

# Détection de chirps multi-composantes et application aux ondes gravitationnelles des binaires à rapport de masses extrême

Olivier Rabaste<sup>(1,2)</sup>, Antoine Petiteau<sup>(1,3)</sup> et Éric Chassande-Mottin<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> CNRS, AstroParticule et Cosmologie, 10, rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 PARIS Cedex 13, FRANCE

<sup>(2)</sup> ONERA, Département Electromagnétisme et Radar, Chemin de la Hunière 91761 Palaiseau Cedex

<sup>(3)</sup> Am Mühlenberg 1, 14476 Golm bei Potsdam, Allemagne

olivier.rabaste@onera.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous nous intéressons à la détection de signaux gravitationnels émis par des binaires spirales à rapport de masses extrême (BRME). Ces signaux, qui devraient être observés par le futur interféromètre spatial LISA, sont caractérisés par une évolution de phase mal connue et un grand nombre d’harmoniques. Nous proposons ici une méthode permettant d’estimer l’évolution fréquentielle de ces harmoniques afin de détecter les signaux gravitationnels correspondant. Pour cela, nous paramétrons le signal avec ses harmoniques par un couple de variables fréquentielles. Le problème d’estimation revient alors à trouver le couple de variables fournissant l’intégrale la plus grande dans le plan temps-fréquence. Il est résolu par programmation dynamique. La méthode proposée est capable d’extraire des signaux émis par des BRME situées à plusieurs centaines de Mpc.

**Abstract** – In this article, we are concerned by the detection of gravitational waves emitted by extreme mass ratio inspirals (EMRI). These signals that should be observed by the future spatial interferometer LISA, are characterized by unknown phase evolution and a great number of harmonics. We propose here a method that permits to estimate the frequency evolution of these harmonics in order to detect these gravitational wave signals. We propose to model the signal and the harmonics by a couple of frequency variables. Then the estimation problem consists of finding the couple of variables that provides the greatest integral in the time-frequency plane. This search is performed by dynamic programming. The proposed method is able to extract gravitational signals composed of several harmonics emitted by EMRIs located at several hundreds of Mpc.

## 1 Introduction

Avec les premières prises de données du réseau d’interféromètres gravitationnels terrestres et l’espoir d’une prochaine détection directe des ondes gravitationnelles, “rides” de l’espace-temps prédites par la théorie de la Relativité Générale, un nouveau domaine de l’astronomie est sur le point de naître. Si ces détecteurs terrestres ouvrent une fenêtre d’observation allant de la dizaine de Hz à quelques kHz, l’observatoire spatial LISA (Laser Interferometer Space Antenna) [1], projet actuellement développé par l’ESA et la NASA, a pour but d’étendre cette fenêtre aux fréquences entre 0.01 et 100 mHz. Ce détecteur est une formation de trois satellites distants de cinq millions de kilomètres suivant la Terre sur son orbite.

On estime que de nombreuses sources émettent dans la bande fréquentielle de LISA. Parmi elles, les binaires à rapport de masses extrême BRME (*extreme mass ratio inspirals*, EMRI en anglais) sont particulièrement intéressantes. Ce sont des systèmes binaires constitués d’un trou noir supermassif (de masse  $10^5$  et  $10^8$  masses solaires) autour duquel orbite un petit corps compact, typiquement un trou noir de quelques masses solaires ou une étoile à neutrons. On s’attend à observer plusieurs dizaines à plusieurs centaines de BRME au cours de la mission LISA. Ces sources sont intéressantes car leur observation per-

mettrait le test du *théorème de calvitie*, une des prédictions fondamentales de la Relativité Générale portant sur la géométrie du puits creusé dans l’espace-temps par un trou noir. Mais la détection de la signature complexe d’une BRME présente un réel défi que nous allons aborder ici.

Le système couplé d’équations différentielles qui caractérise la dynamique d’un système BRME, et par conséquent les ondes gravitationnelles qu’il émet, n’admet pas de solution analytique simple. Les méthodes de détection proposées reposent sur des solutions approchées. La recherche des formes d’ondes ainsi obtenues s’effectue à l’aide de banques de filtres adaptés en prenant soin de couvrir l’ensemble de l’espace décrit par les paramètres physiques. La difficulté vient de la grande taille de cet espace qui requiert l’utilisation de méthodes spécifiques, par exemple des algorithmes stochastiques de type MCMC [2], pour faire la recherche du filtre donnant la corrélation maximum avec les données.

On propose ici une approche alternative en mettant à profit la caractérisation générale de la forme d’onde dans le plan temps-fréquence (TF) plutôt qu’une résolution directe du modèle astrophysique. La dynamique orbitale du système implique que l’onde gravitationnelle émise

est quasi-périodique. La grande asymétrie de la masse des deux corps induit l'existence d'un grand nombre d'harmoniques. Le signal émis peut donc être décrit comme une superposition de signaux chirps dont la fréquence évolue quasiment parallèlement.

Une méthode temps-fréquence d'estimation non paramétrique de signaux chirps, dénommée Best Chirplet Chain (BCC) a été proposée par les auteurs dans [3]. Nous proposons dans cet article d'étendre cette méthode et d'y intégrer une recherche couplée du fondamental et des harmoniques du signal BRME. Nous montrons d'abord que la statistique optimale consiste à intégrer l'énergie du signal reçu suivant un *peigne temps-fréquence*. Nous proposons alors une méthode permettant de maximiser efficacement l'énergie sur un peigne comportant plusieurs harmoniques.

Cette article est organisé de la manière suivante : nous présentons en section 2 la modélisation proposée pour les signaux de BRME. En section 3, nous développons la statistique de décision utilisée, et nous explicitons la technique utilisée pour maximiser cette statistique en section 4. Enfin nous présentons les résultats obtenus en section 5.

## 2 Modélisation des signaux émis par les BRME

Les formes d'onde des signaux émis par les BRME ont une structure harmonique très riche, construite à partir de trois fréquences fondamentales : la fréquence orbitale  $f_o$ , la fréquence de précession du périhélie de l'orbite elliptique du corps compact  $f_{pp}$  et la fréquence de précession du plan orbital  $f_{po}$  [4]. Toutes ces fréquences évoluent au cours du temps de manière croissante, de sorte que le signal correspondant à une harmonique précise forme un chirp. Le signal d'une BRME s'écrit donc :

$$s(t) = \sum_{k,l,n} \alpha_{kln} \exp(j(k\varphi_o(t) + l\varphi_{pp}(t) + n\varphi_{po}(t)) + \varphi_{kln}),$$

où  $\alpha_{kln}$  et  $\varphi_{kln}$  représentent respectivement l'amplitude et la phase initiale de l'harmonique  $(k, l, n)$ , et  $\varphi_o(t)$ ,  $\varphi_{pp}(t)$  et  $\varphi_{po}(t)$  représentent les phases associées respectivement aux fréquences  $f_o(t)$ ,  $f_{pp}(t)$  et  $f_{po}(t)$  (par la relation  $\varphi(t) = 1/(2\pi)df(t)/dt$ ). Un exemple de signal BRME est représenté en figure 1. La durée d'observation d'un tel signal s'étend sur plusieurs mois voire un ou deux ans, pour des rapports signal à bruit compris entre 10 et 30 (en échelle linéaire). On remarque que les amplitudes sont très inégales entre les harmoniques, et qu'un ensemble restreint d'harmoniques de fortes amplitudes se dégage. Il s'avère que seules ces harmoniques dominent le bruit instrumental. Nous proposons donc de modéliser le signal des BRME en ne conservant que ces quelques harmoniques. Il est alors possible d'écrire le signal sous la forme

$$s(t) = \alpha \sum_{k=0}^K \exp(j(\varphi_c(t) + k\varphi_h(t) + \varphi_k)),$$

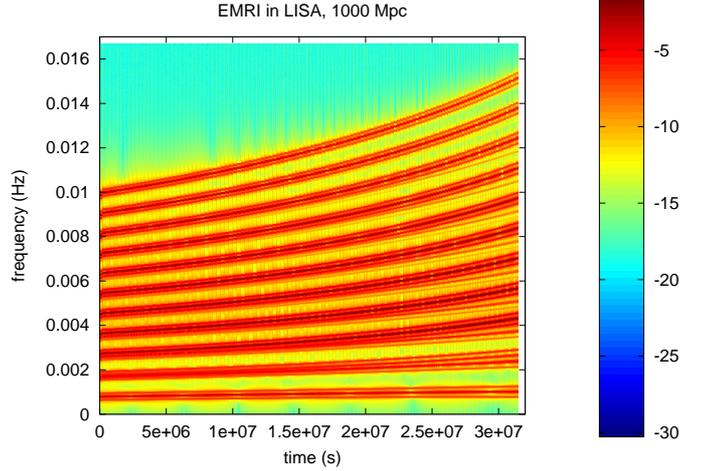


FIG. 1 – Représentation TF d'un signal gravitationnel typique de BRME (sans bruit).

où  $\varphi_c(t)$  représente la phase du chirp fondamental, et  $\varphi_h(t)$  la phase correspondant à l'écart fréquentiel entre ce chirp fondamental et la première harmonique,  $\varphi_k$  la phase initiale pour la  $k^{\text{ème}}$  harmonique et où  $K$  est le nombre d'harmoniques prises en compte dans le modèle. Nous avons supposé dans cette écriture que les amplitudes de toutes ces harmoniques étaient identiques. Notons que cette écriture permet d'exprimer le signal à partir de la connaissance du couple  $(\varphi_c(t), \varphi_h(t))$  (à une phase près).

## 3 Statistique de détection

D'après la théorie de la détection et le formalisme de Neyman-Pearson [5], la détection d'un signal  $s(t)$  noyé dans du bruit  $n(t)$  s'effectue par calcul du rapport de vraisemblance (RV) des données observées  $x(t)$ . Ce critère dépend ici des paramètres inconnus du signal  $s(t)$  tels que l'amplitude, les phases initiales et les phases  $\varphi_c(t)$  et  $\varphi_h(t)$ . Comme un test uniformément plus puissant est difficile à obtenir, nous choisissons d'utiliser le formalisme du test du rapport de vraisemblance généralisé [5]. Similairement au cas d'un chirp seul [3], la maximisation du RV par rapport à l'amplitude et aux phases initiales conduit, pour un bruit additif blanc gaussien, au filtre adapté quadratique, de sorte que l'on obtient la statistique :

$$\Lambda(x) \propto \left| \int x(t) \sum_{k=0}^K \exp(j(\varphi_c(t) + k\varphi_h(t))) dt \right|^2.$$

Il reste à maximiser cette statistique par rapport aux phases  $\varphi_c(t)$  et  $\varphi_h(t)$ . Ce problème est très difficile à résoudre analytiquement sur l'ensemble des chirps harmoniques caractérisés par les couples  $(\varphi_c(t), \varphi_h(t))$ , en raison notamment de sa non-linéarité et de sa non-convexité.

La formule de Moyal nous permet de reformuler la statistique dans le plan temps-fréquence au moyen d'une trans-

formation TF unitaire. Nous utilisons la transformation de Wigner-Ville (TWV), qui produit

$$\Lambda(x) \propto \int_t \int_f w_x(t, f) w_\Sigma(t, f) dt df,$$

où  $w_x$  est la TWV du signal mesuré  $x(t)$  et  $w_\Sigma$  est la TWV de la somme de chirps harmoniques. La TWV d'un signal chirp est essentiellement concentrée dans le voisinage de chemin de fréquence instantanée, soit  $w_c(t, f) \approx \delta(f - f_c(t))$ . En utilisant en outre la bilinéarité de la TWV, la statistique précédente se réécrit comme

$$\Lambda(x) \propto \sum_{k=0}^K \int_t w_x(t, f - [f_c(t) + k f_h(t)]) dt + \sum_{k \neq n} \int_t \int_f w_x(t, f) w_{kn}(t, f) dt df,$$

où les termes  $w_{kn}$  sont les termes croisés provenant des différentes harmoniques, et  $f_c(t)$  et  $f_h(t)$  sont les évolutions fréquentielles correspondant aux phases  $\varphi_c(t)$  et  $\varphi_h(t)$ . Pour des chirps ‘‘monochromatiques’’ de fréquence  $f_k$  et  $f_n$ , ces termes croisés s'écrivent  $w_{kn} = \exp(j2\pi(f_k - f_n)t) \delta(f - (f_k + f_n)/2)$ . Ce sont donc des fonctions oscillantes, et leur intégrale en fonction du temps est approximativement nulle : on peut raisonnablement supposer que leur contribution à l'intégrale de la statistique est négligeable. On suppose ici que ce résultat reste vrai pour toute la famille des chirps. La statistique se simplifie alors en :

$$\Lambda(x) \propto \int \sum_{k=0}^K w_x(t, f - [f_c(t) + k f_h(t)]) dt.$$

La maximisation du RV revient alors à résoudre un problème de chemin le plus long dans l'espace TF, où le chemin recherché est un ‘‘peigne’’ temps-fréquence paramétré par le couple  $(f_c(t), f_h(t))$ .

## 4 Maximisation de la statistique

Ce problème reste difficile à résoudre analytiquement, notamment en raison de la nature continue des évolutions fréquentielles  $(f_c(t), f_h(t))$  à estimer, et il est nécessaire de se tourner vers des méthodes numériques. Pour cela, on choisit de discrétiser l'espace de recherche : le plan TF est divisé en intervalles de temps  $\Delta_t$  et de fréquence  $\Delta_f$ . On construit alors une approximation linéaire par morceaux de l'évolution fréquentielle  $f_c(t)$  ; cette approximation linéaire par morceaux est appelée ‘‘chaîne de chirplets’’ puisque chaque segment est un petit chirp linéaire. Il a été montré dans [3] que l'ensemble des chaînes de chirplets discrétise de manière fine l'espace des chirps. On passe donc d'un ensemble continu à un ensemble discret et fini. Par ailleurs, il est possible de réduire l'ensemble des chaînes de chirplets possibles en imposant des contraintes réalistes sur les dérivées premières et secondes de  $f_c(t)$ , ces contraintes étant motivées par la physique.

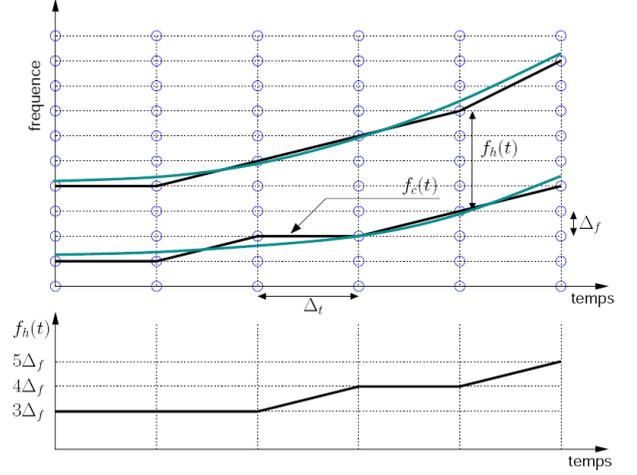


FIG. 2 – Échantillonnage du couple  $(f_c(t), f_h(t))$ .

Le paramètre  $f_h(t)$  représente quant à lui l'écart entre deux harmoniques consécutives. Dans le plan TF, ce paramètre, égal à tout instant à la différence entre deux chirps continus, est aussi représentable par une évolution continue de fréquence. Une analyse identique à celle présentée dans [3] est donc possible afin de montrer qu'une approximation linéaire par morceaux permet de discrétiser de manière fine l'évolution fréquentielle  $f_h(t)$  (voir figure 2).

Il est enfin possible de se fixer des contraintes de régularité ainsi que des bornes réalistes sur les évolutions de fréquence  $f_c(t)$  et  $f_h(t)$  : pour prendre en compte le caractère physique des signaux de BRME,  $f_c(t)$  et  $f_h(t)$  sont supposées croissantes et à dérivées également croissantes. Un couple particulier  $(f_c(t), f_h(t))$  n'admet alors qu'un nombre restreint de voisins possibles (voir figure 3).

On cherche alors à maximiser le RV sur l'ensemble des couples de chaînes de chirplets admissibles  $(f_c(t), f_h(t))$ . Avec la discrétisation proposée, la statistique se réécrit :

$$\Lambda(x) \propto \sum_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{k=0}^K w_x(t, f - [f_c(t) + k f_h(t)]) dt.$$

Bien que l'ensemble de couples de chaînes de chirplets est de taille exponentielle, cette statistique est additive et peut être maximisée en temps polynomial par programmation dynamique [6, 3].

## 5 Résultats

La méthode proposée a été appliquée à la recherche de signaux simulés de BRME. Ces signaux ont été plongés dans un signal typique de LISA fourni par le simulateur LISACode [7]. Le bruit mesuré par LISA n'est pas blanc, et il est nécessaire d'introduire une étape de blanchiment préalable. Nous montrons en figure 4 un exemple d'application de la méthode proposée. Sur cette figure, la BRME simulée est située à 1 Gpc de la Terre. Nous prenons en

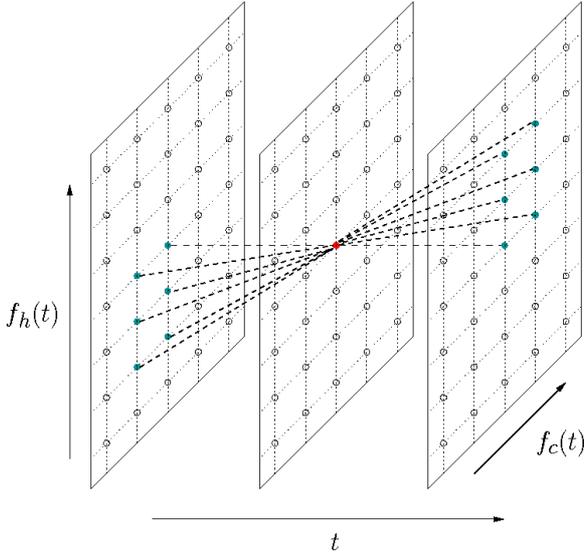


FIG. 3 – Exemple de contrainte de voisinage pour la programmation dynamique.

compte pour la recherche le chirp fondamental et  $K = 4$  harmoniques. Le signal reçu est représenté avec les 5 évolutions fréquentielles extraites. On constate que les principales harmoniques ont bien été retrouvées.

Nous avons également effectué des simulations de Monte Carlo pour tester les performances de détection de la méthode proposée en terme de courbe ROC pour des distances de source données. Pour ces simulations, le signal traité était très court, d'une durée d'environ un mois et demi seulement. Pour mesurer la probabilité de fausse alarme  $P_{FA}$ , nous avons effectué 500 simulations, qui ont permis de déterminer des seuils de détection. La probabilité de détection  $P_D$  pour une distance donnée a été obtenue avec 100 simulations de Monte Carlo. La figure 5 présente les résultats de détection pour des sources situées à 900, 1300 et 1500 Mpc. On voit que bien que le signal traité soit très court, la méthode permet de détecter sans problème des signaux à 900 Mpc, et arrive à détecter des sources situées à 1.3 Gpc. A noter enfin que, d'après nos simulations, une intégration sur 6 mois permet d'obtenir une probabilité de détection  $P_D = 0.9$  avec une probabilité de fausse alarme  $P_{FA} = 0.06$  pour des sources situées à 1.5 Gpc.

## Références

[1] <http://lisa.esa.int>.  
 [2] J. Gair, E. Porter, S. Babak, and L. Barack. A constrained Metropolis-Hastings search for EMRIs in the Mock LISA Data Challenge 1B. *Class. Quantum Grav.*, 25(184030), 2008.

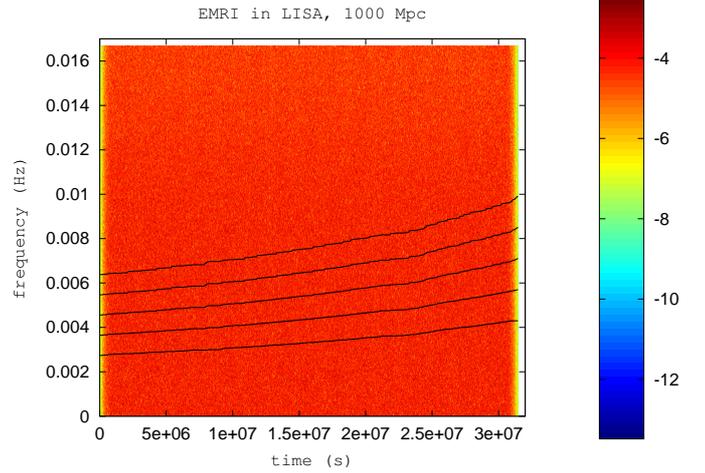


FIG. 4 – Signal mesuré par LISA d'une BRME distante de 1Gpc et harmoniques extraites par la méthode proposée.

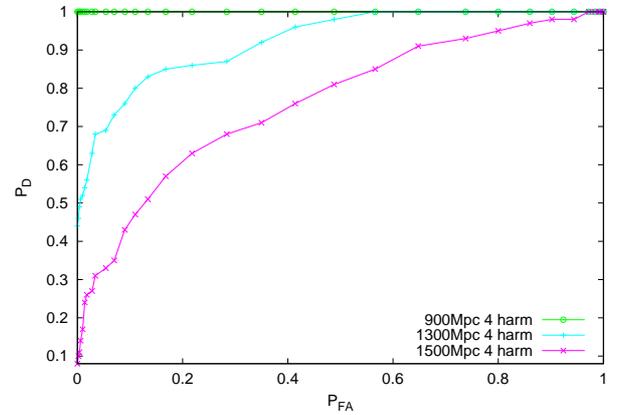


FIG. 5 – Courbes ROC obtenues par la méthode proposée pour des signaux de BRME situés à différentes distances.

[3] E. Chassande-Mottin and A. Pai. Best chirplet chain : near-optimal detection of gravitational wave chirps. *Phys. Rev.*, D73(4) :042003, 2006.  
 [4] J. Gair, I. Mandel, and L. Wen. Improved Time-Frequency Analysis of extreme-mass-ratio inspiral signals in mock LISA data. *Class. Quantum Grav.*, 25(184031), 2008.  
 [5] H.V. Poor. *An Introduction to Signal Detection and Estimation*. Springer-Verlag, 1988.  
 [6] D. P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*, volume 1. Athena Scientific, 2nd edition edition, 2000.  
 [7] A. Petiteau, G. Auger, H. Halloin, O. Jeannin, E. Plagnol, S. Pireaux, T. Regimbau, and J.-Y. Vinet. LISAcode : A scientific simulator of LISA. *Phys. Rev.*, D77 :023002, 2008.