

Extraction de flot moyen dans des simulations numériques à grande échelle de fluides par filtre de Kalman adaptatif

Adrien CAHUZAC¹, Jérôme BOUDET¹, Emmanuel LÉVÊQUE², Pierre BORGNAT²

¹LMFA, École Centrale de Lyon, Université de Lyon, CNRS
36 avenue Guy de Collongue, 69314 Ecully cedex, France

²Laboratoire de Physique, École normale supérieure de Lyon, Université de Lyon, CNRS
46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

adrien.cahuzac@ec-lyon.fr, jerome.boudet@ec-lyon.fr
emmanuel.leveque@ens-lyon.fr, pierre.borgnat@ens-lyon.fr

Résumé – Dans des simulations numériques à grande échelle (LES) en mécanique des fluides, le modèle SISM (*Shear-Improved Smagorinsky's Model*) propose de prendre en compte une viscosité turbulente qui suppose de savoir extraire de l'écoulement la moyenne d'ensemble. Le problème est d'estimer cette moyenne en toute situation, même sans direction d'homogénéité disponible pour faire des moyennes spatiales, ni stationnarité de l'écoulement (qui permettrait des moyennes dans le temps), et ceci que l'écoulement soit laminaire ou turbulent. Il est proposé d'extraire cet écoulement moyen, localement en temps et en espace, en formulant la question comme le suivi par filtre de Kalman de la moyenne locale. Un premier modèle (en marche aléatoire) retrouve le lissage exponentiel dans le temps qui est rendu adaptatif du fait de l'estimation d'une variance instantanée des fluctuations turbulentes. Un deuxième modèle améliore l'extraction en rendant le filtre plus réactif en ajoutant à l'état estimé la pente locale. L'extraction par filtre de Kalman se révèle permettre effectivement une simulation LES du sillage derrière un cylindre qui semble pertinente physiquement. En particulier la fréquence de coupure instantanée locale du filtre réagit à la structure de l'écoulement. Ensuite, le modèle incluant la pente locale permet une meilleure réactivité de l'extraction du flot moyen lors d'une transition turbulente, sans perdre sur le suivi en écoulement laminaire.

Abstract – In Large-Eddy Simulation (LES) of fluids, the Shear-Improved Smagorinsky's Model (SISM) introduces a turbulent viscosity which requires an estimate of the ensemble average of the mean-flow. The difficulty is to estimate this ensemble average from one realization of the computed flow only, for both turbulent and laminar flows, and even in cases without any spatial invariance nor stationarity that would make averaging in space or time suitable. A Kalman filtering method is proposed to extract, locally in space and time, the mean-flow. A first model as a random walk gives an adaptive version of an exponential smoothing for mean-flow extraction. A second model adds a local linear trend in the state model so as to improve the global reactivity of the filter. The results are that a Kalman filter extraction of the mean-flow works well for practical LES of an air-flow past a cylinder, providing in addition a meaningful adaptation of the instantaneous filter to the flow structure. Then, the model with a local linear trend is shown to have a better reactivity to the changes of mean-flow, without any degradation when the mean-flow is supposed to be only the laminar flow, in contrast to what a (non-adaptive) exponential smoothing is doing.

1 Simulations numériques de fluides à grande échelle et modèle SISM

La simulation des grandes échelles (*large-eddy simulation*, LES) en mécanique des fluides [1] permet de calculer l'évolution d'un fluide en écoulement turbulent, au prix de n'avoir qu'une version filtrée en espace. Pour ce faire, les équations de la mécanique des fluides sont réécrites pour un champ de vitesse $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ moyenné à l'échelle de la grille autour de la position \mathbf{x} . Un enjeu des LES est de modéliser le comportement des fluctuations turbulentes à plus petite échelle que la grille, en particulier leur contribution μ_{SGS} à la viscosité effective, pour retrouver correctement la vitesse à grande échelle. Il a été proposé dans [2] qu'une viscosité de Smagorinsky ajustée par l'étirement (SISM pour *Shear-improved Smagorinsky's Model*)

est un bon modèle pour cela :

$$\mu_{SGS} = \bar{\rho}(C_s \Delta)^2 (|\bar{S}| - |\langle \bar{S} \rangle|), \quad (1)$$

où $C_s = 0.18$ est la constante de Smagorinsky, Δ l'espacement de la grille et $\bar{S} = (\partial \bar{u}_i / \partial x_j + \partial \bar{u}_j / \partial x_i) / 2$, le tenseur d'étirement résolu en temps et en espace. La notation $\langle \cdot \rangle$ indique la *moyenne d'ensemble* sur l'écoulement. Le problème est alors d'estimer cette moyenne en toute situation, même sans direction d'homogénéité pour faire des moyennes spatiales, ni stationnarité de l'écoulement (qui permettrait des moyennes dans le temps), et ceci que l'écoulement soit laminaire ou turbulent. Les équations de la mécanique des fluides filtrées pour la LES sont par exemple données dans [1, 3]. Dans [3] est rappelé de plus l'origine physique du modèle SISM et sa justification détaillée est dans [2].

Un premier travail [3] a montré comment aborder la ques-

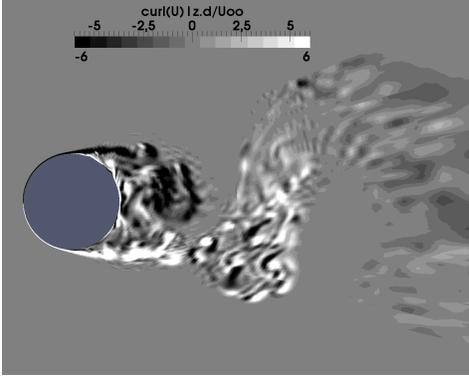


FIG. 1 – Visualisation d'une coupe 2D de la vorticité verticale (parallèle au cylindre) instantanée ; on voit les tourbillons qui se développent derrière le cylindre (disque gris).

tion d'extraction du flot moyen comme un problème d'estimation de la moyenne temporelle de l'écoulement, point à point sur la grille. Dans [3], l'extraction de ce flot moyen résolu en temps et en espace a été d'abord faite par une méthode de lissage exponentiel dans le temps. Du fait des contraintes d'une simulation numérique où l'on ne retient pas plus que le pas de temps précédent pour intégrer l'équation d'évolution de $\bar{\mathbf{u}}$, et pour garder une méthode locale (aisément parallélisable), il a été proposé d'estimer la vitesse moyenne locale $\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle$ au temps $n + 1$ (et à une position \mathbf{x}) par :

$$\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_{n+1}(\mathbf{x}) = (1 - \alpha) \cdot \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n(\mathbf{x}) + \alpha \cdot \bar{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Le paramètre de mémoire constant α donne la fréquence de coupure f_c du filtre passe-bas correspondant par l'équation :

$$\alpha = 2\pi f_c \Delta t / \sqrt{3}, \quad (3)$$

où Δt est le pas de temps de la discrétisation numérique [3]. La limite de cette approche est que α , et par conséquent la fréquence de coupure, sont fixés une fois pour toute. Pour un écoulement qui peut avoir des zones laminaires (peu de fluctuations) ou turbulentes (avec des fluctuations importantes), et des transitions entre les deux, ce filtrage conduit à des retards aux transitions si le paramètre de mémoire est trop petit, ou à trop suivre les fluctuations instantanées si α est trop grand.

2 Filtre de Kalman adaptatif pour l'extraction du flot moyen

Pour remédier à ces difficultés, nous introduisons en LES une méthode pour estimer, de manière adaptative dans le temps (et l'espace), le lissage à opérer sur l'écoulement pour en extraire le flot moyen. Pour cela, nous avons d'abord discuté dans [3] comment remplacer la moyenne exponentielle de l'eq. (2) par un filtre de Kalman adaptatif. On sait (voir par exemple [4]) que dans son régime stationnaire, le filtre de Kalman appliqué à un modèle d'observation bruitée d'une moyenne locale qui

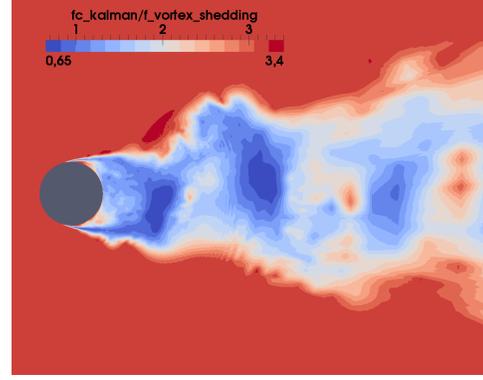


FIG. 2 – Carte instantanée de la fréquence de coupure adaptative estimée par le filtre de Kalman (normalisée par la fréquence d'émission des tourbillons).

évolue en marche aléatoire, est équivalent à un lissage exponentiel. La forme état-espace de ce modèle très simple est :

$$\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n = \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_{n-1} + \eta_n \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{u}}_n = \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n + \epsilon_n \quad (4)$$

où ces équations sont à prendre indépendamment en chaque point \mathbf{x} et où ϵ et η sont respectivement les bruits d'observation et d'évolution de la moyenne (supposés indépendants). La structure classique de filtre de Kalman se réécrit dans ce cas sous la forme du lissage exponentiel (2) avec cette fois α_n qui est le gain de Kalman et évolue dans le temps comme il suit :

$$\alpha_n = P_n / (P_n + \sigma^2(\epsilon)_n) \quad (5)$$

Ensuite l'étape de correction et de prédiction de la variance de l'erreur P s'écrit :

$$P_{n+1} = (1 - \alpha_n) \cdot P_n + \sigma^2(\eta)_n, \quad (6)$$

où P_n est la prédiction de la variance de l'erreur de la composante moyennée, et σ^2 sont les variances de ϵ et η (noter que, par rapport à l'écriture classique du filtre de Kalman, sont condensés ici l'étape de correction et celle de prédiction pour la variance de l'erreur). Dans un état stationnaire, ce filtre de Kalman conduit à un paramètre de mémoire¹ α_n égal à $\sigma(\eta)/\sigma(\epsilon)$. Supposant que l'écoulement moyen évolue en fonction des temps caractéristiques de l'écoulement, on fixe $\sigma(\eta) = 2\pi f_c \Delta t \cdot u_c / \sqrt{3}$ indépendant de l'instant, où f_c and u_c sont des références fixes en fréquence et vitesse données par les paramètres généraux de l'écoulement. L'équation d'observation a un sens un peu particulier ici : la fluctuation ϵ_n rend compte du caractère turbulent ou non de l'écoulement. En se contraignant à des estimations locales en espace et à un pas de temps, nous ne disposons que des estimateurs grossiers de la variance. Nous proposons de prendre :

$$\widehat{\sigma^2(\epsilon)}_n = \max(u_c \cdot |\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n - \bar{\mathbf{u}}_n|, 0.1 \cdot u_c^2) \quad (7)$$

comme estimateur représentatif des fluctuations turbulentes. Il est dimensionnellement correct et impose une borne minimum

¹ dans le cas physique pertinent où $\alpha_n \ll 1$

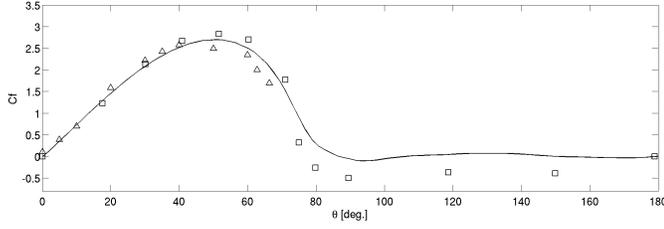


FIG. 3 – Coefficient moyen de friction autour du cylindre, fonction de l’angle (direction d’arrivée du flot à $\theta = 0^\circ$). — : LES à $Re = 4.7 \times 10^4$; \triangle : points expérimentaux à $Re = 9.1 \times 10^4$ [8]; \square : points expérimentaux à $Re = 10^5$ [9].

aux fluctuations supposées (ce qui est nécessaire pour que le filtre puisse toujours réagir). Le rapport typique entre $\sigma(\eta)$ et $\sigma(\epsilon)$ est alors de l’ordre de $2\pi f_c \Delta t / \sqrt{3}$, sauf fluctuations importantes. Cela revient à supposer un paramètre de mémoire typique qui est cohérent avec celui que l’on donnait pour la moyenne exponentielle.

Cette méthode d’extraction du flot moyen a été comparée au lissage exponentiel sur deux cas, l’écoulement dans un canal plan et l’écoulement autour d’un cylindre dans [3]. Ici, nous poursuivons l’étude dans le cas du cylindre, pour un régime turbulent sous-critique ($Re_D = 4.7 \cdot 10^4$) où l’écoulement présente des zones turbulentes et laminares, un lâcher tourbillonnaire et des couches de cisaillement instationnaires. La simulation est réalisée avec TURB’FLOW, un solveur standard de LES (plus de détails sont donnés dans [5]) sur un maillage en accord avec les pratiques usuelles en LES [6]. Les valeurs de références sont prises égales à $f_c = St \cdot U_\infty / D = 1400$ Hz (avec un nombre de Strouhal $St = 0.2$ associé au lâcher tourbillonnaire) et une vitesse de fluide en amont $u_c = U_\infty = 70$ m.s⁻¹. Le diamètre du cylindre est $D = 10$ mm et le fluide est de l’air. Il s’agit d’une configuration standard en aérodynamique.

En illustration de l’écoulement obtenu, la Fig. 1 montre la structure de vorticité resultante; on y voit une couche limite laminaire qui décolle en haut et en bas du cylindre puis transitionne pour conduire à un lâcher tourbillonnaire. La Fig. 2 est un résultat physique donné par le filtre de Kalman : elle montre l’estimation de la fréquence de coupure instantanée liée au gain de Kalman instantané α_n par l’équation (3), en chaque point. Cette information est physiquement pertinente pour l’écoulement : on y reconnaît le sillage turbulent où la fréquence de coupure est de l’ordre de la fréquence des tourbillons lâchés, et la zone hors du sillage où la fréquence de coupure est haute (environ $3 f_c$). Dans cette dernière zone, il y a très peu de turbulence et toute évolution est principalement celle du flot moyen. L’adaptation du filtre se comporte donc correctement.

En Fig. 3, on compare le profil du coefficient moyen de friction autour du cylindre à des résultats expérimentaux. L’accord est bon. On trouve en particulier que l’angle de décollement de la couche limite, où le frottement s’annule, est en moyenne à $\theta_s = 86^\circ$ dans les simulations, proche la valeur de $\theta_s \approx 83^\circ$ données dans la littérature [7] pour les nombres de Reynolds

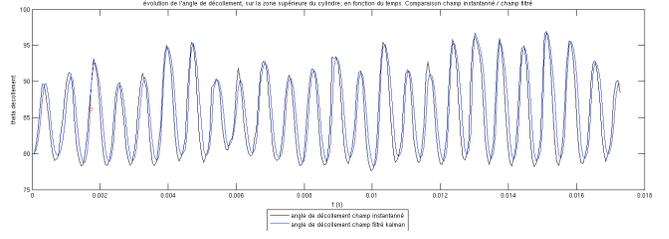


FIG. 4 – Angle de décollement de la couche limite sur le côté haut du cylindre en fonction du temps, pour le l’écoulement complet et l’écoulement moyen extrait. On note un retard de ce dernier qui est de 15% environ.

$$4.0 \times 10^4 \leq Re_D \leq 4.5 \times 10^4.$$

Bien que donnant de bons résultats, l’extraction du flot moyen avec ce filtre de Kalman ne résout cependant pas tous les problèmes du lissage exponentiel : il reste un retard à l’évolution de la moyenne extraite. En Fig. 4, est représenté l’angle de décollement instantané en haut du cylindre, en fonction du temps, pour le flot complet et pour le flot moyen extrait. Le flot moyen extrait est toujours en retard sur le flot total, en particulier à ce point mais pas seulement. Le retard ici est de 15% environ par rapport à la période du lâcher tourbillonnaire. Ceci induit une erreur sur le calcul de la viscosité sous-maille instantanée, et donc sur le champ de vitesse prédit. Avec le simple modèle de l’éq. (4), il n’est pas possible de contrôler ce retard sans changer la réponse aux fluctuations.

3 Amélioration de la réactivité du filtre de Kalman adaptatif

Nous étudions ici la possibilité de complexifier le modèle en introduisant, pour améliorer la réponse du filtre, la pente locale $\bar{\mathbf{b}}_n$ (au temps n) de l’évolution de $\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n$. L’idée est de conserver une estimation locale en temps et en espace, et de permettre au filtre de s’adapter plus vite aux zones turbulentes. Pour cela, on utilise le modèle suivant :

$$\begin{cases} \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n &= \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_{n-1} + \bar{\mathbf{b}}_{n-1} + \eta_n \\ \bar{\mathbf{b}}_n &= \bar{\mathbf{b}}_{n-1} + \zeta_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{u}}_n = \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n + \epsilon_n \quad (8)$$

La structure du filtre de Kalman pour la prédiction de ce modèle est classiquement connue. Posant $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de transition du vecteur $[\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n, \bar{\mathbf{b}}_n]^t$, et $\mathbf{H} = [1 \ 0]$ le vecteur d’observation de la moyenne, le filtre de Kalman pour ce modèle à pente locale s’écrit comme il suit (en chaque point, pour chaque composante de la vitesse) :

$$\begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_{n+1} \\ \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n \\ \bar{\mathbf{b}}_n \end{bmatrix} + \mathbf{K}_n (u_n - \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n - \bar{\mathbf{b}}_n) \quad (9)$$

avec

$$\mathbf{K}_n = \frac{\begin{bmatrix} p_n^{11} & p_n^{12} \end{bmatrix}^t}{p_n^{11} + \sigma^2(\epsilon)_n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{n+1} = (1 - \mathbf{K}_n \mathbf{H})(\mathbf{A} \mathbf{P}_n \mathbf{A}^t + \mathbf{Q}_n). \quad (10)$$

\mathbf{K}_n est le gain de Kalman, $\mathbf{P}_n = [p_n^{ij}]$ la matrice de covariance de prédiction de l'erreur ; $\sigma^2(\epsilon)_n$ est la variance des fluctuations turbulentes dont un estimateur $\widehat{\sigma^2(\epsilon)}_n$ a déjà été proposé en équation (7). La matrice de variance de l'état est $\mathbf{Q}_n = \sigma^2(\eta)[[1 \ 0]; [0 \ s_n]]$ où $\sigma^2(\eta)$ est maintenu constant comme précédemment et s_n permet de régler la réactivité de changement du niveau moyen. Il reste à proposer une estimation de s_n et donc de $\sigma^2(\zeta)$, la variance supposée de $\bar{\mathbf{b}}_n$. Le premier objectif étant d'avoir un filtre plus réactif lors des transitions instationnaires, on fait dépendre l'estimateur des fluctuations turbulentes observées, donc proportionnel à $\widehat{\sigma^2(\epsilon)}_n$. Reste à fixer une éventuelle constante dans l'estimateur \widehat{s}_n .

Pour cela, on calcule l'état stationnaire de ce filtre qui est un filtre de Holt-Winters avec pente locale, dont le double lissage exponentiel est un cas particulier :

$$\begin{cases} \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_n &= \bar{\mathbf{b}}_{n-1} + (1 - \lambda_0) \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_{n-1} + \lambda_0 \mathbf{u}_n \\ \bar{\mathbf{b}}_n &= (1 - \lambda_0 \lambda_1) \bar{\mathbf{b}}_{n-1} + \lambda_0 \lambda_1 (\mathbf{u}_n - \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_{n-1}) \end{cases} \quad (11)$$

Suivant le calcul de [4], la relation entre les coefficients (fixes) de ce filtre et les variances (variant dans le temps et s'adaptant si la situation n'est pas stationnaire) du filtre de Kalman est $\sigma^2(\zeta) = \sigma^2(\epsilon) \lambda_0^2 \lambda_1^2 / (1 - \lambda_0)$ et $\sigma^2(\eta) = \sigma^2(\epsilon) (\lambda_0^2 (1 + \lambda_1) - 2 \lambda_0 \lambda_1) / (1 - \lambda_0)$. Le régime du filtre est d'avoir des variances des états petites par rapport à celles des fluctuations. À l'ordre le plus bas il reste $\lambda_0 \approx \sigma(\eta) / \sigma(\epsilon)$ et $\lambda_1 \approx \sigma(\zeta) / (\sigma(\epsilon) \lambda_0) \approx \sqrt{s_n}$ compte tenu des estimations proposées. Pour finir de fixer λ_1 (et donc \widehat{s}_n), on rappelle que pour un double lissage exponentiel, le coefficient λ_1 vérifie $\lambda_1 \approx \lambda_0 / 4 \approx \alpha / 4$ (si petits devant 1). La deuxième règle proposée est de retrouver ce comportement en état stationnaire et cela impose plus précisément comme estimateur : $\widehat{s}_n = \alpha^2 \widehat{\sigma^2(\epsilon)}_n / (16 u_c^2)$, où α est le lissage moyen prescrit de l'éq. (3) et u_c la référence de vitesse des paramètres globaux de l'écoulement.

En Fig. 5 on montre comment se comportent alors, lors d'une transition temporelle d'écoulement laminaire à turbulent, en un point, les trois méthodes considérées d'extraction de flot moyen. L'intérêt du filtre avec pente locale est que l'écoulement moyen dans la partie laminaire (avant 0.1 s) est estimé égal à l'écoulement instantané (alors que le lissage exponentiel calibré sur f_c lisse les oscillations), tandis que lors de la transition vers la turbulence (entre 0.1 s et 0.16 s), la vitesse moyenne extraite augmente plus rapidement qu'avec filtre de Kalman du modèle de l'éq. (6). Visuellement, le modèle de l'éq. (10) semble améliorer la réactivité du filtre, sans perdre la possibilité de suivre les évolutions en régime laminaire. Pour quantifier cela, on mesure une moyenne d'ensemble sur plusieurs réalisations, montrée en Fig. 5, en bas. Le modèle sans pente est en moyenne en retard de 0.06s par rapport au comportement réel lors de la transition, le modèle avec pente est décalé de 0.01s seulement (comme le lissage exponentiel).

Intuitivement, l'accroissement de la réactivité de l'extraction du flot moyen vue en Fig. 5 vient de ce que l'estimation de la variance fait évoluer la pente par l'intermédiaire de s_n qui est prise proportionnelle à la variance des fluctuations turbulentes.

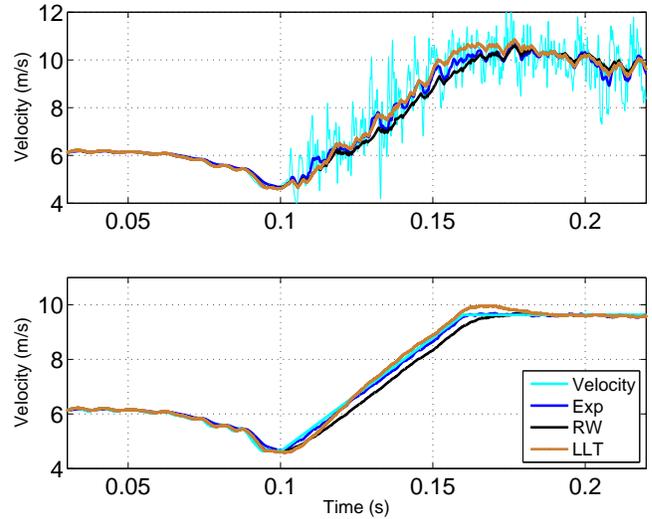


FIG. 5 – Comparaison entre vitesse (fluctuante) réelle (cyan) et vitesses moyennes extraites par lissage exponentiel (Exp, en bleu), Kalman pour marche aléatoire (RW, en noir) ou pour modèle avec pente locale (LLT, en brun). En haut : sur une réalisation. En bas : sur une moyenne de 50 réalisations. On a utilisé des données de LES dans un canal extraites de [3].

Ainsi, lors de transitions turbulentes, la pente est supposée évoluer plus vite et cette aide du filtre dans son évolution lui permet de réagir plus vite. Dans ces tests a posteriori d'extraction du flot moyen, le filtre de Kalman adaptatif à pente locale se comporte mieux que les précédentes propositions. La perspective est de l'intégrer dans le calcul LES afin de voir si il corrige effectivement le déphasage entre la vitesse et sa moyenne, et ainsi l'erreur sur l'angle de décollement sur le cylindre.

Références

- [1] M. Lesieur, O. Métais, et P. Comte. *Large-Eddy Simulations of Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [2] E. Lévêque, F. Toschi, L. Shao, et J.-P. Bertoglio. *J. Fluid Mech.* **570**, p.491, 2007.
- [3] A. Cahuzac, J. Boudet, P. Borgnat, et E. Lévêque. *Phys. Fluids* **22**, p. 125104, 2010.
- [4] A. Harvey. *Forecasting, Structural time series model and the Kalman filter*. Cambridge University Press, 1989.
- [5] J. Boudet, J. Caro, L. Shao, et E. Lévêque. *J. Therm Sci.* **16**, p. 328, 2007.
- [6] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Fluids : An Introduction (3rd ed.)* Springer-Verlag, 2006.
- [7] M. M. Zdravkovich, *Flow Around Circular Cylinders*. Oxford University Press, 2002.
- [8] S. Yokuda, B. R. Ramaprian, *Phys. Fluids A* **2**, p. 784, 1990.
- [9] E. Achenbach, *J. Fluid Mech.* **34**, p. 625, 1968.