

Formulation contrainte pour la déconvolution de bruit de Poisson

Mikael CARLAVAN, Laure BLANC-FÉRAUD

Projet ARIANA, INRIA/I3S/CNRS, 2004 route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis

Mikael.Carlavan@inria.fr, Laure.Blanc_Feraud@inria.fr

Résumé – Nous considérons le problème de la restauration d’image floue et bruitée par du bruit de Poisson. De nombreux travaux ont proposé de traiter ce problème comme la minimisation d’une énergie convexe composée d’un terme d’attache aux données et d’un terme de régularisation choisi selon l’*a priori* dont on dispose sur l’image à restaurer. Un des problèmes récurrents dans ce type d’approche est le choix du paramètre de régularisation qui contrôle le compromis entre l’attache aux données et la régularisation. Une approche est de choisir ce paramètre de régularisation en procédant à plusieurs minimisations pour plusieurs valeurs du paramètre et en ne gardant que celle qui donne une image restaurée vérifiant un certain critère (qu’il soit qualitatif ou quantitatif). Cette technique est évidemment très coûteuse lorsque les données traitées sont de grande dimension, comme c’est le cas en microscopie 3D par exemple. Nous proposons ici de formuler le problème de restauration d’image floue et bruitée par du bruit de Poisson comme un problème contraint sur l’antilog de la vraisemblance poissonnienne et proposons une estimation de la borne à partir des travaux de *Bertero et al.* sur le principe de *discrepancy* pour l’estimation du paramètre de régularisation en présence de bruit de Poisson. Nous montrons des résultats sur des images synthétiques et réelles et comparons avec l’écriture non-contrainte utilisant une approximation gaussienne du bruit de Poisson pour l’estimation du paramètre de régularisation.

Abstract – We focus here on the restoration of blurred and Poisson noisy images. Several methods solve this problem by minimizing a convex cost function composed of a data term and a regularizing term chosen from the prior that one have on the image. One of the recurrent problems of this approach is how to choose the regularizing parameter which controls the weight of the regularization term in front of the data term. One method consists in solving the minimization problem for several values of this parameter and by keeping the value which gives an image verifying a quality criterion (either qualitative or quantitative). This technique is obviously time consuming when one deal with high dimensional data such as in 3D microscopy imaging. We propose to formulate the blurred and Poisson noisy images restoration problem as a constrained problem on the antilog of the Poisson likelihood and propose an estimation of the bound from the works of *Bertero et al.* on the discrepancy principle for the estimation of the regularizing parameter for Poisson noise. We show results on synthetic and real data and we compare these results to the one obtained with the unconstrained formulation using the Gaussian approximation of the Poisson noise for the estimation of the regularizing parameter.

1 Introduction

Des problèmes de traitement d’image, en biologie ou en astrophysique par exemple, consistent à retrouver une image $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (contenant n pixels) dégradée par un flou $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et par un processus de bruit de Poisson \mathcal{P} . L’image observée $y \in \mathbb{R}^n$ peut s’écrire :

$$y = \mathcal{P}(H\bar{x} + b), \quad (1)$$

où $b \in \mathbb{R}^n$, $b \geq 0$ est un fond constant supposé connu.

Des approches régularisées ont été proposées pour résoudre ce problème et peuvent s’écrire comme la minimisation de l’antilog de la vraisemblance de Poisson auquel s’ajoute un terme de régularisation. Un paramètre de régularisation $\tau > 0$ permet de contrôler le poids de l’attache aux données par rapport à la régularisation. Formellement, ceci revient à résoudre :

$$x_\tau^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0} \left\{ \tau J_L(x, y) + J_R(x) \right\}, \quad (2)$$

où J_R est un terme d’*a priori* qui régularise le problème inverse et J_L est l’antilog de la vraisemblance de Poisson et peut

s’écrire [8] :

$$J_L(x, y) = \sum_{i \in \Omega} (Hx + b)_i - y_i + y_i \log(y_i) - y_i \log[(Hx + b)_i], \quad (3)$$

avec $\Omega = \{0, 1, \dots, n - 1\}$. De nombreux travaux ont été réalisés sur l’écriture de ce terme de régularisation et dans cet article, nous ne considérons que ceux s’écrivant comme la norme l^1 d’une transformée linéaire W :

$$J_R(x) = \|Wx\|_1. \quad (4)$$

Parmi les régularisations de ce type, celles qui sont le plus couramment utilisées sont celles basées sur la Variation Totale (TV) [5] et sur les transformées en ondelettes [6, 10].

Le paramètre de régularisation τ peut être choisi empiriquement de manière à obtenir le “meilleur” résultat visuel. Des travaux ont été réalisés afin de déterminer ce paramètre en fonction de l’estimation de la distance de l’image restaurée x_τ^* par rapport à la vraie image inconnue \bar{x} [9]. L’extension de cette méthode sur le problème de restauration (2) est difficilement implémentable en pratique. Dans [1, 2, 6], les auteurs ont proposé de mesurer la distance de l’image restaurée par rapport

à l'image observée y , dans le même esprit que le principe de *discrepancy de Morozov* [11]. L'inconvénient de ces méthodes est d'avoir à répéter le processus d'estimation pour plusieurs valeurs de τ (et donc résoudre plusieurs instances de (2)) ce qui consomme un temps de calcul considérable pour des algorithmes non-linéaires comme (2).

A l'exception de [2], ces estimateurs utilisent des approximations gaussiennes du bruit de Poisson. Dans ce travail, nous nous focalisons sur la technique utilisant l'antilog de la vraisemblance de Poisson [2] et en déduisons une borne maximale sur le terme d'attache aux données. Nous écrivons alors le problème de restauration sous la forme d'une minimisation sous contrainte. Cette approche permet de calculer en une minimisation contrainte l'image restaurée. Cette image est équivalente à la résolution du problème (2) avec le paramètre de régularisation estimé par [2], tout en évitant les optimisations successives du problème (2) pour le calcul de τ .

2 Estimation du paramètre de régularisation

Les auteurs de [2] ont proposé d'étendre le principe de *discrepancy de Morozov* [11] au bruit de Poisson en choisissant le paramètre de régularisation τ tel que :

$$J_L(x_\tau^*, y) = E(J_L(\bar{x}, y)). \quad (5)$$

Ils ont de plus montré que si $Y_\lambda \in \mathbb{R}$ est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ alors :

$$E(2F(\lambda, Y_\lambda)) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (6)$$

où :

$$F(\lambda, Y_\lambda) = \lambda - Y_\lambda + Y_\lambda \log(Y_\lambda) - Y_\lambda \log(\lambda). \quad (7)$$

Ainsi si l'image réelle $H\bar{x} + b$ dans (1) possède des intensités suffisamment élevées, alors :

$$E(2J_L(\bar{x}, y)) \simeq \text{card}(\Omega) = n. \quad (8)$$

Les auteurs de [2] ont donc proposé de choisir le paramètre de régularisation τ vérifiant :

$$J_L(x_\tau^*, y) = \frac{n}{2}. \quad (9)$$

Ce critère peut cependant être affiné en considérant les propriétés du bruit de Poisson, et en particulier du fait qu'une moyenne $(H\bar{x} + b)_i$ nulle dans (1) implique un pixel observé y_i également nul et que ces pixels peuvent donc être considérés sans bruit. Pour cette raison, nous proposons de découper le domaine Ω en plusieurs sous-domaines afin d'affiner le calcul de l'espérance dans chaque sous-domaine. Nous rappelons que le modèle d'observation s'écrit :

$$y = \mathcal{P}(\lambda), \quad \text{avec } \lambda = H\bar{x} + b. \quad (10)$$

Soient les sous-ensembles :

- $S_0 = \{i \in \Omega | y_i = 0, \lambda_i = 0\}$,
- $S_1 = \{i \in \Omega | y_i = 0, \lambda_i > 0\}$,
- $S_2 = \{i \in \Omega | y_i > 0, \lambda_i = 0\}$ (vide par définition),
- $S_3 = \{i \in \Omega | y_i > 0, \lambda_i > 0\}$.

Le sous-ensemble S_1 contient les pixels de faibles intensités, donnant une observation nulle du fait du bruit. Lorsque le fond b est nul, S_1 est situé principalement aux bords des objets étalés par la PSF H . Nous négligeons cet ensemble devant S_3 pour des images contenant de "larges" objets et considérons que $\Omega \simeq S_0 \cup S_3$. Ainsi :

$$E(2J_L(\bar{x}, y)) = E_0 + E_3, \quad (11)$$

où :

- $E_0 = \sum_{i \in S_0} E(2F((H\bar{x} + b)_i, y_i)) = 0$.
- $E_3 = \sum_{i \in S_3} E(2F((H\bar{x} + b)_i, y_i)) \simeq \text{card}(S_3) = m$,

et m est le nombre de pixels strictement positifs de l'image observée y . Nous pouvons alors réécrire le critère (9) en :

$$J_L(x_\tau^*, y) = \frac{m}{2}. \quad (12)$$

Cet estimateur nécessite cependant toujours plusieurs résolutions de (2) afin de trouver le paramètre de régularisation τ vérifiant le critère (12). En remarquant que l'estimateur (12) utilise le terme d'attache aux données du problème (2), nous proposons de réécrire (2) en contraignant l'attache aux données à une borne maximale donnée par (12). Nous détaillons cette approche dans la section suivante et montrons que ce nouveau problème contraint est équivalent au problème (2) avec le paramètre de régularisation estimé par (12).

3 Formulation contrainte proposée

Nous proposons ici d'utiliser le résultat (12) afin de contraindre l'attache aux données du problème (2) à une borne maximale soit :

$$\begin{aligned} x^* = \arg \min & J_R(x) \\ \text{sujet à} & J_L(x, y) \leq \frac{m}{2} \\ & x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Ce problème d'optimisation sous contrainte (13) est particulièrement intéressant car il est strictement équivalent au problème (2) avec un paramètre de régularisation obtenu par l'estimation numérique (12). En effet, nous pouvons montrer qu'il existe un multiplicateur de Lagrange τ^* tel que la solution x^* du problème contraint (13) vérifie (la contrainte de positivité a été ôtée pour plus de simplicité) :

$$\begin{aligned} \tau^* \partial J_L(x^*, y) + \partial J_R(x^*) & \ni 0, \\ J_L(x^*, y) - \frac{m}{2} & \leq 0, \\ \tau^* \left(J_L(x^*, y) - \frac{m}{2} \right) & = 0, \\ \tau^* & \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

où ∂J_L et ∂J_R sont respectivement les sous-différentiels de J_L et J_R . La condition $\tau^* = 0$ peut être omise étant donné que l'on

suppose la solution du problème non triviale. Les conditions d'optimalité du problème contraint (13) deviennent donc :

$$\begin{aligned}\tau^* \partial J_L(x^*, y) + \partial J_R(x^*) &\ni 0, \\ J_L(x^*, y) - \frac{m}{2} &= 0, \\ \tau^* &> 0.\end{aligned}\quad (15)$$

D'un autre coté, les conditions d'optimalité du problème (2) s'écrivent :

$$\tau \partial J_L(x_\tau^*, y) + \partial J_R(x_\tau^*) \ni 0. \quad (16)$$

Dans le cas où le paramètre de régularisation a été choisi par estimation numérique (12) (noté τ^* ci-après) alors $x_{\tau^*}^*$ vérifie (16) mais également (12) et par analogie avec les conditions d'optimalité (15) nous pouvons en déduire que les problèmes (13) et (2) (avec l'estimation du paramètre de régularisation τ par (12)) mènent à des ensembles de solutions identiques.

4 Résolution numérique

La principale difficulté pour la résolution numérique de (13) réside dans la présence de l'opérateur linéaire H pour le calcul de la projection orthogonale sur la contrainte. Cette projection peut s'écrire comme :

$$z^* = \arg \min_{z \in \mathbb{R}^n, \Upsilon(Hz + b, y) \leq \frac{m}{2}} \frac{1}{2} \|z - z^0\|_2^2, \quad (17)$$

où :

$$\Upsilon(w, y) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i - y_i + y_i \log(y_i) - y_i \log(w_i). \quad (18)$$

Nous proposons d'utiliser la technique des directions alternées pour résoudre le problème global (13) afin de contourner les difficultés liées aux opérateurs linéaires en augmentant la dimension du problème par la création de variables intermédiaires. Cet algorithme a été récemment proposé dans [7] pour résoudre la formulation (2). Nous découpons le problème (13) en créant, entre autre, une variable intermédiaire $w = Hx + b$ afin que la projection (17) se réécrite :

$$w^* = \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n, \Upsilon(w, y) \leq \frac{m}{2}} \frac{1}{2} \|w - w^0\|_2^2. \quad (19)$$

Malgré la séparation de l'opérateur linéaire H , cette projection orthogonale reste tout de même difficile à calculer et nous détaillons ci-après l'algorithme itératif que nous proposons pour la résoudre.

Remarquons dans un premier temps que si $\Upsilon(w^0, y) \leq \frac{m}{2}$ alors $w^* = w^0$. Sinon, il existe $\delta \in]0, +\infty[$ tel que :

$$w^* = \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|w - w^0\|_2^2 + \delta \Upsilon(w, y) \quad (20)$$

D'après [4], nous pouvons écrire que :

$$w^* = \frac{1}{2} \left[w^0 - \delta + \sqrt{(w^0 - \delta)^2 + 4\delta y} \right] = \Phi(\delta). \quad (21)$$

Nous devons donc trouver δ tel que $\Upsilon(\Phi(\delta), y) \leq \frac{m}{2}$. Soit :

$$f(\delta) := \Upsilon(\Phi(\delta), y) - \frac{m}{2}. \quad (22)$$

Cette fonction f est une fonction convexe décroissante en δ , nous proposons donc d'utiliser une méthode de Newton afin de trouver sa racine. L'algorithme résultant est donné en algorithme 1 où f' peut se calculer par la dérivée de composition de fonctions :

$$f'(\delta) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\delta - w_i^0 + 2y_i}{\sqrt{(w_i^0 - \delta)^2 + 4\delta y_i}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2y_i}{w_i^0 - \delta + \sqrt{(w_i^0 - \delta)^2 + 4\delta y_i}} \right). \quad (23)$$

Dans nos simulations, nous avons pu vérifier que 20 itérations suffisent à obtenir une précision machine sur la solution.

Algorithm 1: Méthode de Newton pour résoudre (19)

Données: Nombre d'itérations N ;

Un point de départ $\delta^0 = 0$;

Résultat: w^* une estimée de la solution de (19).

début

pour k de 0 à $N - 1$ **faire**

Etape 1. $\delta^{k+1} = \delta^k - \frac{f(\delta^k)}{f'(\delta^k)}$

fin

$w^* = \frac{1}{2} \left[w^0 - \delta^N + \sqrt{(w^0 - \delta^N)^2 + 4\delta^N y} \right]$

fin

Par manque de place, nous ne pouvons cependant pas inclure l'algorithme global résolvant (13) et nous renvoyons le lecteur intéressé à [3] pour l'implémentation de cet algorithme.

5 Résultats

Nous avons comparé la formulation contrainte (13), ou de façon équivalente la résolution de (2) où τ est donné par (12), à la formulation (2) où le paramètre de régularisation est choisi en utilisant l'approximation gaussienne du bruit de Poisson proposée par [1] que nous modifions également en ne prenant en compte que les pixels positifs (voir section 2). Le critère proposé par [1] devient ainsi :

$$\|(Hx_\tau^* + b - y)/\sqrt{y}\|_2^2 = m. \quad (24)$$

Les résultats sur une image synthétique 2D et réelle 3D sont donnés figures 1 et 2. La régularisation utilisée dans les deux simulations est la Variation Totale. L'opérateur H représente un flou gaussien de taille 7×7 pour l'image synthétique de la figure 1 et la PSF d'un microscope confocal, dont le modèle est décrit dans [5], pour l'image réelle de la figure 2. Globalement, on remarque que la formulation contrainte proposée (13) permet de moins lisser l'image et récupère plus facilement les détails des cellules (voir figures 1 et 2). Ceci se traduit par

une légère amélioration sur le PSNR de 0.5 dB sur l'image synthétique de la figure 1 par rapport à l'estimateur (24) utilisant l'approximation gaussienne du bruit de Poisson.

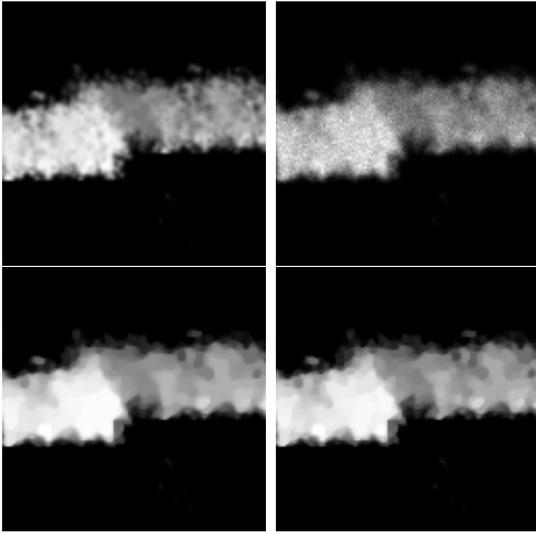


FIG. 1 – De gauche à droite et de haut en bas : image synthétique 2D, image observée floue et bruitée ($PSNR = 29.7\text{ dB}$), résultat par minimisation (2) où τ est choisi par approximation gaussienne (24) ($PSNR = 32.7\text{ dB}$) et résultat avec la formulation contrainte proposée ($PSNR = 33.2\text{ dB}$).

6 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle formulation contrainte pour la déconvolution d'image bruitée par du bruit de Poisson permettant d'estimer automatiquement le paramètre de régularisation. Nous avons proposé un algorithme pour la résolution du problème contraint et avons montré des résultats sur des images synthétiques et réelles. Les résultats sont encourageants dans le sens où cette formulation contrainte permet de s'affranchir de l'estimation numérique itérative du problème non-contraint qui est difficilement implémentable étant donné la dimension des données à traiter.

Références

[1] J.M. Bardsley et J.J. Goldes. *Regularization parameter selection methods for ill-posed poisson maximum likelihood estimation*. Inverse Problems, 25(9), 2009.

[2] M. Bertero, P. Boccacci, G. Talenti, R. Zanella et L. Zanni. *A discrepancy principle for poisson data*. Inverse Problems, 26(10), 2010.

[3] M. Carlván et L. Blanc-Féraud. *Two constrained formulations for deblurring Poisson noisy images*. IEEE International Conference on Image Processing, Bruxelles, Belgique, Sep. 2011.

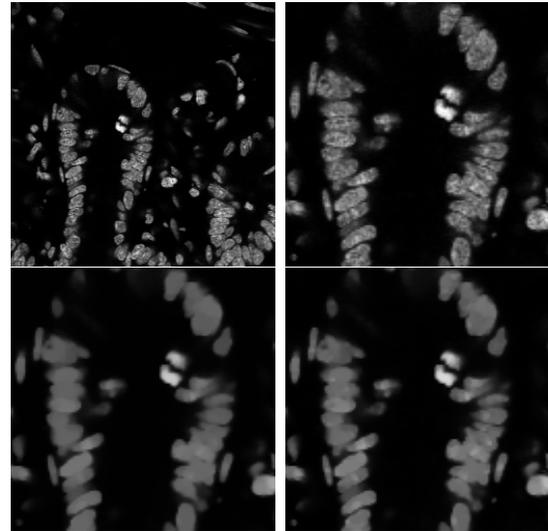


FIG. 2 – De gauche à droite et de haut en bas : coupe d'une image biologique observée 3D (échantillon d'un intestin de souris), zoom sur l'image observée, résultat par minimisation (2) où τ est choisi par approximation gaussienne (24) et résultat avec la formulation contrainte proposée

[4] P.L. Combettes et V.R. Wajs. *Signal recovery by proximal forward-backward splitting*. Multiscale Modeling & Simulation, 4(4) :1168–1200, 2005.

[5] N. Dey, L. Blanc-Féraud, C. Zimmer, Z. Kam, P. Roux, J.C. Olivo-Marin et J. Zerubia. *Richardson-lucy algorithm with total variation regularization for 3d confocal microscope deconvolution*. Microscopy Research Technique, 69 :260–266, 2006.

[6] F.-X. Dupé, J. Fadili et J.-L. Starck. *A proximal iteration for deconvolving poisson noisy images using sparse representations*. IEEE Transactions on Image Processing, 18(2) :310–321, Fév. 2009.

[7] M.A.T. Figueiredo et J.M. Bioucas-Dias. *Restoration of poissonian images using alternating direction optimization*. IEEE Transactions on Image Processing, 19(12) :3133–3145, Jan. 2010.

[8] L.B. Lucy. *An iterative technique for rectification of observed distributions*. The Astronomical Journal, 79(6) :745–765, 1974.

[9] F. Luisier, T. Blu et M. Unser. *Image denoising in mixed poisson-gaussian noise*. IEEE Transactions on Image Processing, 20(3) :696–708, Mar. 2011.

[10] N. Pustelnik, C. Chaux et J.-C. Pesquet. *Hybrid regularization for data restoration in the presence of Poisson noise*. European Signal Processing Conference, Août. 2009.

[11] O. Scherzer. *The use of Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems*. Computing, 51(1) :45–60, 1993.