

# Science géométrique de l'Information : Géométrie des matrices de covariance, espace métrique de Fréchet et domaines bornés homogènes de Siegel

FREDERIC BARBARESCO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Thales Air Systems, Direction Technique, Dép. des Développements Avancés

Voie Pierre-Gilles de Gennes, 91470 Limours, France

[frederic.barbaresco@thalesgroup.com](mailto:frederic.barbaresco@thalesgroup.com)

Résumé – Nous étudions la géométrie des matrices de covariance dans le cadre de la géométrie de l'information, qui nous permet d'introduire la notion de barycentre dans l'espace métrique de Fréchet associé. Le cas des matrices Toeplitz de signaux stationnaires est solutionné dans le disque de Poincaré, et celui des matrices Toeplitz-Bloc-Toeplitz dans les domaines classiques bornés homogènes de Siegel.

Abstract – Geometry of covariance matrices is studied in the framework of information geometry, where barycenter is defined in Frechet's metric space. Case of Toeplitz matrix of stationary signal is solved in Poincare's disk and Toeplitz-Bloc-Toeplitz one in classical homogeneous bounded Siegel domains.

## 1 Introduction

Nous traitons le calcul de la médiane pour des matrices de covariance temporelles Toeplitz ou spatio-temporelles Toeplitz-Bloc-Toeplitz. Le problème est résolu dans le cadre de la géométrie de l'information en ramenant le problème à un calcul de barycentre de Karcher [10] dans un espace métrique de Fréchet [6] en utilisant les propriétés associées dans ce cas à la géométrie des espaces bornés homogènes de Siegel [7,15,16] lorsqu'on modélise le signal comme un modèle complexe circulaire de moyenne nulle.

La géométrie Hessienne [11,12] de l'Information de Rao et Chentsov fixe le cadre de l'approche, via une métrique Kählérienne dont le potentiel est donné par l'Entropie du processus. Pour conserver la structure Toeplitz, nous montrons que la bonne paramétrisation est donnée par la décomposition d'Iwasawa partielle [8], qui est équivalente à une modélisation autorégressive complexe dans le cas Toeplitz et autorégressive multivoie dans le cas Toeplitz-Bloc-Toeplitz [9,18]. Dans cette géométrie, on calcule un flot intrinsèque qui converge vers la médiane de ces modèles [1,19].

Nous proposons un algorithme qui calcule le modèle autoregressif complexe médian dans le disque de Poincaré par un flot de Karcher-Weiszfeld modifié agissant sur les coefficients de réflexion [19] où le point soumis au flot reste à l'origine et les points dont on cherche le médian sont soumis à un flot conforme qui utilise les automorphismes du disque de Poincaré. Nous généralisons ce principe pour le modèle autorégressif multivoie [9,13,14,18] en généralisant le flot précédent agissant sur le coefficient de réflexion multivoie dans le disque unité de Siegel [16]. La généralisation est possible en utilisant la fibration de Berger ou décomposition de Mostow dans le disque de Siegel.

Nous replaçons le problème posé dans un cadre plus large en exposant la théorie des espaces homogènes bornés [2,3,4,7,15,16,17], dont les formes canoniques [11,12] sont données pour le disque de Poincaré et ses extensions aux domaines de Siegel.

Nous faisons enfin le lien avec les travaux de L.K. Hua [7] sur les fonctions noyaux et F.A. Berezin [2] sur la quantification dans les domaines de Siegel.

## 2 Géométrie des matrices de covariance temporelle ou spatiale

Dans le cadre de la géométrie de l'information de Rao/Chentsov, il est possible via la matrice de Fisher d'introduire une géométrie dans l'espace des paramètres des lois  $p(\cdot/\theta)$ :  $ds^2 = K[p(\cdot/\theta), p(\cdot/\theta + d\theta)] = d\theta^+ I(\theta) d\theta$  avec  $I(\theta) = [g_{ij}(\theta)]$  la matrice de Fisher. En modélisant, le signal par une loi complexe circulaire multi-variée gaussienne de moyenne nulle, la métrique se réduit à :

$$ds^2 = Tr\left[\left(R_n^{-1} dR_n\right)^2\right] = \left\|R_n^{-1/2} dR_n R_n^{-1/2}\right\|_F^2 \quad (1)$$

Dont la distance est donnée par (cas particulier de [16]):

$$dist^2(R_1, R_2) = \left\|\log\left(R_1^{-1/2} \cdot R_2 \cdot R_1^{-1/2}\right)\right\|_F^2 = \sum_{k=1}^n \log^2(\lambda_k) \quad (2)$$

avec  $\det(R_1^{-1/2} R_2 R_1^{-1/2} - \lambda_k I) \det(R_2 - \lambda_k R_1) = 0$

Il s'agit d'un espace métrique de Fréchet [6] symétrique [3,4] complet à courbure négative dont la géodésique entre 2 matrices  $R_1$  et  $R_2$  est donnée par la formule :

$$\gamma(t) = R_1^{1/2} e^{t \cdot \log(R_1^{-1/2} R_2 R_1^{-1/2})} R_1^{1/2} = R_1^{1/2} \left(R_1^{-1/2} R_2 R_1^{-1/2}\right)^t R_1^{1/2} \quad \text{avec } 0 \leq t \leq 1$$

On peut noter que la projection géodésique sur une sous-variété  $M$  définie par  $\Pi_M(P) = \arg \min_{S \in M} dist(P, S)$  est

$$\text{contractante : } dist(\Pi_M(P), \Pi_M(Q)) \leq dist(P, Q) \quad (3)$$

De même, si  $R$  et  $Q$  sont 2 points de la sous-variété  $M$ , on peut définir la distance de  $P$  à la géodésique  $[Q, R]$  par:

$$\sigma_s(t) = \sigma(s, t) = P^{1/2} \left[ P^{-1/2} Q^{1/2} \left( Q^{-1/2} R Q^{-1/2} \right)^s Q^{1/2} P^{-1/2} \right]^t P^{1/2} \quad (4)$$

## 3 Statistique robuste et médiane : centre de masse de Cartan et barycentre de Fréchet

Par analogie avec le barycentre dans  $R^n$ ,

$x_{center} = \arg \min_x \sum_{i=1}^M d^2(x, x_i)$ , E. Cartan [3] a montré existence

& unicité du minimum sur une variété à courbure négative de la fonctionnelle  $f : m \in M \mapsto \frac{1}{2} \int_A d^2(m, a) da$

dont le gradient est donnée par  $\nabla f = -\int_A \exp_m^{-1}(a) da$ . La solution est donnée par Karcher [10] via le flot suivant :  $m_{n+1} = \gamma_n(t_n) = \exp_{m_n}(-t_n \nabla f(m_n))$  avec  $\dot{\gamma}_n(0) = -\nabla f(m_n)$  (5)

Le calcul du médian dans  $R^n$   $x_{median} = \arg \text{Min}_x \sum_{i=1}^M d(x, x_i)$ , se réduit lui sur une variété à la minimisation de  $h : m \in M \mapsto \frac{1}{2} \int_A d(m, a) da$ , de gradient associé  $\nabla h = -\int_A \frac{\exp_m^{-1}(a)}{\|\exp_m^{-1}(a)\|} da$ . Dans le cas discret, nous proposons

d'étudier le flot de sous-gradient suivant dont la convergence a été prouvée par Yang Le dans [19] :

$$m_{n+1} = \exp_{m_n} \left( t_n \cdot \sum_{k \in G_{m_n}} \frac{\exp_{m_n}^{-1}(x_k)}{\|\exp_{m_n}^{-1}(x_k)\|} \right) \text{ avec } G_{m_n} = \{k / x_k \neq m_n\} \quad (6)$$

On en déduit sur la variété des matrices de covariances Hermitiennes définies positives, que la médiane  $A$  de  $N$  matrices  $B_k$  est donné par :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$

$$A_{n+1} = A_n^{1/2} e^{\left( t_n \cdot \sum_{k \in G_{A_n}} \frac{\log(A_n^{-1/2} B_k A_n^{-1/2})}{\|\log(A_n^{-1/2} B_k A_n^{-1/2})\|_F} \right)} A_n^{1/2} \text{ avec } G_{A_n} = \{k / B_k \neq A_n\} \quad (7)$$

#### 4 Contrainte Toeplitz via la paramétrisation d'Iwasawa partielle

Le flot précédent ne conserve pas le caractère Toeplitz de la solution. Pour tenir compte de cette contrainte, il faut utiliser la paramétrisation d'Iwasawa partielle qui correspond dans notre cas à une paramétrisation autorégressive complexe :

$$\Omega_n = (\alpha_n R_n)^{-1} = W_n W_n^+ = (1 - |\mu_n|^2) \begin{bmatrix} 1 & A_{n-1}^+ \\ A_{n-1} & \Omega_{n-1} + A_{n-1} A_{n-1}^+ \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$W_n = \sqrt{1 - |\mu_n|^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ A_{n-1} & \Omega_{n-1}^{1/2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{avec } \Omega_{n-1} = \Omega_{n-1}^{1/2} \Omega_{n-1}^{1/2+} \text{ où } \alpha_n^{-1} = [1 - |\mu_n|^2] \alpha_{n-1}^{-1} \quad (10)$$

$$A_n = [A_{n-1} \ 0]^T + \mu_n [A_{n-1}^{(-)} \ 1]^T \text{ avec } V^{(-)} = J V^* \quad (11)$$

La géométrie intrinsèque à cette paramétrisation  $\theta^{(n)} = [P_0 \ \mu_1 \ \dots \ \mu_{n-1}]^T$  avec  $P_0 = \alpha_0^{-1}$  est donnée par la géométrie de l'information où la métrique  $g_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta_i^{(n)} \partial \theta_j^{(n)*}}$  est définie comme Hessien du potentiel

de Kähler donné par l'entropie du processus [10,11] :

$$\tilde{\Phi}(R_n, P_0) = \log(\det R_n^{-1}) - \log(\pi.e) = \tilde{\Phi}(R_n, P_0) = -\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot \log[1 - |\mu_k|^2] - n \cdot \log[\pi.e.P_0] \quad (12)$$

Un calcul direct nous donne alors la métrique :  $ds_n^2 = d\theta^{(n)+} [g_{ij}] d\theta^{(n)} = n \left( \frac{dP_0}{P_0} \right)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \frac{|d\mu_j|^2}{(1 - |\mu_j|^2)^2}$

Le median sur  $P_0$  réel est trivial. Pour le calcul du median des  $\{\mu_k\}_{k=1}^{n-1}$  (coefficients de réflexion dans le disque unité de Poincaré), nous utilisons les automorphismes du disque  $\mu_{k,n+1} = \frac{\mu_{k,n} - w_n}{1 - \mu_{k,n} w_n^*}$ , pour fixer le

point soumis au flot de Karcher à l'origine où les géodésiques sont les radiales. Le flot de Karcher

conforme se réduit au calcul du vecteur tangent normalisé :  $w_n = \gamma_n \sum_{k \in G_0} \frac{\mu_{k,n}}{\|\mu_{k,n}\|}$  avec  $G_0 = \{k / |\mu_{k,n}| \neq 0\}$  (13)

Le médian se déduit de chaque pas  $w_n$  à chaque itération en mémorisant son déplacement par l'automorphisme inverse :  $\mu_{median,n+1} = \frac{\mu_{median,n} + w_n}{1 + \mu_{median,n} w_n^*}$  (14)

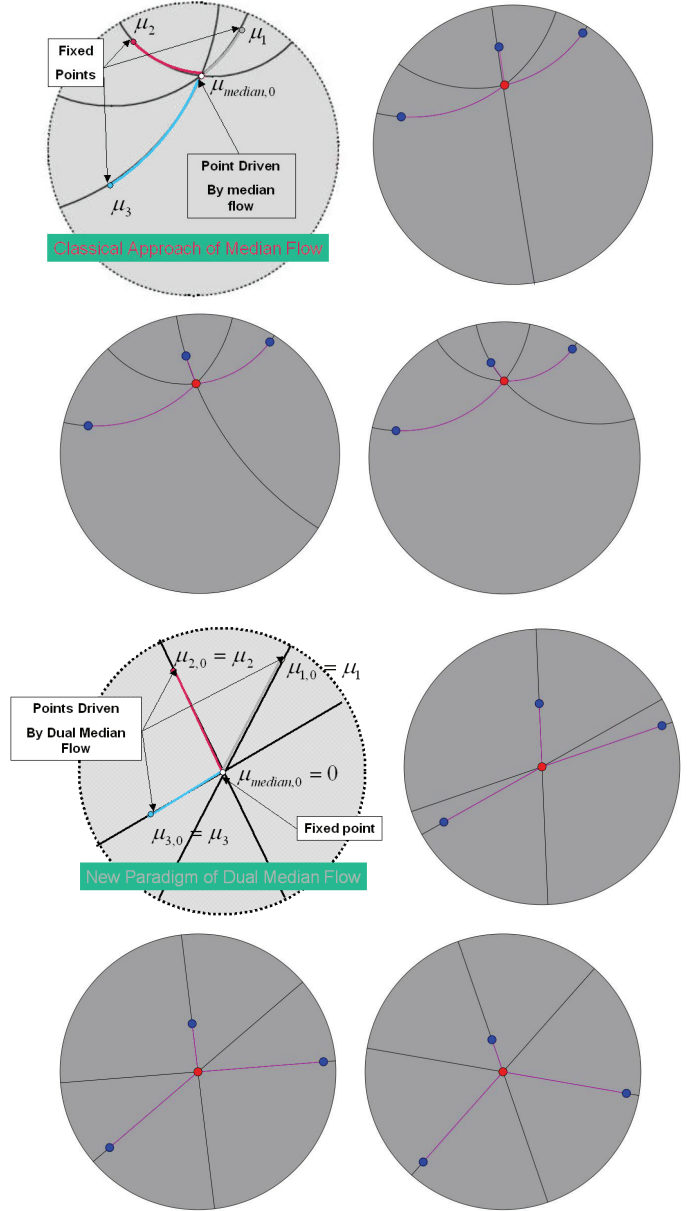


Figure 1 : Flot de Karcher dans le disque de Poincaré (haut), et son flot conforme à l'origine (bas)

Plus récemment, Marc Arnaudon [1] a proposé une version stochastique de ce flot qui converge presque sûrement vers la p-moyenne :

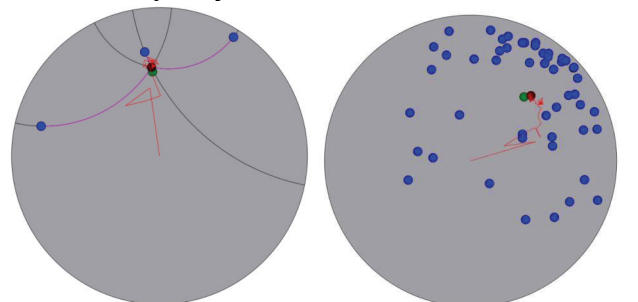


Figure 2 : Flot stochastique d'Arnaudon [1] dans le disque de Poincaré pour 3 points (à gauche), pour N points (à droite)

pour  $p=I$ , le flot stochastique [1] est donné par :

$$m_{n+1} = \exp_{m_n} \left( t_n \cdot \frac{\exp_{m_n}^{-1}(x_{rand(n)})}{\|\exp_{m_n}^{-1}(x_{rand(n)})\|} \right) \text{ où à chaque itération } n,$$

l'indice d'un des points est tiré aléatoirement  $x_{rand(n)}$ .

Alors,  $m_{n+1}$ , soumis au flot, se déplace le long de la géodésique entre  $m_n$  et  $x_{rand(n)}$ . Ainsi, dans le disque de Poincaré, l'indice  $rand(n)$  étant choisi aléatoirement dans l'ensemble  $G_0 = \{k/\mu_{k,n} \neq 0\}$ , à chaque étape, le déplacement est donné par  $w_n = \gamma_n \cdot (\mu_{rand(n),n} / |\mu_{rand(n),n}|)$ .

## 5 Extension au cas Toeplitz-Bloc-Toeplitz- via le disque de Siegel

Afin d'étendre le procédé à des matrices de covariance spatio-temporelle, nous utilisons un modèle autorégressif multivoie [9,18], qui correspond à une paramétrisation d'Iwasawa partielle [8] bloc :

$$R_{p,n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_n \cdot \hat{A}_n^+ \\ \alpha_n \cdot \hat{A}_n & R_{p,n}^{-1} + \alpha_n \cdot \hat{A}_n \cdot \hat{A}_n^+ \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\text{avec } \alpha_n^{-1} = [1 - A_n^n A_n^{n+}]^{-1}, \quad \alpha_0^{-1} = R_0$$

$$\hat{A}_n = [A_1^n \cdots A_n^n]^T = [\hat{A}_{n-1} 0_p]^T + A_n^n [J_p A_{n-1}^{n-1} J_p \cdots J_p A_1^{n-1} J_p \ I_p]^T$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, il est aisé de prouver que  $A_n^{n+1}$  est dans le disque de Siegel  $SD_p = \{W / WW^+ < I\}$

(généralisation du disque de Poincaré), dont la métrique est donnée par :

$$ds^2 = Tr \left[ (I_n - W^+ W)^{-1} dW (I_n - WW^+)^{-1} dW^+ \right] \quad (16)$$

associé aux automorphismes du disque de Siegel :

$$\mathcal{S} = \Phi_{Z_0}(Z) = (I - Z_0 Z_0^+)^{-1/2} (Z - Z_0) (I - Z_0^+ Z)^{-1} (I - Z_0^+ Z_0)^{1/2} \quad (17)$$

Siegel [16] a montré que la distance dans le disque est donnée par :  $\forall Z, W \in SD_n, d(Z, W) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \|\Phi_Z(W)\|}{1 + \|\Phi_Z(W)\|} \right)$  (18)

Il suffit comme précédemment d'introduire la métrique de l'information définie par comme le Hessien de l'entropie  $\tilde{\Phi}(R_{p,n+1})$  :

$$\tilde{\Phi}(R_{p,n}) = \log(\det R_{p,n}^{-1}) + cste = -Tr(\log R_{p,n}) + cste \quad (19)$$

$$\Rightarrow g_{ij} = Hess[\phi(R_{p,n})]$$

qui se développe via la structure par bloc en [13,14,18]:

$$\tilde{\Phi}(R_{p,n}) = -\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot \log \det [1 - A_k^k A_k^{k+}] - n \cdot \log [\pi \cdot e \cdot \det R_0] \quad (20)$$

Paul Malliavin a montré que ce type de potentiel de Kähler est une métrique de Bergman invariante :

$$ds^2 = n \cdot Tr \left[ (R_0^{-1} dR_0)^2 \right] + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) Tr \left[ (I_n - A_k^k A_k^{k+})^{-1} dA_k^k (I_n - A_k^{k+} A_k^k)^{-1} dA_k^{k+} \right] \quad (21)$$

Par analogie avec l'approche dans le disque de Poincaré, nous définissons un flot sur les  $\{A_k^k\}_{k=1}^{n-1}$  avec  $A_k^k \in SD_n$ . Il nous faut pouvoir définir un type de représentation polaire qui est en fait appelée fibration de Berger et se déduit de la décomposition de Mostow :

$M = Ue^{iA}e^S$  avec  $S$  symétrique :

$$S = \frac{1}{2} \log \left( P^{1/2} (P^{-1/2} P^* P^{-1/2})^{1/2} P^{1/2} \right) \text{ avec } P = \overline{M}M \quad (22)$$

$A$  anti-symétrique  $A = (1/2i) \log(e^{-S} P e^{-S})$ .

L'algorithme du médian dans le disque de Siegel est donné par analogie avec celui du disque de Poincaré :

$$\begin{aligned} W_{k,n} &= U_{k,n} e^{iA_{k,n}} e^{S_{k,n}} \Rightarrow H_{k,n} = U_{k,n} e^{iA_{k,n}} = W_{k,n} e^{-S_{k,n}} = e^{-\frac{S_{k,n}}{2}} W_{k,n} e^{\frac{S_{k,n}}{2}} \\ P_{k,n} &= \overline{W}_{k,n} W_{k,n} \text{ et } S_{k,n} = 1/2 \cdot \log \left( P_{k,n}^{1/2} (P_{k,n}^{-1/2} P_{k,n}^* P_{k,n}^{-1/2})^{1/2} P_{k,n}^{1/2} \right) \\ \Rightarrow G_n &= \gamma_n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m H_{k,n} \text{ avec } \left\{ \frac{1}{\|H_{l,n}\|_F} < \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

Pour  $k = 1, \dots, m$  alors  $W_{k,n+1} = \Phi_{G_n}(W_{k,n})$

$$W_{k,n+1} = (I - G_n G_n^+)^{-1/2} (W_{k,n} - G_n) (I - G_n^+ W_{k,n})^{-1} (I - G_n^+ G_n)^{1/2}$$

$$W_{median,n+1} = (G_n^+ + I)^{-1} (G_n + G_n)$$

$$\text{avec } G = (I - G_n G_n^+)^{1/2} W_{median,n} (I - G_n^+ G_n)^{1/2}$$

## 6 Noyau de Hua pour les Domaines de Siegel et travaux de Berezin

Les domaines bornés symétriques de  $C^n$  jouent un rôle central dans ces approches et sont des cas particuliers d'espaces symétriques de type non compact.

Elie Cartan [4] a prouvé qu'ils étaient de 6 types:

- 2 types exceptionnels (E6 et E7)
- 4 Domaines bornés symétriques classiques (extension du disque de Poincaré):

$Z$  : Matrice Complexe Rectangulaire

$ZZ^+ < I$  ( $+$ : transposé - conjugué)

Type I :  $\Omega_{p,q}^I$  matrices complexes avec p lignes et q colonnes (24)

Type II :  $\Omega_p^{II}$  matrices symétriques complexes d'ordre p

Type III :  $\Omega_p^{III}$  matrices anti-symétriques complexes d'ordre p

Type IV :  $\Omega_n^{IV}$  matrices complexes avec n colonnes et 1 ligne :

$$|ZZ^+| < 1, 1 + |ZZ^+|^2 - 2ZZ^+ > 0$$

C'est le mathématicien chinois Luo-Geng Hua [7] qui a calculé les fonctions noyaux de tous ces domaines :

$$K(Z, W^*) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \det(I - ZW^+)^{-\nu} \text{ pour } \begin{cases} \text{Type I : } \Omega_{p,q}^I, \nu = p + q \\ \text{Type II : } \Omega_p^{II}, \nu = p + 1 \\ \text{Type III : } \Omega_p^{III}, \nu = p - 1 \end{cases}$$

$$K(Z, W^*) = \frac{1}{\mu(\Omega)} (1 + ZZ^+ W^* W^+ - 2ZW^*)^{-\nu} \text{ pour Type IV : } \Omega_n^{IV}, \nu = n$$

où  $\mu(\Omega)$  est le volume euclidien du domaine.

Pour le cas particulier (p=q=n=1), on retrouve le cas du disque de Poincaré :

$$\Omega_{1,1}^I = \Omega_1^{II} = \Omega_1^{III} = \Omega_1^{IV} = \{z \in C / |zz^*| < 1\}, K(z, w^*) = \frac{1}{(1 - zw^*)^2} \quad (25)$$

Tous les domaines classiques sont circulaires suivant en cela le cadre général de la théorie de Cartan [3,4], et le point origine est un point distingué pour le potentiel :

$$\Phi(Z, Z^*) = \log \left[ \frac{K(Z, Z^*)}{K(0,0)} \right] = \log \det(I - ZZ^+)^{-\nu} \quad (26)$$

F.A. Berezin [2] a introduit sur ces domaines de Siegel la notion de quantification basée sur la construction d'espaces de Hilbert de fonctions analytiques:

$$\langle f, g \rangle = c(h) \int f(Z) g(Z) \left[ \frac{K(Z, Z^*)}{K(0,0)} \right]^{-1/h} d\mu(Z, Z^*) \quad (27)$$

$$c(h)^{-1} = \int \left[ \frac{K(Z, Z^*)}{K(0,0)} \right]^{-1/h} d\mu(Z, Z^*)$$

$$K(gZ, gZ^*) j(g, z) j(g, Z)^* = K(Z, Z^*) \text{ avec } j(g, Z) = \frac{\partial gZ}{\partial Z}$$

Un exemple est à nouveau donné en dimension 1 par le disque de Poincaré  $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} = SU(1,1) / S^1$  dont l'élément volume est  $1/2i.(1-|z|^2)^{-2} dz \wedge dz^*$  :

$$g \in SU(1,1) \text{ avec } g = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{bmatrix} \text{ où } |a|^2 - |b|^2 = 1$$

$$\text{de potentiel } : F(z) = -\log(1-|z|^2) \Rightarrow F(gz) = 2\operatorname{Re} \log(b^*z + a^*) + F(z) \\ \Rightarrow ds^2 = \frac{\partial^2 F(gz)}{\partial z \partial z^*} = \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z \partial z^*}$$

Cette dernière relation montre que la métrique de Kähler (Hessien du potentiel) est invariante par  $g \in G$  (groupe des automorphisme du disque). L'orbite du point  $z = 0$  est donné par l'espace des éléments décrivant  $g(0) = b(a^*)^{-1}$ . On parle alors de relèvement géométrique qui permet d'associer à tout chemin dans le disque un relèvement dans  $G$ . De même, on peut définir un relèvement géométrique du potentiel  $K$  dans  $G$  :

$$g(0) = b(a^*)^{-1} \Rightarrow F(g(0)) = -\log \left( 1 - |b(a^*)^{-1}|^2 \right) \Big|_{|a|^2 - |b|^2 = 1} = \log(1 + |b|^2)$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ -b^* & a \end{pmatrix} \Rightarrow F(g^{-1}) = F(g)$$

Evidemment, toutes ces notions de relèvement s'étendent aux domaines de Siegel  $SD_n = \{Z / ZZ^+ < I\}$  :

$$\text{soit } g = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{bmatrix} \text{ et } g^t J g = J \text{ avec } J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ et } B \text{ vérifiant } \begin{cases} A^+ A - B^+ B^* = I \\ B^+ A - A^+ B^* = 0 \end{cases}, g(Z) = (AZ + B)(B^+ Z + A^+)^{-1}$$

$$\text{de Potentiel de Kähler } : F(z) = -\log \det(I - ZZ^+) = -\operatorname{Tr}[\log(I - ZZ^+)] \\ F(g(Z)) = F(Z) + 2\operatorname{Re}(\operatorname{Tr}(\log(A^+ + B^+ Z)))$$

$$\partial \bar{\partial}^* F(g(Z)) = \partial \bar{\partial}^* F(Z)$$

Le relèvement géométrique dans le domaine de Siegel est alors donné par la relation suivante :

$$g(0) = B(A^+)^{-1} \Rightarrow F(g(0)) = \log \det(I + BB^+) = \operatorname{Tr}[\log(I + BB^+)]$$

F.A. Berezin [2] a montré ainsi que pour tout espace Riemannien symétrique, il existe un espace dual compact pour lequel il a introduit des coordonnées naturelles sur lesquelles le volume et la métrique sont invariantes [12].

$$d\mu(W, W^*) = H(W, W^*) \frac{d\mu_L(W, W^*)}{\pi^n}$$

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} dW^\alpha dW^{\beta*} \text{ avec } g_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 \log H(W, W^*)}{\partial W^\alpha \partial W^{\beta*}} \quad (28)$$

$$\text{où } H(W, W^*) = \det(I + WW^+)^{-n}$$

## 7 Conclusion

La géométrie de l'information apparaît ainsi comme le cadre naturel d'étude de la géométrie des matrices de covariance. Les espaces symétriques associés sont à courbure sectionnelle négative, ce qui permet via le théorème de Cartan d'utiliser le résultat d'existence du barycentre ou centre de masse. Nous étendons naturellement via la fibration de Berger, un schéma de calcul du médian permettant d'étendre les statistiques robustes dans ces espaces métriques, via la théorie des espaces abstraits de Fréchet [6]. Nous avons souligné qu'il existait un lien fondamental avec l'étude des domaines classiques bornés homogènes de Siegel [15].

## 8 Bibliographie

- [1] M. Arnaudon, C. Dombry, A. Phan, L. Yang, "Stochastic algorithms for computing means of probability measures", <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00540623>
- [2] F.A. Berezin, "quantization in Complex Symmetric Spaces", Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. T.39,n°2, 1975
- [3] E. Cartan, «Groupes simples clos et ouverts et Géométrie Riemannienne», J. Math. Pures Appl., n°8, p.1-33, 1929
- [4] E. Cartan, «Sur les domaines bornés de l'espace de n variables complexes», Abh. Math. Seminar Hamburg, n°11, pp.116-162, 1935
- [5] M. Émery, G. Mokobodzki, «Sur le barycentre d'une probabilité dans une variété», Sémin. de proba. Strasbourg, n°25, p. 220-233, 1991
- [6] M. Fréchet, «Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié», Annales de l'I.H.P., t.10,n°4,p.215-310, 1948
- [7] L.K. Hua, "Harmonic analysis Functions of Several Complex variables in the Classical Domains", Providence, AMS, 1958
- [8] I. Iwasawa, "On some types of topological groups", Ann. Math. Vol. 50, n°3, pp. 507-558, 1949
- [9] R. Kanhouche, "A Modified Burg Algorithm Equivalent In Results to Levinson Algorithm", <http://hal.archives-ouvertes.fr/ccsd-00000624>, CMLA preprint
- [10] H. Karcher, "Riemannian center of mass and mollifier smoothing", Comm. Pure Applied Math., n°30,pp.509-541,1977
- [11] J.L. Koszul, "Sur la forme Hermitienne canonique des espaces homogènes complexes" Canadian Journal of Math. , vol.7, n°4, pp. 562-576, 1955
- [12] J.L. Koszul, «Exposés sur les espaces homogènes symétriques», Publicação da Sociedade de Matematica de Sao Paulo, Sao Paulo, 1959
- [13] J. Mitchell, "A Theorem in the Geometry of Matrices", Proc. AMS, vol.2, n°2, April 1951
- [14] J. Mitchell, "Potential Theory in the Geometry of Matrices", Trans. AMS, vol.79,n°2, 1955
- [15] I.I. Pyatetskii-Shapiro, "Automorphic functions and the geometry of classical domains", Gordon & Breach Science Publishers, 1969
- [16] C. L. Siegel, "Symplectic Geometry", Amer. J. Math., n°65, pp.1-86, 1943
- [17] Vinberg E.B., "The theory of convex homogeneous cones", Trans. Math. Moscow M.S.pp340-403,1963
- [18] M. Wax, T. Kailath, "Efficient Inversion of Toeplitz-Block Toeplitz Matrix", IEEE Trans. ASSP, vol.31, n°5, pp.1218-1221, Oct. 1983
- [19] Le Yang, "Riemannian Median and Its Estimation", LMS Journal of Computation and Mathematics, v.13, pp 461 - 479, 6 January 2011