

Développement de Filtres STAP Tensoriels Appliqués à des Données Multidimensionnelles

Maxime BOIZARD^{1,2}, Guillaume GINOLHAC¹, Frédéric PASCAL², Philippe FORSTER¹

¹Laboratoire SATIE - ENS Cachan - CNRS - UniverSud
61 av du President Wilson 94235 CACHAN Cedex, France

²Laboratoire SONDRRA - Supelec
Plateau de Moulon, 3 rue Joliot-Curie, F-91192 Gif-sur-Yvette Cdex, France
maxime.boizard@satie.ens-cachan.fr, guillaume.ginolhac@satie.ens-cachan.fr
frederic.pascal@supelec.fr, philippe.forster@satie.ens-cachan.fr

Résumé – Dans le cadre de données RADAR multidimensionnelles (par exemple avec des dimensions temporelles, spatiales, polarimétriques, multistatiques, . . .), nous proposons de développer de nouveaux filtres *Space Time Adaptive Processing* (STAP) tensoriels. Cette approche permet de conserver la structure naturelle des données. En effet dans le cas classique, les données multidimensionnelles sont mises sous forme vectorielle afin de faciliter les traitements. Notre approche se distingue par l’application de l’algèbre multilinéaire [1] et en particulier de l’extension de la décomposition en valeurs singulières au cadre tensoriel, la *Higher Order Singular Value Decomposition* (HOSVD) [2] pour développer nos deux filtres STAP : une version optimale et une version rang faible. La version rang faible est appliquée dans le cadre du STAP polarimétrique et permet d’obtenir de meilleures performances que son équivalent vectoriel.

Abstract – Under multidimensional RADAR configurations (polarimetric, MIMO), we propose the derivation of new *Space Time Adaptive Processing* (STAP) tensor filters and the corresponding adaptive filters. This approach allows to preserve the data structure. Usually the data are used as vectors to simplify processing. Our approach used multilinear algebra [1] and especially a generalization of the Singular Value Decomposition, the *Higher Order Singular Value Decomposition* (HOSVD) [2] to derive our two filters : a optimal tensor filter and a low-rank tensor filter. We apply the low-rank filter in case of polarimetric STAP to show the performance improvement compared to classic vector STAP filter.

1 Introduction

Le filtre STAP (*Space Time Adaptive Processing*) [3] est utilisé dans le cadre des RADAR aéroportés afin de détecter des cibles en mouvement noyées dans un *clutter* (fouillis) de sol en combinant les informations temporelles et spatiales. Il est possible de construire une version rang faible [4, 5] en utilisant le projecteur sur le sous espace orthogonal au *clutter*. En effet la loi de Brennan assure que la matrice de covariance du *clutter* est de rang faible. Cette version rang faible est connue pour être plus performante que la version classique.

Dans le cadre de données multidimensionnelles (STAP MIMO et/ou STAP polarimétrique), les traitements usuels arrangent les données sous forme vectorielle sans utiliser complètement leur structure multidimensionnelle, ce qui paraît préjudiciable dans certaines configurations de cibles et de *clutter*. Nous proposons donc dans ce papier d’utiliser les nombreux outils d’algèbre multilinéaires [1] comme la *Higher Order Singular Value Decomposition* (HOSVD) [2] pour développer des nouveaux filtres STAP tensoriel qui permettent de tirer parti de la structure des données considérées : une version optimale, une version rang faible et leurs versions adaptatives.

L’article se présente de la manière suivante : la partie 2 présen-

te quelques outils d’algèbre multilinéaires nécessaires au développement de nos filtres. La partie 3 présente le filtre STAP tensoriel et le filtre STAP tensoriel rang faible. La partie 4 présente les résultats des filtres obtenus sur des données synthétiques dans un cas de STAP polarimétrique .

Les conventions suivantes sont adoptées : l’italique indique une quantité scalaire, une minuscule en gras indique un vecteur, une majuscule en gras indique une matrice et une lettre calligraphique en gras un tenseur. * correspond à l’opérateur de conjugaison et H à l’opérateur de transposée conjuguée. $E[\cdot]$ est l’opérateur d’espérance mathématique. La matrice \mathbf{I}_N est la matrice identité de taille $N \times N$.

2 Quelques éléments d’algèbre multilinéaire

Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ deux tenseurs et $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{J_n \times I_n}$ une matrice. On note les éléments d’un tenseur de la manière suivante : $(\mathcal{A})_{i_1, \dots, i_N} = a_{i_1, \dots, i_N}$. Dans la suite du papier, nous aurons recours aux opérations présentées ci-dessous. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [1, 2].

Déplissements

On commence par définir trois opérateurs de déplissement, qui permettent de réorganiser les éléments d'un tenseur sous forme d'un vecteur ou d'une matrice :

- vecteur : ce premier opérateur que l'on note vec transforme un tenseur \mathcal{A} en vecteur, ainsi $vec(\mathcal{A}) \in \mathbb{C}^{I_1 \dots I_N}$. On notera vec^{-1} l'opérateur réciproque.
- matrice carrée : ce second opérateur que l'on note $SqMat$ permet de transformer un tenseur $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N \times I_1 \times \dots \times I_N}$ en une matrice carrée, ainsi $SqMat(\mathcal{R}) \in \mathbb{C}^{I_1 \dots I_N \times I_1 \dots I_N}$. On notera $SqMat^{-1}$ l'opérateur réciproque.
- matrice : ce troisième opérateur permet de transformer un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ en une matrice $[\mathcal{A}]_n \in \mathbb{C}^{I_n \times I_1 \dots I_{n-1} I_{n+1} \dots I_N}$.

Produits

Nous utilisons différents produits :

- produit scalaire : $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_N} b_{i_1 \dots i_N}^* a_{i_1 \dots i_N} = vec(\mathcal{A})^H vec(\mathcal{B})$
- produit n -mode : $(\mathcal{A} \times_n \mathbf{D})_{i_1 \dots j_n \dots i_N} = \sum_{i_n} a_{i_1 \dots i_n \dots i_N} d_{j_n i_n}$
- produit extérieur : $\mathcal{E} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N \times J_1 \times \dots \times J_N}$ avec $e_{i_1, \dots, i_N, j_1, \dots, j_M} = a_{i_1, \dots, i_N} \cdot b_{j_1, \dots, j_M}$

HOSVD

Une des extensions de la SVD matricielle est la HOSVD. Selon cette décomposition, un tenseur peut s'écrire de la manière suivante : $\mathcal{A} = \mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)}$ avec $\forall n, \mathbf{U}^{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times I_n}$, des matrices orthonormées et $\mathcal{K} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, qui satisfait les conditions de *toute orthogonalité* [2]. La matrice $\mathbf{U}^{(n)}$ est issue du calcul de la SVD du tenseur déplié dans la n -ième dimension $[\mathcal{A}]_n$.

3 Filtres STAP Tensoriels

On cherche à détecter la présence d'un signal tensoriel $\mathcal{S} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ (supposé connu) au sein d'une observation \mathcal{X} perturbée par un bruit \mathcal{N} :

$$\mathcal{X} = \mathcal{S} + \mathcal{N}, \quad (1)$$

avec \mathcal{N} un bruit gaussien de moyenne nulle et de tenseur de covariance, $\mathcal{R} = \mathbb{E}[\mathcal{N} \circ \mathcal{N}^*] \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N \times I_1 \times \dots \times I_N}$ [6].

3.1 Filtre STAP tensoriel optimal

Par analogie avec la démonstration du filtre STAP optimal dans le cas vectoriel [7], nous développons notre filtre STAP tensoriel optimal, noté \mathcal{W} , en maximisant le Rapport Signal à Bruit (RSB) en sortie du filtre :

$$RSB = \frac{|\langle \mathcal{W}, \mathcal{S} \rangle|^2}{vec(\mathcal{W})^H \mathbf{R} vec(\mathcal{W})}, \quad (2)$$

avec $\mathbf{R} = SqMat(\mathcal{R})$. De plus

$$\langle \mathcal{W}, \mathcal{S} \rangle = vec(\mathcal{W})^H vec(\mathcal{S}) = vec(\mathcal{W})^H \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} vec(\mathcal{S}) \quad (3)$$

Ce qui peut être vu comme le produit scalaire entre $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}} vec(\mathcal{W})$ et $\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} vec(\mathcal{S})$ dans la métrique de \mathbf{R} . Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette quantité est maximum lorsque $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}} vec(\mathcal{W}) = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} vec(\mathcal{S})$ donc $vec(\mathcal{W}) = \mathbf{R}^{-1} vec(\mathcal{S})$. Si on réinjecte la forme de \mathcal{W} que l'on vient de trouver, on obtient :

$$RSB = \frac{|vec(\mathcal{S})^H \mathbf{R}^{-1} vec(\mathcal{S})|^2}{vec(\mathcal{S})^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} vec(\mathcal{S})} = |vec(\mathcal{S})^H \mathbf{R}^{-1} vec(\mathcal{S})| \quad (4)$$

Nous avons bien le RSB maximum. Ainsi, le filtre tensoriel \mathcal{W} qui maximise le rapport signal à bruit est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{W} = vec^{-1}(\mathbf{R}^{-1} vec(\mathcal{S})) \quad (5)$$

On retrouve le même résultat que dans le cas vectoriel, ainsi l'utilisation de l'algèbre tensoriel n'apporte pas de gain de performance ou de robustesse. Ceci est logique étant donné que le filtre est basé sur un produit scalaire, ce qui fait que l'on n'exploite pas la structure multidimensionnelle des données. C'est pourquoi on propose par la suite un filtre STAP tensoriel rang faible qui prendra en compte la structure particulière du *clutter*.

3.2 Filtre STAP tensoriel rang faible

La structure rang faible du *clutter* permet de décomposer le tenseur \mathcal{N} de la manière suivante $\mathcal{N} = \mathcal{C} + \mathcal{B}$, où \mathcal{B} est un bruit blanc de loi gaussienne complexe, de moyenne nulle et de tenseur de covariance $\sigma^2 \mathcal{J}$ (avec $SqMat(\mathcal{J}) = \mathbf{I}_{I_1 \dots I_N}$). \mathcal{C} est un *clutter* gaussien de rang faible, décrivant la réponse du sol. Afin d'éliminer ce *clutter*, il est nécessaire tout d'abord de déterminer le projecteur tensoriel sur le sous espace orthogonal au *clutter*. Dans ce but, le tenseur de covariance \mathcal{R} est décomposé selon la HOSVD :

$$\mathcal{R} = \mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)} \times_{N+1} \mathbf{U}^{(1)*} \dots \times_{2N} \mathbf{U}^{(N)*} \quad (6)$$

Ensuite, afin d'obtenir le projecteur tensoriel, on calcule les projecteurs, $\mathbf{U}_0^{(n)} \mathbf{U}_0^{(n)H}$ avec $n \in [1, N]$, dans toutes les directions du tenseur. Une bonne approximation des matrices $\mathbf{U}_0^{(n)}$ peut être obtenues en tronquant les matrices $\mathbf{U}^{(n)}$ de manière à ne garder que les $I_n - r_n$ premières colonnes [6] (r_n est le rang de \mathcal{R} dans la direction n , pour plus de détails voir [2]). Il est alors possible de calculer la projection de \mathcal{X} sur le sous espace orthogonal au *clutter* :

$$\mathcal{X} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \mathbf{U}_0^{(1)H} \dots \times_N \mathbf{U}_0^{(N)} \mathbf{U}_0^{(N)H} \quad (7)$$

$$= \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \mathbf{U}_0^{(1)H} \dots \times_N \mathbf{U}_0^{(N)} \mathbf{U}_0^{(N)H} +$$

$$\mathcal{N} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \mathbf{U}_0^{(1)H} \dots \times_N \mathbf{U}_0^{(N)} \mathbf{U}_0^{(N)H} \quad (8)$$

$$= \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \mathbf{U}_0^{(1)H} \dots \times_N \mathbf{U}_0^{(N)} \mathbf{U}_0^{(N)H} +$$

$$\mathcal{B} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \mathbf{U}_0^{(1)H} \dots \times_N \mathbf{U}_0^{(N)} \mathbf{U}_0^{(N)H} \quad (9)$$

où $\mathcal{B} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \mathbf{U}_0^{(1)H} \dots \times_N \mathbf{U}_0^{(N)} \mathbf{U}_0^{(N)H}$ suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de tenseur de covariance $\sigma^2 \mathcal{J}$. On a ainsi supprimé le *clutter*. En utilisant le résultat de la partie précédente, on obtient alors un nouveau filtre rang faible, noté \mathcal{W}_{lr} :

$$\mathcal{W}_{lr} = \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \mathbf{U}_0^{(1)H} \dots \times_N \mathbf{U}_0^{(N)} \mathbf{U}_0^{(N)H} \quad (10)$$

3.3 Filtres STAP tensoriels sous optimaux

En pratique, on ne connaît pas le tenseur de covariance \mathcal{R} , il est donc nécessaire de l'estimer. Pour cela on dispose de K données secondaires indépendantes, qui ne sont supposées contenir que le clutter et le bruit blanc et qui possèdent les mêmes propriétés statistiques que la donnée sous test.

- On utilise l'équivalent tensoriel de la SCM [6] pour estimer \mathcal{R} :

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \circ \mathbf{x}_k^* \quad (11)$$

- On applique la HOSVD à $\hat{\mathcal{R}}$ pour obtenir les $\hat{\mathbf{U}}^{(n)}$.
- On estime les rangs dans chaque dimension en se basant sur les valeurs propres issues des SVD des différents dépliements du tenseur.
- On tronque les $\hat{\mathbf{U}}^{(n)}$ pour obtenir les $\hat{\mathbf{U}}_0^{(n)}$
- On calcule $\hat{\mathcal{W}}_{lr}$.

4 Application au STAP polarimétrique

Afin d'illustrer l'intérêt de notre filtre STAP rang faible tensoriel, on l'applique dans le cadre du STAP polarimétrique. On cherche à repérer une cible mouvante, caractérisée par sa position angulaire θ et sa vitesse v , à l'aide d'une antenne composée de N éléments émettant M impulsions et capable d'émettre et de recevoir dans plusieurs polarisations (HH, VV, HV). On applique deux traitements : le filtre STAP rang faible vectoriel [4, 5] et le filtre STAP tensoriel rang faible. Les simulations présentées dans la suite ont été réalisées pour une cible caractérisée par les paramètres suivants : $\theta = 0^\circ$, $v = 8 \text{ m.s}^{-1}$. De plus, les caractéristiques de la plateforme sont les suivantes : $M = N = 8$, $f_0 = 450 \text{ MHz}$, $V = 100 \text{ m.s}^{-1}$

4.1 Modélisation polarimétrique

Dans le cas vectoriel, on construit les données en concaténant les réponses de trois polarisations en un vecteur. La cible est modélisée par un *steering vector* $\mathbf{s}(\theta, v)$ de la forme suivante :

$$\mathbf{s}(\theta, v) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{HH}(\theta, v) \\ \alpha_{VV} \mathbf{s}_{HH}(\theta, v) \\ \alpha_{VH} \mathbf{s}_{HH}(\theta, v) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$\mathbf{s}_{HH}(\theta, v)$ est construit sur le même modèle que le *steering vector* utilisé pour le STAP classique [3]. On suppose aussi que l'on peut décomposer le bruit \mathbf{n} de la manière suivante $\mathbf{n} = \mathbf{c} + \mathbf{b}$ où \mathbf{b} est un bruit blanc gaussien complexe centré, de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}_{3MN}$. \mathbf{c} est un *clutter* gaussien centré de matrice de covariance $\mathbf{R}_{\text{polar}}$ qui s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\text{polar}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{c}} & \gamma_{\bar{V}V} \mathbf{R}_{\mathbf{c}} & 0 \\ \gamma_{VV} \mathbf{R}_{\mathbf{c}} & |\gamma_{VV}|^2 \mathbf{R}_{\mathbf{c}} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{VH} \mathbf{R}_{\mathbf{c}} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{c}} \in \mathbb{C}^{MN \times MN}$ correspond à la matrice de covariance de *clutter* de la polarisation HH que l'on construit à partir du

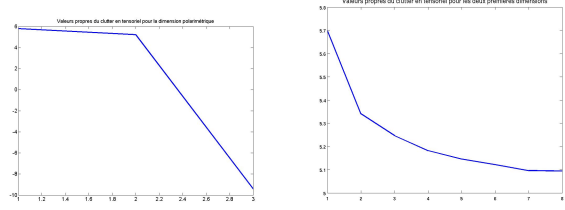


FIGURE 1 – A gauche : \log des valeurs propres de $\mathcal{R}_{\text{polar}}$ pour la dimension polarimétrique. A droite : \log des valeurs propres de $\mathcal{R}_{\text{polar}}$ pour les dimensions spatio-temporelles.

modèle du STAP classique [3]. Ainsi \mathbf{n} est un bruit gaussien centré, de matrice de covariance $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{polar}} + \sigma^2 \mathbf{I}_{3MN}$

Dans le cas tensoriel, on travaille avec des tenseurs d'ordre 3, $\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{N} \in \mathbb{C}^{M \times N \times 3}$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{M \times N \times 3 \times M \times N \times 3}$. Le modèle de la cible et du *clutter* sont les mêmes avec :

$$\mathcal{S}(\theta, v) = \text{vec}^{-1}(\mathbf{s}(\theta, v)), \quad (14)$$

$$\mathcal{R} = \text{SqMat}^{-1}(\mathbf{R}). \quad (15)$$

Les simulations ont été réalisées avec les paramètres suivants : $\gamma_{VV} = 0.2612 - 0.0560i$, $\gamma_{VH} = 0.5292$, $\alpha_{VV} = 0.8705$ et $\alpha_{VH} = 0.1414$.

4.2 Résultats de simulation

Afin d'appliquer le filtre tensoriel rang faible, il est nécessaire d'estimer les trois premiers rangs du tenseur de covariance (correspondant aux rangs des matrices $[\mathcal{R}]_1$, $[\mathcal{R}]_2$ et $[\mathcal{R}]_3$). En se basant sur la figure 1 qui représente les valeurs propres ordonnées de $[\mathcal{R}]_1$ et $[\mathcal{R}]_2$, regroupées sur le même graphique et $[\mathcal{R}]_3$ on peut faire les remarques suivantes : pour la dimension polarimétrique il est raisonnable de prendre un rang égal à 2. En revanche la situation est moins évidente pour les deux autres dimensions (spatiale et temporelle). Néanmoins au vu de la cassure maximum de la courbe, 2 semble être une bonne approximation pour ces dimensions, ce que confirme les résultats de simulation.

La cible utilisée dans nos simulation a été choisie de manière à être proche du *clutter* de manière à justifier l'utilisation du STAP polarimétrique. On a donc tracé les résultats de filtrage pour trois filtres pour une même réalisation : le STAP classique vectoriel rang faible (sans polarisation), le STAP polarimétrique vectoriel rang faible et le STAP polarimétrique tensoriel rang faible.

On constate sur la figure 2 que le STAP classique ne permet pas de distinguer la cible du *clutter* de manière satisfaisante. L'ajout des deux autres voies polarimétriques au traitement vectoriel permet de mieux distinguer la cible (voir figure 3). Néanmoins le traitement vectoriel ne permet pas de supprimer tout le clutter. En revanche le traitement tensoriel fait ressortir la cible de manière satisfaisante tout en supprimant le *clutter* (et donc de potentielles fausses alarmes).

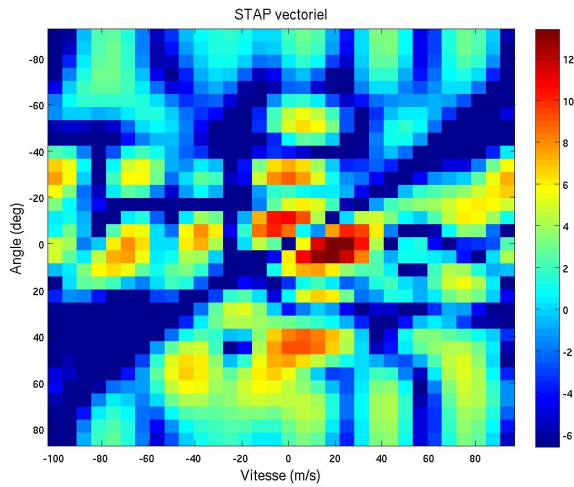


FIGURE 2 – Résultat de filtrage pour le STAP vectoriel.

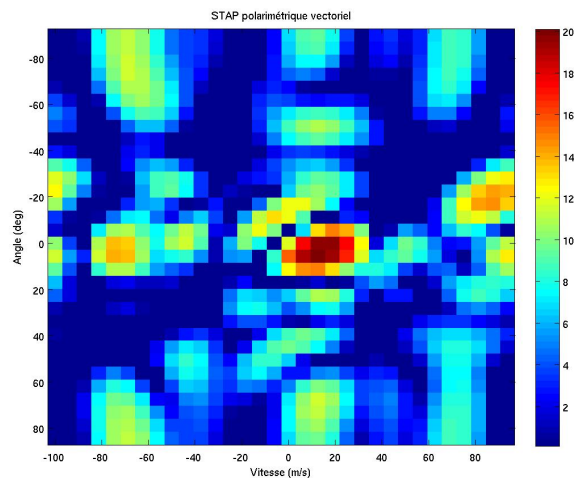


FIGURE 3 – Résultat de filtrage pour le STAP polarimétrique vectoriel.

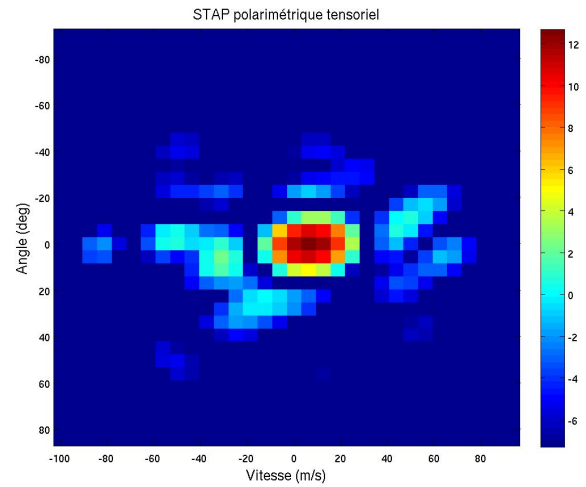


FIGURE 4 – Résultat de filtrage pour le STAP polarimétrique tensoriel.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons développé un filtre STAP tensoriel rang faible avec sa version adaptative. Ce filtre est basé sur la HOSVD et permet de tirer partie de la structure multidimensionnelle des données considérées. Les résultats sur le filtre rang faible sont encourageants et montre l'intérêt de l'utilisation de l'algèbre multilinéaire. En effet notre filtre tensoriel rang faible permet, lorsque l'on dispose d'une structure sur le *clutter*, de mieux l'éliminer que la version vectorielle. Par la suite il serait intéressant d'étudier plus précisément les performances du filtre mais aussi de calculer ses performances théoriques.

Références

- [1] T. Kolda, "Multilinear operators for higher-order decompositions," Tech. Rep., Sandia National Laboratory, Albuquerque, NM and Livermore, CA, USA, April 2006.
- [2] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, "A multilinear singular value decomposition," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 24, no. 4, pp. 1253–1278, 2000.
- [3] J. Ward, "Space-time adaptive processing for airborne radar," Tech. Rep., Lincoln Lab., MIT, Lexington, Mass., USA, December 1994.
- [4] I. Kirsteins and D. Tufts, "Adaptive detection using a low rank approximation to a data matrix," *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, vol. 30, pp. 55 – 67, 1994.
- [5] A. Haimovich, "Asymptotic distribution of the conditional signal-to-noise ratio in an eigenanalysis-based adaptive array," *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, vol. 33, pp. 988 – 997, 1997.
- [6] M. Haardt, F. Roemer, and G. Del Galdo, "Higher-order svd-based subspace estimation to improve the parameter estimation accuracy in multidimensional harmonic retrieval problems," *IEEE Trans. on Proc. Sig. Proc.*, vol. 56, no. 7, pp. 3198–3213, July 2008.
- [7] L. E. Brennan and L. S. Reed, "Theory of adaptive radar," *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, vol. 9, no. 2, pp. 237 – 252, 1973.