

# Approximation polynomiale pour l'estimation conjointe du canal et le décalage en fréquence pour l'OFDMA en liaison montante

Babar AZIZ, Inbar FIJALKOW, Myriam ARIAUDO

ETIS, ENSEA, Université de Cergy-Pontoise, CNRS,  
F 95000 Cergy-Pontoise Cedex, France

{babar.aziz,inbar.fijalkow,myriam.ariaudo}@ensea.fr

**Résumé** – Nous proposons un estimateur conjoint des réponses impulsionnelles du canal (CIR) et des décalages en fréquence porteuse (CFO) pour le système Orthogonal Frequency Division Multiple Access (OFDMA) en liaison montante. On considère que les CFOs, résultant de l'inadéquation fréquentielle entre l'oscillateur du terminal de l'utilisateur et l'oscillateur de la station de base, apparaissent à la sortie du terminal de l'utilisateur plutôt qu'à la station de base. Basé sur cette approche réaliste, un nouveau modèle de signal reçu est présenté qui prend également en compte le préfixe cyclique. Pour l'estimation du CFO, l'approximation polynomiale est utilisée pour donner des estimateurs moins complexes. Nous montrons que la méthode proposée d'estimation conjointe s'avère être encore plus simple que les méthodes existantes, sans dégrader les performances.

**Abstract** – This paper addresses the problem of joint estimation of the channel impulse responses (CIR) and carrier frequency offsets (CFO) in an uplink Orthogonal Frequency Division Multiple Access (OFDMA) system. We propose a joint CIR and CFO estimator which is based on a realistic model for an uplink OFDMA system in which the CFOs resulting from the frequency mismatch of the users' oscillators with the base station oscillator appear at the output of the users' terminal rather at the base station. Based on this realistic approach a new received signal model is presented and this model also takes into account the cyclic prefix. For CFO estimation, polynomial approximation method derived from the grid search algorithm is used which results in less complex estimators. We show that our proposed joint estimation method proves to be further simpler than the existing methods but yet as performant. Numerical results validate our method.

## 1 Introduction

Les nouveaux systèmes de communication mobiles tels que le Wifi, WiMAX et LTE (Long Term Evolution) doivent garantir des débits élevés tant en liaison montante qu'en liaison descendante afin de satisfaire les besoins des nouvelles applications multimédia. Pour ces systèmes, l'OFDMA est devenu le système de transmission privilégié pour la liaison descendante, car il est très robuste dans les canaux sélectifs en fréquence et permet une bonne flexibilité du système [1]. Toutefois, des questions demeurent ouvertes à propos de son utilisation en liaison montante. Un problème bien connu de l'OFDMA en liaison montante est sa sensibilité aux décalages de fréquence porteuse (CFO). Cet article se concentre sur l'erreur de synchronisation en fréquence porteuse en supposant une synchronisation parfaite en temps. Le CFO peut résulter de l'inadéquation fréquentielle entre l'oscillateur du terminal de l'utilisateur et l'oscillateur de station de base. Ce phénomène est d'autant plus important que les terminaux sont bon marché. Les différents CFOs ne peuvent pas être annulés à la sta-

tion de base, ce qui entraîne de fortes interférences, voir [2], et dégrade les performances du système. L'estimation de canal pour les systèmes OFDM est largement traitée dans la littérature, par exemple [3]-[8]. Toutefois, la transmission en liaison montante OFDMA représente une tâche plus difficile. Contrairement à la transmission descendante OFDMA, le signal reçu à la station de base en liaison montante est une sommation des signaux provenant de différents utilisateurs. Etant donné que les signaux des utilisateurs proviennent de différents terminaux, leurs erreurs de synchronisations sont différentes et indépendantes. Par conséquent, lorsque l'OFDMA en liaison montante est considérée, une estimation conjointe efficace des réponses impulsionnelles du canal et des CFOs est nécessaire en présence de décalage en fréquence. Certains auteurs ont abordé cette question pour l'OFDMA en liaison montante, par exemple [4, 5]. Cependant, les algorithmes présentés considèrent seulement l'estimation du CFO sans prendre en compte l'estimation du canal. Certaines études de l'estimation conjointe des CFOs et du canal ont été présentées dans [6]-[8]. Dans [6], l'estimation conjointe des CFOs et du canal est faite en utilisant l'approche du maximum de vraisemblance, mais elle s'avère très com-

<sup>1</sup>Ce travail est soutenu par l'Ile-de-France Région DIM "Logiciels et Systèmes Complexe" projet DESAP .

plexe. Dans [7, 8], les auteurs ont présenté un estimateur basé sur une approximation polynomial des CFOs afin de réduire la complexité à laquelle se confrontent les algorithmes de recherche sur grille.

Cependant tous les auteurs cités précédemment considèrent que le CFO s'applique à la sortie du canal. Contrairement à eux, nous considérons un modèle de signal où le CFO apparaît sur le signal transmis, c'est à dire avant la convolution du canal. Basé sur ce nouveau modèle de transmission, nous proposons un algorithme qui simplifie encore l'estimation du CFO par rapport aux approches antérieures fournies dans [8].

Dans la section 2, le modèle du système considéré est présenté ainsi que le modèle analytique du signal reçu. Dans la section 3, l'algorithme d'estimation conjointe proposé est présenté, suivie par les résultats numériques dans la section 4.

## 2 Modèle OFDMA en liaison montante

Dans cette section, nous présentons le système de OFDMA en liaison montante avec décalage de la fréquence porteuse. La largeur de bande disponible est  $B$  divisée en  $N_p$  sous porteuses.  $N_u$  est le nombre d'utilisateurs dans le système. Le modèle de canal radio est supposé être sélectif en fréquence. Les derniers  $L_{cp}$  symboles de modulation dans le symbole OFDM sont répétés après la DFT inverse pour former le préfixe cyclique. Le signal à la sortie de l'émetteur de l'utilisateur  $u$  est donné par

$$x^{(u)}(t) = \mathbb{R}\{e^{j2\pi(f_c + \delta f_c^{(u)})t} \sum_{k=0}^{N_p-1} a_k^{(u)} p^{(u)}(t - \frac{kT}{N_p})\} \quad (1)$$

où  $f_c$  est la fréquence porteuse,  $p^{(u)}(t)$  est la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas à l'émetteur et  $T$  est la période symbole d'un symbole OFDMA.  $a_k^{(u)}$  sont les symboles à la sortie IDFT.  $\delta f_c^{(u)}$  représente le CFO de l'utilisateur  $u$  par rapport à  $f_c$ . Le CFO est appliqué au signal transmis parce que nous considérons le cas où l'utilisateur  $u$  n'est pas parfaitement synchronisé à la fréquence porteuse de la station de base à cause des défauts des composants. Les signaux des différents utilisateurs  $x^{(u)}(t)$  passent par les canaux convolutif individuels. Le signal reçu à la station de base est la somme des signaux provenant de tous les utilisateurs. Le signal en bande de base reçu à temps discret  $r_i$  à la station de base est donné par

$$r_i = \sum_{u=1}^{N_u} \left\{ x_i^{(u)} e^{\frac{j2\pi}{N_p}(L_h+i-1)\delta f^{(u)}} \right\} * h_i^{(u)} + n_i \quad (2)$$

où  $*$  représente la convolution.

$$r_i = \sum_{u=1}^{N_u} \sum_{l=0}^{L_h-1} x_{i-l}^{(u)} e^{\frac{j2\pi}{N_p}(L_h+i-l-1)\delta f^{(u)}} h_l^{(u)} + n_i \quad (3)$$

où  $x_i^{(u)}$  est le  $i^{\text{ème}}$  échantillon du signal transmis et  $h_l^{(u)}$  désigne le  $l^{\text{ème}}$  échantillon de la réponse impulsionnelle du canal pour l'utilisateur  $u$  (comprenant les filtres émetteur et récepteur),  $n_i$  est le bruit blanc additif gaussien.  $L_h$  est la longueur du canal qui est supposée être inférieure à la longueur du préfixe cyclique i.e.  $L_h < L_{cp}$ .  $\delta f^{(u)}$  est le CFO normalisé de l'utilisateur  $u$  donné par

$$\delta f^{(u)} = \delta f_c^{(u)} T \quad (4)$$

En recueillant les  $N_p$  échantillons et en enlevant le préfixe cyclique comme en [2], on obtient la nouvelle expression:

$$\underline{r} = \sum_{u=1}^{N_u} (\underline{\delta}^{(u)} \odot \tilde{\underline{X}}^{(u)}) \underline{h}^{(u)} + \underline{n} \quad (5)$$

où  $\underline{r}$  est le vecteur du signal reçu de taille  $N_p \times 1$  et  $\underline{n}$  est le vecteur de bruit de taille  $N_p \times 1$ . La matrice  $\tilde{\underline{X}}^{(u)}$  de taille  $N_p \times L_{cp}$  contient les échantillons du signal transmis avec le préfixe cyclique de longueur  $L_{cp}$ . La matrice  $\underline{\delta}^{(u)}$  de taille  $N_p \times L_{cp}$  est la matrice de décalage de l'utilisateur  $u$  contenant ses coefficients de décalage.  $\odot$  représente le produit de Hadamard qui apparaît parce que les données d'entrée sont multipliées par le CFO à l'émetteur de l'utilisateur  $u$  qui n'est pas synchronisé. Le produit  $(\underline{\delta}^{(u)} \odot \tilde{\underline{X}}^{(u)})$  en (5), est indiqué ci-dessous sous la forme de matrice, où l'exposant  $u$  est retiré pour plus de simplicité,

$$= \begin{bmatrix} \delta^{L_{cp}-1} & \dots & \delta^2 & \delta^1 & \delta^0 \\ \delta^{L_{cp}} & \dots & \delta^2 & \delta^1 & \\ \vdots & \ddots & & & \\ \delta^{N_p+L_{cp}-2} & \dots & \delta^{N_p-1} & & \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & \dots & x_{L_{cp}-1} \\ x_1 & x_0 & x_{-1} & \dots & x_{L_{cp}-2} \\ & x_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_{N_p-1} & \dots & x_{N_p-L_{cp}} & & \end{bmatrix}$$

$\delta k^{(u)} = e^{j2\pi k \delta f^{(u)}/N_p}$ , avec  $k = 0, \dots, N_p + L_{cp} - 2$ , sont les coefficients de décalage de l'utilisateur  $u$ . On peut écrire (5) comme

$$\underline{r} = \check{\underline{X}} \underline{h} + \underline{n} \quad (6)$$

où  $\check{\underline{X}} = [(\underline{\delta}^{(1)} \odot \tilde{\underline{X}}^{(1)}), \dots, (\underline{\delta}^{(u)} \odot \tilde{\underline{X}}^{(u)})]$  et  $\underline{h} = [\underline{h}^{(1)}, \dots, \underline{h}^{(u)}]^T$ .

## 3 Algorithme d'estimation proposé

Étant donné le modèle de (5), nous considérons l'estimation du maximum de vraisemblance conjointe du canal et du CFO. En supposant que le bruit  $\underline{n}$  n'est pas corrélé et gaussien complexe de moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2$ , et les différentes données utilisateurs sont indépendantes les unes des autres, l'estimation du maximum de vraisemblance du canal à l'égard du CFO est donnée par

$$\hat{\underline{h}} = [\check{\underline{X}}^H \check{\underline{X}}]^{-1} \check{\underline{X}}^H \underline{r} \quad (7)$$

L'estimation du CFO,  $\delta \hat{f}$ , est obtenue en insérant  $\hat{\underline{h}}$  dans la fonction log-vraisemblance, comme suit

$$\delta \hat{f} = \arg \max_{\delta f} [J_{ML}(\delta f)] \quad (8)$$

où la fonction de coût est donnée par

$$J_{ML}(\delta f) = \underline{r}^H \check{\underline{X}} [\check{\underline{X}}^H \check{\underline{X}}]^{-1} \check{\underline{X}}^H \underline{r} \quad (9)$$

La fonction de coût en (9) est très complexe à maximiser en raison de la présence de l'inversion de la matrice. En choisissant des séquences orthogonales comme CHU-Codes [9] et en suivant l'approche de [8], pour l'utilisateur  $u$ , la fonction de coût en (9) se simplifie en

$$J_{ML}(\delta f) \approx \underline{r}^H (\underline{\delta}^{(u)} \odot \tilde{\underline{X}}^{(u)}) (\underline{\delta}^{(u)} \odot \tilde{\underline{X}}^{(u)})^H \underline{r} \quad (10)$$

où  $\odot$  représente le produit de Hadamard. Nous avons réécrit l'équation ci-dessus en

$$J(\delta f^{(u)}) = \underline{r}^H (\underline{X}^{(u)} \odot \underline{\delta}_{her}^{(u)}) \underline{r} \quad (11)$$

avec

$$\underline{X}^{(u)} = \tilde{\underline{X}}^{(u)} \tilde{\underline{X}}^{(u)H}$$

et  $\underline{\delta}_{her}^{(u)}$  est une matrice hermitienne donnée par

$$\underline{\delta}_{her}^{(u)} = \begin{bmatrix} \delta^{0(u)} & \delta^{-1(u)} & \delta^{-2(u)} & \dots & \delta^{-N_p+1(u)} \\ \delta^{1(u)} & \delta^{0(u)} & \delta^{-1(u)} & \dots & \delta^{-N_p+2(u)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \delta^{N_p-1(u)} & \dots & \delta^{1(u)} & \delta^{0(u)} & \end{bmatrix}$$

En raison de la grande complexité de la recherche sur grille, nous utilisons des approximations polynomiales [7, 8]. Nous proposons d'appliquer l'approximation polynomiale à  $\underline{\delta}_{her}^{(u)}$  plutôt qu'à  $\underline{\delta}^{(u)}$ . Nous avons constaté que l'estimateur résultant est plus simple. Ainsi,

$$\underline{\delta}_{her}^{(u)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m (\underline{\delta}_{her}^{(u)})}{\partial \delta f^{(u)m}} \frac{(\delta f^{(u)} - \delta f_o^{(u)})^m}{m!} \quad (12)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \underline{D}^m \frac{(\delta f^{(u)} - \delta f_o^{(u)})^m}{m!} \quad (13)$$

où  $\delta f_o^{(u)}$  est l'estimation initiale du CFO et où la matrice  $\underline{D}^m$  est donnée par

$$\underline{D}^m = \left( \frac{j2\pi}{N_p} \right)^m \begin{bmatrix} (0)^m & (-1)^m & (-2)^m & \dots & (-N_p+1)^m \\ (1)^m & (0)^m & (-1)^m & \dots & (-N_p+2)^m \\ (2)^m & (1)^m & (0)^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (N_p-2)^m & (N_p-3)^m & \dots & \dots & (0)^m \\ (N_p-1)^m & (N_p-2)^m & \dots & \dots & (0)^m \end{bmatrix} \odot \underline{\delta}_{her} |_{\delta f = \delta f_o}$$

L'équation (11) devient

$$J(\delta f^{(u)}) = \underline{r}^H (\underline{X}^{(u)} \odot \sum_{m=0}^{\infty} \underline{D}^m \frac{(\delta f^{(u)} - \delta f_o^{(u)})^m}{m!}) \underline{r} \quad (14)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (\delta f^{(u)} - \delta f_o^{(u)})^m \mathbb{R} \left\{ \underline{r}^H (\underline{X}^{(u)} \odot \underline{D}^m) \underline{r} \right\} \quad (15)$$

Pour un polynôme de degré  $M$ ,

$$J(\delta f^{(u)}) \approx \sum_{m=0}^M \frac{(\delta f^{(u)} - \delta f_o^{(u)})^m}{m!} \mathbb{R} \left\{ \underline{r}^H (\underline{X}^{(u)} \odot \underline{D}^m) \underline{r} \right\} \quad (16)$$

Pour trouver l'estimation de la fréquence, la première dérivée de (16) est mise à zéro

$$\frac{\partial J(\delta f^{(u)})}{\partial \delta f^{(u)}} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(\delta f^{(u)} - \delta f_o^{(u)})^m}{m!} d_{m+1}^{(u)} = 0 \quad (17)$$

où

$$d_{m+1}^{(u)} = \mathbb{R} \left\{ \underline{r}^H (\underline{X}^{(u)} \odot \underline{D}^{m+1}) \underline{r} \right\} \quad (18)$$

Si  $\alpha$  est la racine réelle de (17), qui est plus proche de  $\delta f_o^{(u)}$  avec  $\frac{\partial^2 J(\delta f^{(u)})}{(\partial \delta f^{(u)})^2} |_{\delta f^{(u)}=\alpha} < 0$ , alors l'estimation du CFO de l'utilisateur  $u$  sera  $\delta f^{(u)} = \delta f_o^{(u)} + \alpha$ . L'équation (18) montre que les coefficients de la dérivée première de la fonction de coût  $J_M(\delta f^{(u)})$  sont beaucoup plus simples, par rapport à ceux obtenus en utilisant la méthode proposée dans [8], en conséquence les estimations obtenues du CFO sont aussi simplifiées. Par exemple, pour un polynôme de degré  $M = 2$ , l'estimation du CFO est donnée par

$$\delta \hat{f}^{(u)} = \delta f_o^{(u)} + \frac{-\mathbb{R} \left\{ \underline{r}^H (\underline{X}^{(u)} \odot \underline{D}^1) \underline{r} \right\}}{\mathbb{R} \left\{ \underline{r}^H (\underline{X}^{(u)} \odot \underline{D}^2) \underline{r} \right\}} \quad (19)$$

## 4 Résultats numériques

Cette section présente les simulations qui sont effectuées pour valider notre méthode d'estimation. Notez que  $N_u = 2$ ,  $N_p = 128$  et  $L_h = L_{cp} = N_p/8$ . Le canal est mis en œuvre avec des réponses impulsionnelles aléatoires avec des coefficients de Rayleigh et la longueur du canal est égale à la longueur du préfixe cyclique  $L_h = L_{cp}$ . Les séquences orthogonales sont générées en utilisant [9]. Dans la Figure 1, nous avons tracé la moyenne et la variance du  $\delta \hat{f}^{(1)}$ . Nous pouvons voir que la valeur estimée se rapproche de la valeur vraie  $\delta f^{(1)}$  quand le SNR augmente. Ainsi, pour les petites valeurs du CFO normalisé, i.e. inférieures à 0,1,  $M=2$  ou 3 sont suffisants pour fournir une bonne solution. Mais  $M = 2$  ne sera pas suffisant pour des grandes valeurs du CFO. Cette affirmation est vérifiée grâce à la Figure 2 où nous avons tracé l'erreur quadratique moyenne pour le CFO en fonction de la valeur maximale

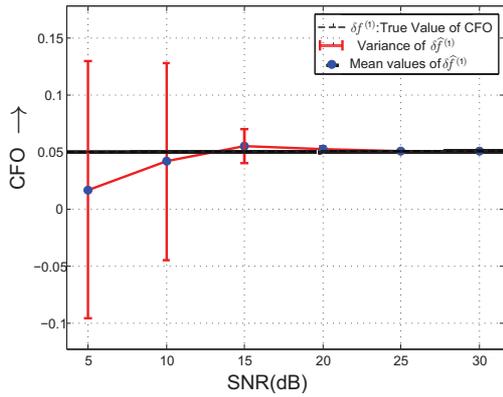


FIG. 1: Moyenne et la variance du  $\delta\hat{f}^{(1)}$ , vs SNR. Le valeur vrai est  $\delta f^{(1)} = 0.05$  pour l'utilisateur 1, avec  $M = 2, N_p = 128, L_{cp} = 16$  et  $N_u = 2$ .

du CFO. Les valeurs des CFO pour les deux utilisateurs sont simulés comme des variables aléatoires indépendantes avec une distribution uniforme. On suppose que pour les deux utilisateurs  $\delta f_o^{(u)}$  est 0. Nous pouvons voir que pour

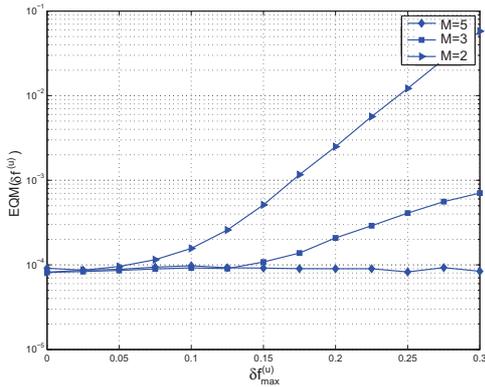


FIG. 2: L'erreur quadratique moyenne (EQM) de  $\delta\hat{f}^{(u)}$  vs  $\delta f_{max}^{(u)}$  avec  $N_p=128, L_{cp}=16, N_u=2$  et  $\text{SNR}(\text{dB})=15$  pour  $M=2,3$  et 5.

$M = 2$ , l'erreur quadratique moyenne (EQM) est de l'ordre de  $10^{-4}$  pour les CFOs très faible. Mais dès que le CFO augmente de plus de 0,05 l'EQM pour  $M = 2$  augmente rapidement. De la même façon pour  $M = 3$ , la performance de l'estimateur est très bonne pour les valeurs du CFO inférieur à 0,15. Mais la performance se dégrade avec l'augmentation du CFO. Les meilleurs résultats sont vus dans le cas de  $M = 5$ . Donc, les résultats de la Figure 2 montre que le degré du polynôme détermine la qualité de l'estimation du CFO obtenue. Dans la Figure 3, nous avons tracé l'EQM pour le CFO et CIR pour un utilisateur  $u$  avec  $M = 5$  et pour une valeur maximum du CFO plus élevée c'est à dire  $\delta f_{max} \leq 0,5$ . Il est supposé que pour les deux utilisateurs aucune connaissance initiale du CFO n'est pas disponible,  $\delta f_o^{(u)}$  est 0. Les estimations du canal sont obtenues en utilisant les du estimations CFO en (7).

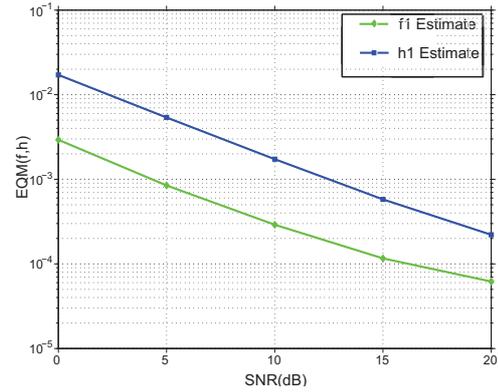


FIG. 3: L'erreur quadratique moyenne (EQM) de  $\hat{h}_i^{(u)}$  et  $\delta\hat{f}^{(u)}$  vs SNR (dB) avec  $M=5, N_p=128, L_{cp}=16, N_u=2$  et  $\delta f_{max} \leq 0,5$ .

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons dérivé un nouveau modèle de signal reçu en tenant compte du CFO au terminal de l'utilisateur avant le canal à trajets multiples. Nous avons proposé une méthode pour l'estimation conjointe de la réponse impulsionnelle du canal et des décalages en fréquence porteuse pour un système de liaison montante OFDMA en utilisant l'approximation polynomiale. Nous montrons que notre méthode d'estimation conjointe est encore plus simple que les méthodes existantes. Les estimations du CFO sont ensuite utilisées pour estimer le canal en utilisant l'approche du maximum de vraisemblance.

## References

- [1] A. F. Molisch, Wideband Wireless Digital Communication, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.
- [2] B. Aziz, I. Fijalkow, and M. Ariaudo, "Intercarrier interference in uplink ofdma systems with carrier frequency offset," in IEEE PIMRC, Istanbul, Turkey, September 2010.
- [3] Jan jaap Van De Beek, Ove Edfors, Magnus S, Sarah Kate Wilson, and Per Ola Brjesson, "On channel estimation in ofdm systems," in Proc. of the IEEE Vehicular Technology Conference, VTC 95, 1995, pp.815-819.
- [4] Morelli, M. "Timing and frequency synchronization for the uplink of an OFDMA system", IEEE Transactions on Communications, 2004, Feb., 52, no.2, pp.296-306
- [5] J.-J. van de Beek. and Borjesson, P.O. and Boucheret, M.-L. and Landstrom, D. and Arenas, J.M. and Odling, P. and Ostberg, C. and Wahlqvist, M. and Wilson, S.K., "A time and frequency synchronization scheme for multiuser OFDM", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1999, nov., vol.17, no.11, pp. 1900 -1914
- [6] Pun, M.-O. and Morelli, M. and Kuo, C.-C.J., "Maximum-likelihood synchronization and channel estimation for OFDMA uplink transmissions", IEEE Transactions on Communications, 2006, Apr., vol.54, no. 4, pp. 726-736
- [7] A. Abdel-Samad, "Fine frequency offset estimation for frequency selective channels," in Proc. IEEE 63rd VTC 2006-Spring Vehicular Technology Conference, vol. 4, May 2006, pp. 1879-1883.
- [8] Haring, L. and Bieder, S. and Czyliwik, A. and Kaiser, T. "Estimation algorithms of multiple channels and carrier frequency offsets in application to multiuser OFDM systems", IEEE Transactions on Wireless Communications, 2010, Mar., vol.9, no.3, pp.865 -870,
- [9] Chu, D., "Polyphase codes with good periodic correlation properties (Corresp.)", IEEE Transactions on Information Theory, 1972, Jul., vol.18, no.4, pp.531 - 532