

# Estimation bayésienne de sources de pollution de nappes phréatiques

Boujemaa AIT-EL-FQUIH<sup>1,2</sup>, Jean-François GIOVANNELLI<sup>1</sup>, Alexandre GIRARD<sup>2</sup>, Nicolas PAUL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Équipe Signal et Image / IMS (Université de Bordeaux - CNRS), 351 Cours de la Libération, 33405 Talence

<sup>2</sup>Electricité De France - R&D, 6 quai Watier, 78401 Chatou

Boujemaa.Ait-El-Fquih@u-bordeaux1.fr, Giova@ims-bordeaux.fr, Alexandre.Girard@edf.fr, Nicolas.Paul@edf.fr

**Résumé** – Cet article est dédié à l’estimation paramétrique de sources de pollution ponctuelles de nappes phréatiques. Il s’agit plus précisément d’étendre les travaux réalisés dans [2] [3] à des situations plus réalistes et complexes, à savoir l’introduction de l’inhomogénéité sur le bruit de mesure et la prise en compte de la contrainte de positivité de la quantité de pollution. Pour cela, deux estimateurs basés sur la même loi *a posteriori* ont été proposés : l’espérance *a posteriori* (EAP) et le maximum *a posteriori* (MAP). Pour chaque estimateur, un algorithme de calcul pratique a été développé. Le premier est un algorithme d’échantillonnage stochastique et le second est un algorithme d’optimisation déterministe. L’application de ces algorithmes sur des données issues d’une maquette expérimentale a conduit à des résultats satisfaisants.

**Abstract** – This paper is devoted to the parameteric estimation of pollution point sources in water table. More specifically, we extend the work in [2] [3] to more realistic and complex situations, namely the introduction of the inhomogeneity of the measurement noise and accounting for the positivity of the pollution quantity. For this, two estimators based on the same posterior distribution have been proposed: the posterior mean and the maximum a posteriori. For each estimator, a practical algorithm was developed. The first is a stochastic sampling algorithm and the second is a deterministic optimization algorithm. The application of these algorithms on real data from an experimental platform led to satisfactory results.

## 1 Introduction

La caractérisation de sources de pollution de nappes phréatiques à partir des mesures de concentrations de ce polluant dans le sol, est un problème fortement mal posé en raison du nombre très faible des capteurs au regard de l’étendue des sites, et du caractère passe bas du transport et de l’observation. Pour faire face à ce handicap, une solution naturelle consiste à se placer dans le cadre bayésien en tenant compte des informations sur la source. Dans ce cadre, deux familles de méthodes ont été proposées dans la littérature : méthodes non paramétriques dans lesquelles la source est modélisée par une fonction non paramétrée libre [6]; et méthodes paramétriques qui affectent une fonction paramétrée [5], ce qui permet de réduire sensiblement le nombre d’inconnus. Cet article s’inscrit dans le contexte paramétrique dans lequel la caractérisation de la source revient à identifier<sup>1</sup> les paramètres de localisation spatiale (l’abscisse  $x_0$  et l’ordonnée  $y_0$ ), de localisation temporelle (l’instant d’injection  $t_0$  et l’étendue de la chronique  $\tau_0$ ), et la quantité de pollution rejetée  $q_0$ . En partant de la source, le polluant se propage selon un modèle dit de *transport* [2] supposant que le sol est composé de deux zones superpo-

sées verticalement. Une zone non saturée (ZNS) de faible teneur en eau et une zone saturée (ZS) en eau représentant la nappe phréatique. Dans la ZNS la propagation du polluant s’effectue uniquement dans la direction verticale (axe  $z$ ). Dans la ZS, la diffusion s’effectue dans tout l’espace et l’écoulement de l’eau se fait selon l’axe des  $x$ . On considère  $K$  capteurs, chacun d’eux effectue  $N$  mesures de concentration. On note  $\mathbf{d}_k$  le vecteur des mesures prises par le capteur  $k$  et  $\mathbf{d}$  le vecteur contenant l’ensemble des mesures :  $\mathbf{d} = [\mathbf{d}_1^T, \dots, \mathbf{d}_K^T]^T$ . Ces mesures sont reliées aux paramètres de la source,  $\boldsymbol{\theta} = [q_0, x_0, y_0, t_0, \tau_0]^T$ , par

$$\mathbf{d} = \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\epsilon}; \quad (1)$$

$\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta})$  étant une fonction non linéaire en  $\boldsymbol{\theta}$ . Comme  $\mathbf{d}_k$ , le sous-vecteur  $\mathbf{c}_k$  sera associé au capteur  $k$ .  $\boldsymbol{\epsilon}$  est un bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance  $\mathbf{R}$ , modélisant les imprécisions des mesures prises par les capteurs et les erreurs de construction de  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta})$ . La relation (1) et la loi du bruit donnent la vraisemblance

$$p(\mathbf{d}|\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{R}). \quad (2)$$

Dans [2] [4], une approche bayésienne a été adoptée permettant de tenir en compte des informations a priori sur la source. Cette première étude a conduit à deux estimateurs : l’EAP et le MAP. Pour chacun d’entre eux, un algo-

1. La source est supposée ponctuelle, immobile et à la surface (profondeur  $z_0 = 0$ ).

rithme de calcul pratique a été développé: un algorithme de type Monte Carlo par Chaîne de Markov (MCMC) permettant de calculer l'EAP et un algorithme d'optimisation déterministe permettant de calculer le MAP.

## 2 Contributions

Dans [2] [4], l'a priori  $p(\boldsymbol{\theta})$  est uniforme et la même variance est affectée à tous les capteurs:  $\mathbf{R} = r_\epsilon \mathbf{I}_{KN}$  où  $\mathbf{I}_{KN}$  est la matrice identité de taille  $KN$ . Nous nous plaçons ici dans un cadre plus général.

**Pour les a priori.** Nous exploitons la linéarité de la sortie modèle  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta})$  en la quantité de pollution  $q_0$ :

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}) = q_0 \bar{\mathbf{c}}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \text{ avec } \boldsymbol{\theta} = [q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}^T]^T. \quad (3)$$

Nous modélisons ainsi l'a priori de  $q_0$  par une loi gaussienne de support positif  $\mathcal{N}^+(\mu_q, r_q)$ . L'intérêt de ce choix est multiple. Les spécialistes sur les sites peuvent avoir accès à une information a priori sur la valeur de  $q_0$  qu'il faut exploiter; la positivité de  $q_0$  est vérifiée; l'échantillonnage par un algorithme stochastique, tout comme l'optimisation par un algorithme déterministe, s'effectue sur des espaces de plus petites dimensions, ce qui permet une exploration plus globale de l'espace des paramètres [1]; nous verrons plus loin que dans l'algorithme (itératif) de calcul du MAP, la mise à jour de  $q_0$  est analytique ce qui améliore la performance de l'estimation; le tirage de  $q_0$  est également direct dans l'algorithme du calcul de l'EAP. Par ailleurs, dans le cas particulier où aucune connaissance a priori n'est disponible sur  $q_0$ , ce choix peut se réduire au choix uniforme en affectant une valeur "infinie" à  $r_q$ .

**Pour la vraisemblance.** Nous introduisons de l'inhomogénéité sur le bruit de mesure  $\boldsymbol{\epsilon}$ , en associant à chaque capteur  $k$  une variance  $r_k$ . De ce fait, la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  se généralise à

$$\mathbf{R} = \text{diag}([\mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_K^T]), \text{ avec } \mathbf{v}_k^T = [r_k, \dots, r_k]_{1 \times N}. \quad (4)$$

Ceci peut être justifié par le fait que l'erreur de modélisation peut varier considérablement d'un lieu à l'autre. Comme les paramètres de la source, les variances  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_K]^T$  doivent être estimées.

## 3 Inversion bayésienne

L'estimation de  $q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}$  et  $\mathbf{r}$  à partir de  $\mathbf{d}$  repose sur la loi jointe *a posteriori*:

$$p(q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r} | \mathbf{d}) = \frac{p(q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r}, \mathbf{d}) = p(q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r}) p(\mathbf{d} | q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r})}{\int p(q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r}, \mathbf{d}) dq_0 d\bar{\boldsymbol{\theta}} d\mathbf{r}}. \quad (5)$$

**A priori.** En supposant indépendants a priori  $q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}$  et  $r_1, \dots, r_K$ , on obtient  $p(q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r}) = p(q_0) p(\bar{\boldsymbol{\theta}}) \prod_{k=1}^K p(r_k)$ . Comme dans [2],  $p(\bar{\boldsymbol{\theta}})$  et  $p(r_k)$  sont uniformes sur des supports  $D_{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$  et  $\mathbb{R}^+$  respectivement.

**Vraisemblance.** En utilisant (3), la vraisemblance (2) devient  $p(\mathbf{d} | q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r}) = \mathcal{N}(q_0 \bar{\mathbf{c}}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{R})$ ,  $\mathbf{R}$  est donnée par la relation (4).

**A posteriori.** On montre que (5) s'exprime par

$$p(q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r} | \mathbf{d}) \propto \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{(q_0 - \mu_q)^2}{r_q} + \sum_{k=1}^K \frac{\|\mathbf{d}_k - q_0 \bar{\mathbf{c}}_k(\bar{\boldsymbol{\theta}})\|^2}{r_k} \right) \right] \times \left[ \prod_{k=1}^K (r_k)^{-\frac{N}{2}} \right] \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(q_0) \mathbb{1}_{D_{\bar{\boldsymbol{\theta}}}}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^K}(\mathbf{r}); \quad (6)$$

$\mathbb{1}_D(\cdot)$  représente la fonction indicatrice de  $D$ . La constante de proportionnalité correspond à l'intégrale multiple dans (5). En raison de la structure complexe de  $\bar{\mathbf{c}}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$ , le calcul analytique de cette intégrale est impossible, ce qui rend impossible la connaissance exacte de la loi *a posteriori*. La moyenne de cette loi (EAP) est également inaccessible puisque cela nécessite le calcul, souvent impossible, d'une autre intégrale; le calcul analytique de son maximiseur (MAP) est aussi impossible, car cela nécessite la résolution d'un problème de maximisation de forme complexe (6).

## 4 Calcul approché

Nous développons ici deux algorithmes basés sur la loi *a posteriori*: un algorithme d'échantillonnage stochastique approchant l'EAP, et un algorithme d'optimisation déterministe approchant le MAP. Ces algorithmes utilisent les mêmes lois conditionnelles déduites de (6). Le premier algorithme échantillonne ces lois; le second algorithme les maximise.

### 4.1 Échantillonnage stochastique

Nous proposons un algorithme hybride basé sur l'algorithme de Metropolis-Hastings (M-H) et l'échantillonneur de Gibbs [1]. Le principe consiste à générer une chaîne de Markov stationnaire suffisamment longue selon la loi *a posteriori*  $p(q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r} | \mathbf{d})$ . L'EAP est approché par la moyenne empirique des échantillons générés et la mesure de probabilité d'intérêt (continue) est approchée par leur distribution discrète. Le tirage selon  $p(q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r} | \mathbf{d})$  se fait de manière conditionnelle: à chaque itération, l'un des paramètres  $q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}$  ou  $\mathbf{r}$  est mis à jour conditionnellement aux autres.

**Mise à jour de  $q_0$ .** À chaque itération ( $s$ ),  $q_0^{(s+1)}$  est tiré selon  $p(q_0 | \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}, \mathbf{r}^{(s)}, \mathbf{d})$ . Cette dernière est une gaussienne de support positif  $\mathcal{N}^+(\hat{q}_{0|\mathbf{d}}, r_{q|\mathbf{d}})$  avec

$$r_{q|\mathbf{d}}^{-1} = r_q^{-1} + \sum_{k=1}^K r_k^{(s)-1} \|\bar{\mathbf{c}}_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)})\|^2; \quad (7)$$

$$\hat{q}_{0|\mathbf{d}} = r_{q|\mathbf{d}} \left[ r_q^{-1} \mu_q + \sum_{k=1}^K r_k^{(s)-1} \bar{\mathbf{c}}_k^T(\bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}) \mathbf{d}_k \right]. \quad (8)$$

**Mise à jour de  $\mathbf{r}$ .** Le tirage de  $\mathbf{r}^{(s+1)}$  se fait selon  $p(\mathbf{r}|q_0^{(s+1)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}, \mathbf{d})$  qui s'écrit,

$$p(\mathbf{r}|q_0^{(s+1)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}, \mathbf{d}) = \prod_{k=1}^K p(r_k|q_0^{(s+1)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}, \mathbf{d}_k). \quad (9)$$

(9) signifie que le tirage conjoint du vecteur  $\mathbf{r}^{(s+1)}$  se réduit aux tirages indépendants des scalaires  $r_k^{(s+1)}$  selon

$$p(r_k|q_0^{(s+1)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}, \mathbf{d}_k) \propto p(\mathbf{d}_k|q_0^{(s+1)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}, r_k)p(r_k), \quad (10)$$

avec  $p(\mathbf{d}_k|q_0^{(s+1)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}, r_k) = \mathcal{N}(q_0^{(s+1)}\bar{\mathbf{c}}_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}), r_k\mathbf{I}_N)$  et  $p(r_k)$  uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ . On montre que la loi conditionnelle a posteriori (10) est une loi inverse gamma  $\mathcal{I}_{a,b}(r_k)$  de paramètres calculables exactement :

$$a = \frac{N}{2}, \quad b = \frac{\|\mathbf{d}_k - q_0^{(s+1)}\bar{\mathbf{c}}_k(\bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)})\|^2}{2}.$$

**Mise à jour de  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ .** Le caractère non linéaire de  $\bar{\mathbf{c}}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$  rend impossible le calcul analytique de  $p(\bar{\boldsymbol{\theta}}|q_0^{(s+1)}, \mathbf{r}^{(s+1)}, \mathbf{d})$ . Par ailleurs, bien que cette loi soit connue à une constante de normalisation près, son échantillonnage direct reste impossible. Comme [2], nous utilisons ici une loi de proposition facile à échantillonner selon le principe de l'algorithme M-H à marche aléatoire.

## 4.2 Optimisation déterministe

On s'intéresse ici au calcul du MAP qui revient à minimiser le critère

$$J(q_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{r}) = \frac{(q_0 - \mu_q)^2}{r_q} + \sum_{k=1}^K \left[ N \ln(r_k) + \frac{\|\mathbf{d}_k - q_0\bar{\mathbf{c}}(\bar{\boldsymbol{\theta}})\|^2}{r_k} \right], \quad (11)$$

sous la contrainte que  $q_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $r_k \in \mathbb{R}^+$  et  $\bar{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{D}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$ . De même que l'échantillonnage de (6), la minimisation de (11) est itérative et se fait de manière conditionnelle.

**Mise à jour de  $q_0$ .** À chaque itération ( $s$ ),  $q_0^{(s+1)}$  est obtenu en minimisant (11) sous contrainte de positivité avec  $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(s)}$ . Cette minimisation n'est rien d'autre qu'un problème de moindres carrés pondérés régularisés (MCPR) sous contrainte de positivité. Ce problème se ramène à un problème de MCPR sans contraintes puisque  $\mathbf{d}$  et  $\bar{\mathbf{c}}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$  sont par construction à valeurs positives. La solution  $q_0^{(s+1)}$  est donnée analytiquement par (8).

**Mise à jour de  $\mathbf{r}$ .** La structure du critère (11) montre que la mise à jour du vecteur conjoint  $\mathbf{r}$  se réduit aux mises à jours indépendantes des scalaires  $r_k$ . Par ailleurs, avec  $q_0 = q_0^{(s+1)}$  et  $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}$ , la minimisation de (11) par rapport à  $r_k$  est exacte :

$$r_k^{(s+1)} = \frac{1}{N} \|\mathbf{d}_k - q_0^{(s+1)}\bar{\mathbf{c}}(\bar{\boldsymbol{\theta}}^{(s)})\|^2.$$

**Mise à jour de  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ .** Le caractère non-linéaire de  $\bar{\mathbf{c}}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$  rend impossible la minimisation exacte sous contraintes de (11) lorsque  $q_0 = q_0^{(s+1)}$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(s+1)}$ . De même que [2], nous utilisons ici l'algorithme de minimisation approchée de descente de gradient conjugué (DGC). Plus précisément, cette étape correspond à une itération de l'algorithme DGC.

## 5 Application

Une maquette constituée d'un bac de dimensions 1.6 m  $\times$  1 m  $\times$  1.4 m comprenant une première couche de sable fin de 0.6 m de haut servant de ZNS et une deuxième de sable grossier de 0.8 m de haut servant de ZS. Cinq capteurs sont implantés, trois alignés dans l'axe de l'écoulement et deux perpendiculaires à cet axe (voir Fig. 1). Une quantité  $q_0 = 649.2$  mg a été injectée avec un débit uniforme sur une durée de  $\tau_0 = 24$  h. La chronique recherchée est en conséquence une fonction porte d'étalement  $\tau_0$  centrée autour de  $t_0 = 12$  h (on choisit l'instant d'injection comme origine du temps). Les mesures de concentrations ont été prises toutes les heures pendant cinq jours (voir Fig. 2). Concernant les a priori, on suppose  $p(q_0) = \mathcal{N}^+(10^3, 2 \cdot 10^4)$  et  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  uniforme sur les intervalles<sup>2</sup> :  $x_0 \in [-0.235, 1.365]$ ,  $y_0 \in [-0.5, 0.5]$ ,  $t_0 \in [-30, 22]$  et  $\tau_0 \in [1, 40]$ .

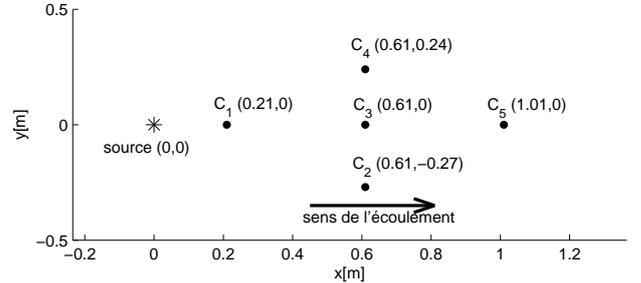


FIG. 1: La maquette vue de dessus.

**Échantillonnage stochastique.** L'algorithme d'échantillonnage (paragraphe 4.1) a généré 15000 échantillons. Le paramètre d'exploration choisi a conduit à un taux d'acceptation de 2%. Les estimations de  $q_0$  et  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  sont indiquées dans Tab. 1 ; les incertitudes sur les estimations (intervalles de confiance à 95%) sont également indiquées. Les valeurs obtenues sont très proches des vrais paramètres de la source et de plus les incertitudes associées sont faibles. Les variances estimées des bruits associés aux capteurs (voir Tab. 2) sont faibles, ce qui indique des faibles résidus de reconstruction des sorties modèle  $\hat{q}_0\bar{\mathbf{c}}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  (voir également Fig. 2). Par ailleurs, les ordres de grandeurs

<sup>2</sup> Les intervalles choisis pour  $x_0$  et  $y_0$  correspondent aux dimensions de la maquette.

des écarts-types (racines carrées des variances estimées) suivent ceux des mesures aux capteurs: les plus faibles mesures, qui sont associées aux capteurs  $C_2$  et  $C_4$  non alignés dans le sens de l'écoulement, correspondent aux plus faibles écarts-types ( $\sqrt{r_2} = 15.36$  et  $\sqrt{r_4} = 48.17$ ) et inversement.

**Optimisation déterministe.** L'algorithme d'optimisation dépend fortement de l'initialisation. En utilisant la même initialisation que celle de l'algorithme stochastique (voir. Tabs. 1 et 2), l'estimée obtenue correspond à un minimiseur local très loin des vrais paramètres (ex.  $\hat{x}_0 = -0.22$  m et  $\hat{q}_0 = 96.6$  mg). D'autres initialisations ont conduit au même constat. L'hypothèse qui est alors faite est qu'il n'est pas possible d'estimer à la fois les paramètres de la source et les variances des bruits associés aux capteurs. L'algorithme a alors été appliqué en fixant les variances aux valeurs de l'EAP: les paramètres de la source ont alors été estimés avec satisfaction, y compris avec une initialisation très loin de la vraie source (voir Tab. 1).

## 6 Conclusion

Nous avons étendu les travaux réalisés dans un contexte bayésien dans [2] à des situations plus réalistes et complexes, à savoir l'introduction de l'inhomogénéité sur le bruit de mesure et la prise en compte de la contrainte de positivité sur la quantité de pollution. Nous nous sommes ensuite intéressés au calcul des estimateurs EAP et MAP. Un algorithme d'échantillonnage stochastique a été introduit pour le calcul de l'EAP et un algorithme d'optimisation déterministe a été développé pour le calcul du MAP. Ces algorithmes ont été ensuite appliqués à des données issues d'une maquette expérimentale. Les paramètres de la source ont été retrouvés; l'algorithme stochastique a estimé également les variances des bruits associés aux capteurs tandis que l'algorithme déterministe les a supposé connues, en utilisant les valeurs obtenues par l'algorithme stochastique.

	$q_0$ [mg]	$x_0$ [m]	$y_0$ [m]	$t_0$ [h]	$\tau_0$ [h]
Vrais	649.2	0	0	12	24
Init.	1	-0.2	-0.15	2	2
EAP	655	0.02	0.01	12.34	23.74
Incert.	$\pm 6.19$	$\pm 6 \cdot 10^{-3}$	$\pm 2 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0.09$	$\pm 0.27$
Init.	1	-0.2	-0.15	2	22
MAP	623	-0.03	0.02	10.96	22

TAB. 1: Estimations EAP et MAP des paramètres de la source. Dans le MAP les variances  $r_k$  sont fixes, égales à l'EAP obtenu dans Tab. 2.

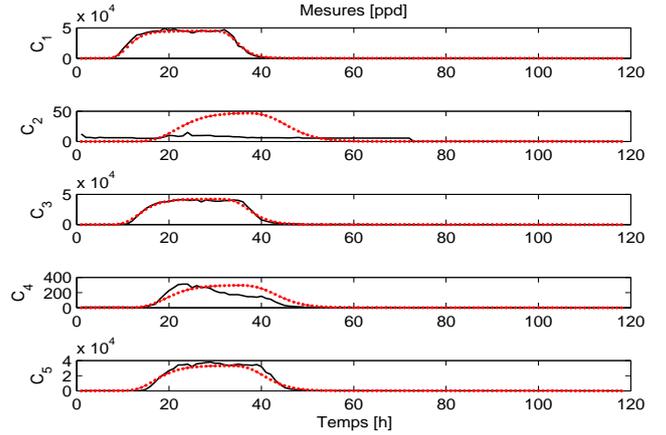


FIG. 2: Mesures des concentrations en ppb =  $\text{mg}/\text{m}^3$  (— : mesures expérimentales; \*— : mesures reconstruites).

Variance	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$
Init.	$10^2$	$10^2$	$10^2$	$10^2$	$10^2$
EAP	$1.65 \cdot 10^6$	236	$1.85 \cdot 10^6$	$2.32 \cdot 10^3$	$5.87 \cdot 10^6$
Incert.	$4.4 \cdot 10^5$	70	$6.9 \cdot 10^5$	734	$1.64 \cdot 10^6$

TAB. 2: Estimation EAP des variances des bruits associés aux capteurs.

## Références

- [1] W.K. Hastings. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57:97–109, 1970.
- [2] A. Hazart. *Estimation paramétrique de sources de pollution à partir de mesures dans la nappe phréatique*. PhD thesis, Université Paris sud 11, juillet 2007.
- [3] A. Hazart, J.-F. Giovannelli, S. Dubost, and L. Chatterliet. Inverse transport for point-like source with a Bayesian parametric method coupled with MCMC algorithm. *Signal Processing (under revision)*.
- [4] A. Hazart, J.-F. Giovannelli, S. Dubost, and L. Chatterliet. Contaminant source estimation in a two-layers porous environment using a Bayesian approach. In *Proceedings of the IEEE IGARSS*, pages 23–27, july 2007.
- [5] J. Matthes, L. Gröll, and H.B. Keller. Source localization based on pointwise concentration measurements. *Sensors and Actuator A (Physical)*, 115:32–37, 2004.
- [6] T.H. Skaggs, Z.J. Kabala, and W.A. Jury. Deconvolution of nonparametric transfer function for solute transport in soils. *Journal of Hydrology*, 207:170–78, 1998.