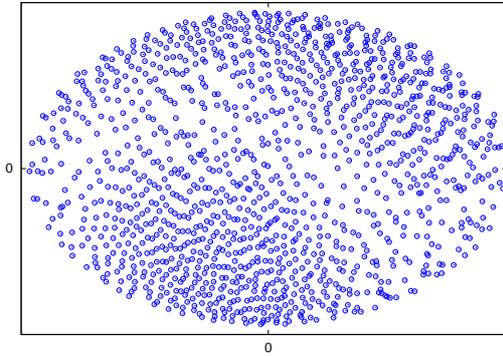


FIG. 2 – Ensemble minimal adapté au réseau obtenu à partir d'une couverture régulière de la sphère.

sur-échantillonné obtenu avec deux séquences de Halton de 30000 points. L'ensemble minimal obtenu est présenté en figure 2. Il contient 1285 échantillons, ce qui est en bon accord avec nos estimations de taille de grille. Un zoom sur la répartition des ellipses est proposé en figure 3 et montre que les contraintes de recouvrement sont vérifiées.

Afin de vérifier que la grille minimale obtenue est efficace du point de vue de la détection, nous avons comparé les performances obtenues en terme de probabilité de fausse alarme et de détection pour la grille Ω et la grille Ω_m . Ces probabilités sont obtenues par simulations de Monte Carlo. La position de la source a été tirée uniformément sur la surface de la sphère. Pour chaque tirage, une carte de vraisemblance est calculée selon la procédure d'analyse cohérente (similaire à une procédure en formation de voie) décrite dans [2]. Le maximum de cette carte a été comparé à un seuil. Plusieurs seuils ont été considérés, et pour chaque seuil 10^4 simulations ont été lancées. Les performances obtenues sont présentées en figure 4. Elles montrent que les performances sont comparables pour les deux grilles testées.

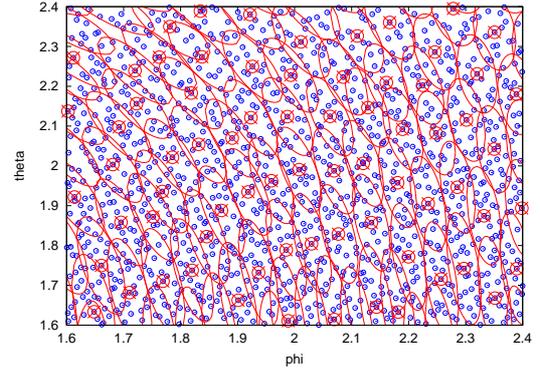


FIG. 3 – Echantillons des ensembles initial (points bleus) et final (cercles et croix rouges), et ellipses associées.

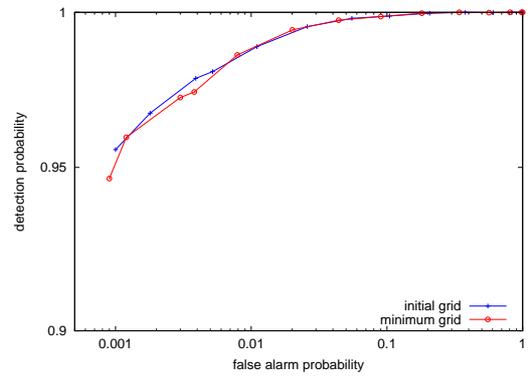


FIG. 4 – Comparaison des performances de détection pour la grille sur-échantillonnée et la grille minimale.

Références

- [1] M.-A. Papa. Progress towards Gravitational Wave Astronomy. *Class. Quant. Grav.*, 25 :114009, 2008.
- [2] O. Rabaste, E. Chassande-Mottin, and A. Pai. Sparse sky grid for the coherent detection of gravitational wave bursts, 2009. Submitted.
- [3] J. Halton. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numerische Mathematik*, 2 :84–90, 1960.
- [4] A. Caprara, P. Toth, and M. Fischetti. Algorithms for the set covering problem. *Annals of Operations Research*, 98 :353–371, 2000.
- [5] J.E. Beasley. A Lagrangian heuristic for set-covering problems. *Naval Research Logistics*, 37 :151–164, 1990.
- [6] S. Ceria, P. Nobili, and A. Sassano. A Lagrangian-based heuristic of large-scale set covering problems. *Mathematical Programming*, 81(2) :215–228, 1998.
- [7] M. Minoux. *Programmation mathématique, théorie et algorithmes*. Dunod, 1983.