

# Trajectographie par mesures de distance seules (ROTMA)

JULIEN CLAVARD<sup>1</sup>, ANNIE-CLAUDE PIGNOL<sup>2</sup>, DENIS PILLON<sup>1</sup>, CLAUDE JAUFFRET<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Thales Underwater, Systems

525 Route des Dolines, 06903 Sophia-Antipolis, France

<sup>2</sup> Université Sud Toulon-Var CNRS, IM2NP (UMR 6242)

Bâtiment X, BP 132, F-83957 La Garde Cedex, France

<sup>1</sup>[julien.clavard@fr.thalesgroup.com](mailto:julien.clavard@fr.thalesgroup.com), [denis.pillon@fr.thalesgroup.com](mailto:denis.pillon@fr.thalesgroup.com)

<sup>2</sup>[jauffret@univ-tln.fr](mailto:jauffret@univ-tln.fr), [pignol@univ-tln.fr](mailto:pignol@univ-tln.fr)

**Résumé** – Le problème de la trajectographie d'une cible en mouvement rectiligne uniforme par un observateur mobile dans le même plan et ne mesurant que la distance est abordé ici. Cette méthode de trajectographie a rarement été étudiée. Pourtant, elle est particulièrement intéressante car c'est une bonne illustration de la non équivalence entre la notion d'estimabilité (*i.e.* la matrice d'information de Fisher non-singulière) et d'observabilité (*i.e.* unicité de la solution). Les performances obtenues par simulations montrent aussi l'intérêt pratique de cette méthode de trajectographie.

**Abstract** – The Range-Only Target Motion Analysis (ROTMA) of a source with a constant velocity vector from an observer is the problem of interest in this paper. Although it has received little attention so far, this technique is particularly interesting for it provides an instructive example of the nonequivalence between the notions of estimability (*i.e.* the Fisher information matrix is invertible) and of observability (*i.e.* the uniqueness of the solution). The performance evaluated by Monte-Carlo simulations reveals the practical interest of this TMA method.

## 1 Introduction

L'un des problèmes fondamental en trajectographie passive (ou TMA: Target Motion Analysis) est celui de l'analyse de l'observabilité, notion s'appliquant aux systèmes sans bruit de mesure et sans bruit d'état. L'établissement de conditions nécessaires et suffisantes (CNS) d'observabilité en TMA a d'ailleurs fait couler beaucoup d'encre surtout dans le cas de la trajectographie passive par mesures d'angle seul (Bearings-Only TMA ou BOTMA) [6,7] ; par contre, ce problème demeure ouvert dans de très nombreux autres cas de TMA.

La difficulté provient du fait que la mise en équation d'un problème de TMA conduit le plus souvent à un système non-linéaire pour lequel les CNS d'observabilité sont difficiles à utiliser [8]. Pour pallier ces difficultés, il est assez fréquent que l'on se contente de vérifier la non-singularité de la matrice d'information de Fisher (FIM) du vecteur à estimer dans une partie ou dans tout l'espace  $IR^N$ . On parle alors d'identifiabilité, d'estimabilité [5] ou tout simplement d'observabilité locale (voir par exemple [1]).

Mais cette méthode commode n'est pas rigoureuse sur le plan mathématique. D'une part, la non singularité de la FIM n'assure que l'observabilité locale [4] c'est-à-dire dans un voisinage ouvert autour du vecteur d'état, voisinage dont on ne connaît pas la dimension. D'autre part, un système non-linéaire dont l'observabilité locale est partout vérifiée n'est pas nécessairement « complètement » observable. En pratique, cela se traduit par des situations où l'algorithme d'estimation délivre, pour un même lot de mesures sans bruit, plusieurs localisations possibles de la cible : ce sont des

solutions dites ambiguës ou indistinguables. Les trajectoires fantômes, quand elles existent, compromettent la viabilité même de la méthode de TMA.

Cette non-équivalence entre observabilité et régularité de la FIM est bien connue mais elle est souvent jugée non-critique car relative à des applications très simples et sans grand intérêt pratique. De plus, les solutions ambiguës obtenues correspondent à des cinématiques très spécifiques (dites aussi pathologiques). Jusqu'à maintenant, s'assurer uniquement de l'observabilité locale n'avait donc rien de particulièrement inquiétant pour un concepteur d'algorithmes de TMA.

L'analyse que nous présentons ici montre qu'il n'en est rien. En effet, certains scénarios de ROTMA (Range Only TMA) conduisent à l'existence de solutions ambiguës non-triviales correspondant à des cinématiques réalistes pour le type de cible d'intérêt.

Nous rappelons au §2 les notations et hypothèses de la méthode du ROTMA traitant d'une cible en mouvement rectiligne uniforme (MRU) à partir de mesures de distance obtenues par un observateur unique mobile dans le même plan.

Au §3, nous rappellerons des résultats sur l'observabilité en BOTMA, puis au §4, nous démontrerons que l'observabilité locale en ROTMA est partout assurée pour une certaine classe de trajectoires de l'observateur. Pour cela, nous montrerons que la FIM de la ROTMA est de même rang que la FIM de la BOTMA.

Pour ce type de scénario, on montre au §5 qu'il apparaît des solutions ambiguës alors que pourtant l'observabilité locale est partout vérifiée.

Au §6, les propriétés de la borne de Cramér-Rao (BCR) seront commentées. Enfin, au §7, nous présenterons des résultats de simulations permettant de conclure à l'efficacité de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

## 2 Notations et hypothèses

Considérons une cible et un observateur se déplaçant dans le plan. L'observateur mesure la distance qui le sépare de la cible. La cible est en mouvement rectiligne uniforme ; en revanche, l'observateur peut manœuvrer (voir Fig. 1). Les positions respectives de l'observateur et de la cible à l'instant  $t_k$  sont notées

$$P_O(t_k) = [x_O(t_k) \ y_O(t_k)]^T \text{ et } P_T(t_k) = [x_T(t_k) \ y_T(t_k)]^T.$$

Le mouvement de la cible est parfaitement caractérisé (ou paramétré) par le vecteur d'état  $X = [x_T(t_r) \ y_T(t_r) \ \dot{x}_T \ \dot{y}_T]^T$  où  $t_r$  est un instant de référence arbitrairement choisi et où  $[\dot{x}_T \ \dot{y}_T]^T$  est le vecteur vitesse de la cible.

La distance à l'instant  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  est donnée par

$$\rho_k(X) = \sqrt{[x_T(t_k) - x_O(t_k)]^2 + [y_T(t_k) - y_O(t_k)]^2}$$

On en déduit l'équation de mesure au même instant

$$\rho_{m,k} = \rho_k(X) + \varepsilon_k$$

où  $\varepsilon_k$  est le bruit de mesure (de la distance) supposé gaussien, centré et de variance connue  $\sigma_{\rho,k}^2$ . Nous aurons aussi besoin d'introduire  $\theta_k$  l'azimut sans bruit à la date  $t_k$ . Dans la suite, nous allons utiliser une cinématique particulière de l'observateur : sa trajectoire sera composée de deux segments (ou legs) parcourus chacun à vitesse constante. On note  $V_1$  et  $V_2$  les vecteurs vitesse de l'observateur sur le leg 1 et sur le leg 2.

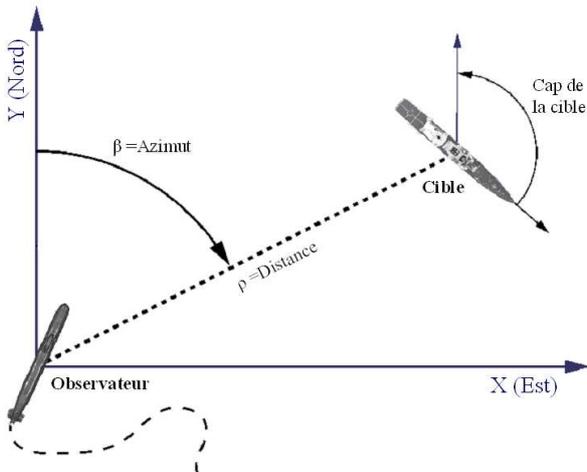


Figure 1: Scénario typique de TMA.

## 3 Rappel de l'observabilité en BOTMA

Sans perte de généralité, on supposera que  $t_k = (k-1)\Delta t$ ,  $k = 1, \dots, N$ , avec  $\Delta t = 1$ . Dans les

calculs suivants, l'instant de référence est l'instant initial :  $t_r = t_1 = 0$ .

La matrice d'information de Fisher (ou FIM) relative à  $X$ , pour la BOTMA [2, 9], s'exprime sous la forme

$$F_{BOTMA} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_{\theta,k}^2 \rho_k^2(X)} \Phi_k V_k V_k^T \Phi_k^T \quad \text{avec}$$

$$\Phi_k^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } V_k = [\cos \theta_k \ -\sin \theta_k \ 0 \ 0]^T \text{ et}$$

$\sigma_{\theta,k}^2$ , la variance du bruit de mesure des azimuts.

## 4 Analyse de l'observabilité locale en ROTMA

Pour la ROTMA, la FIM s'écrit sous une forme similaire :

$$F_{ROTMA} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_{\rho,k}^2} \Phi_k W_k W_k^T \Phi_k^T \quad \text{avec}$$

$$W_k = [\sin \theta_k \ \cos \theta_k \ 0 \ 0]^T.$$

Nous allons prouver que  $F_{BOTMA}$  et  $F_{ROTMA}$  sont de même rang. Pour cela, introduisons deux

matrices auxiliaires :  $F_B = \sum_{k=1}^N \Phi_k V_k V_k^T \Phi_k^T$  et

$$F_R = \sum_{k=1}^N \Phi_k W_k W_k^T \Phi_k^T.$$

Il est clair que  $\text{Rang}(F_{BOTMA}) = \text{Rang}(F_B)$  et que

$$\text{Rang}(F_{ROTMA}) = \text{Rang}(F_R).$$

$$\text{Or, } F_B = \Pi F_R \Pi^T, \text{ avec } \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque  $\det(\Pi) = 1$ ,  $F_{ROTMA}$  et  $F_{BOTMA}$  sont de même rang : si l'une est inversible, l'autre aussi. On en déduit que la manœuvre de l'observateur est nécessaire (mais non suffisante) en ROTMA pour rendre le système observable. Notons que ce résultat est plus précis que celui obtenu dans [1] par une autre approche.

## 5 Observabilité globale en ROTMA

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où l'observateur se déplace selon une trajectoire à deux legs. Dans [5], il est montré pour ce type de scénario que le système est observable sauf si l'azimut est constant. C'est ce cas très général que nous allons considérer désormais.

Au §III de [5], on montre que  $F_{BOTMA}$  est proportionnelle au grammien d'observabilité pour ce problème. La matrice  $F_{BOTMA}$  est donc inversible

partout (quel que soit X). D'après ce qui précède (§4), la matrice  $F_{ROTMA}$  l'est aussi. L'observabilité locale de la ROTMA est donc prouvée partout dans  $IR^4$ . Cependant, suivant [4], rien ne nous assure que l'observabilité globale est acquise.

En effet, une étude analytique a permis de prouver l'existence de deux solutions distinctes pour ce type de scénario. Dans le repère relatif lié à l'observateur, la trajectoire de la cible fantôme est la symétrique de la trajectoire de la cible réelle par rapport à la droite engendrée par le vecteur  $V_1 - V_2$  :

$$P_F(t) = S_{V_1 - V_2} [P_T(t) - P_O(t)] + P_O(t),$$

écriture dans laquelle  $P_F(t)$  est le vecteur-position de la cible fantôme et  $S_{V_1 - V_2}$  la matrice de la symétrie à l'instant  $t$ . Les figures 2a et 2b présentent de tels exemples d'ambiguïté. Sur ces figures, la position initiale de chaque mobile est désignée par un cercle. La cible réelle étant indiquée par la lettre T (trajectoire bleue) et la cible fantôme par F (trajectoire verte). Ces deux exemples illustrent la difficulté de gérer la présence systématique de deux solutions réalistes qui génèrent des distances identiques.

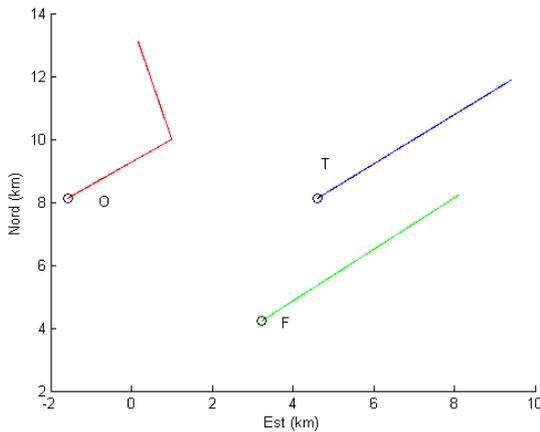


Figure 2a : 1<sup>er</sup> exemple d'ambiguïté.

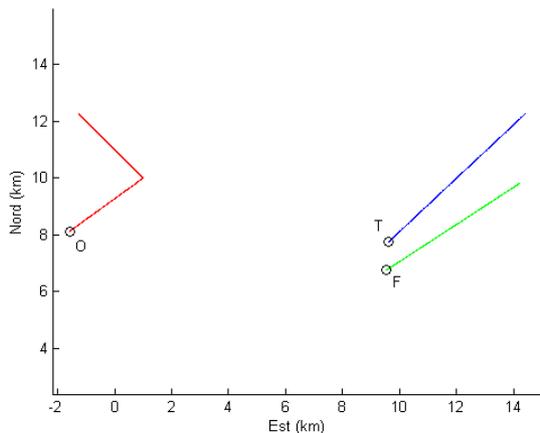


Figure 2b : 2<sup>ème</sup> exemple d'ambiguïté.

## 6 Borne de Cramér-Rao

La BCR étant l'inverse de la FIM pour les estimateurs sans biais, nous pouvons faire une première remarque :

$\Phi_k W_k$  (défini au §3) est orthogonal au vecteur  $\Phi_k V_k$  (défini au §4). Cela a pour conséquence que l'orientation des ellipses de confiance calculées à partir de la BCR (donc de la FIM) sont perpendiculaires. En pratique, le grand axe de l'ellipse de confiance en ROTMA est perpendiculaire à la ligne de visée, contrairement à ce qui se passe en BOTMA.

La figure 3 illustre ce fait pour le scénario suivant :

- L'observateur démarre sa trajectoire à l'origine du repère et se déplace à une vitesse de 3 m/s. Il suit un cap de  $90^\circ$  jusqu'à l'instant de manœuvre  $t_M$  (= 20 minutes) puis un cap de  $240^\circ$  pendant 10 minutes. Le scénario dure donc 30 minutes.
- La cible réelle démarre sa course au point [0 km , 20 km ]. Sa vitesse et son cap sont respectivement de 4 m/s et  $90^\circ$ .
- Les mesures (azimuts ou distances) sont acquises toutes les 4 secondes ( $\Delta t$ ). L'écart-type de mesures de distance est  $\sigma_{\rho,k} = 200$  mètres et celui des azimuts est  $\sigma_{\theta,k} = 1^\circ$  pour la BOTMA.

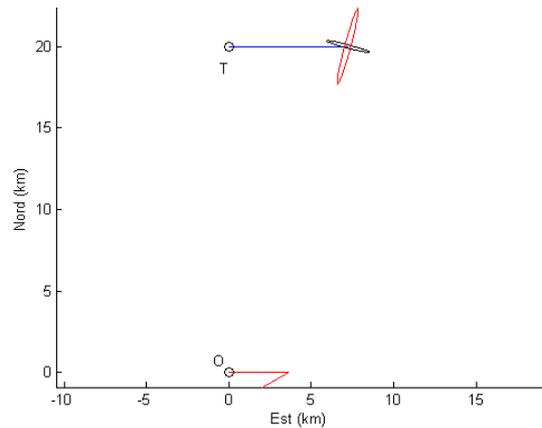


Figure 3 : Ellipses de ROTMA (noire) et de BOTMA (rouge).

Une seconde remarque est que la distance n'intervient pas explicitement dans l'expression de la BCR en ROTMA, contrairement à la BOTMA. En conséquence, la précision en distance est quasiment invariante avec la distance. C'est ce qu'illustre la figure 4, obtenue pour les conditions suivantes : même type de scénario que celui de la figure 3, ordonnée de la cible variant de 5 km à 23 km.

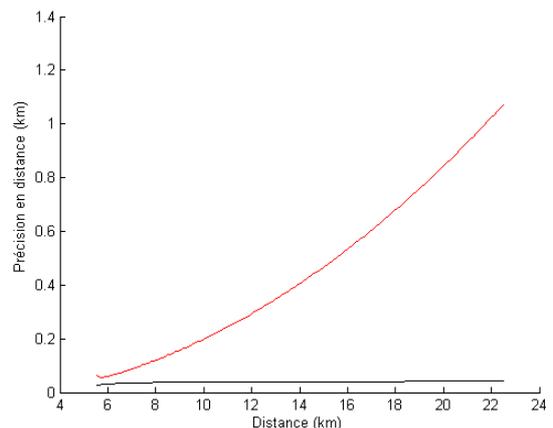


Figure 4 : ROTMA (noire), BOTMA (rouge).

## 7 Estimateur du maximum de vraisemblance

Dans ce paragraphe, nous prendrons comme instant de référence  $t_r = t_N$  (date de la dernière mesure). L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) est l'argument minimal du critère suivant :

$$C(X) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_{\rho,k}^2} [\rho_{m,k} - \rho_k(X)]^2$$

La méthode classique de Gauss-Newton a été utilisée [3] pour minimiser le critère. Nous allons présenter des résultats de simulation de Monté-Carlo sur le scénario suivant :

- L'observateur démarre sa course à l'origine du repère et se déplace à une vitesse de 3 m/s. Il suit un cap de  $110^\circ$  pendant 20 minutes puis un cap de  $240^\circ$  pendant les 10 minutes restantes.
- La cible réelle démarre sa course au point [-2 km, 15 km] pour suivre un MRU à une vitesse de 4 m/s et un cap de  $190^\circ$ .
- $N = 450$  mesures avec une période d'échantillonnage  $\Delta t = 4$  secondes. Notons que l'instant de manœuvre  $t_M$  est égal à 1200 secondes. L'écart type de mesure  $\sigma_{\rho,k}$  est fixé à 200 mètres.

1000 tirages ont été réalisés. L'algorithme converge en moyenne en 8 itérations. A la distance finale (11,24 km), l'erreur relative théorique  $\frac{\sigma_{BCR}(\rho_N)}{\rho_N}$  est 0.28% alors que l'erreur relative empirique  $\frac{\hat{\sigma}(\rho_N)}{\rho_N}$  est 0.34%. La table 1 résume les performances de l'estimateur. Sur la figure 5, sont tracés les trajectoires de la cible réelle et de la cible « fantôme » et les estimés de leurs positions respectives finales.

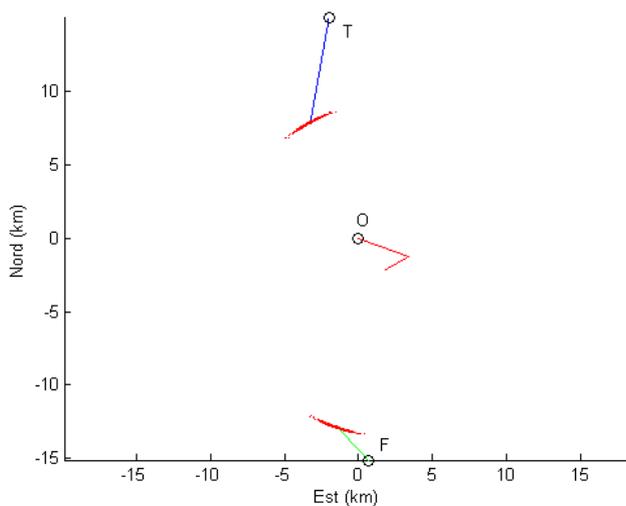


Figure 5 : Résultats d'estimation pour 1000 tirages (les points rouges sont les positions estimées).

Table 1 : Performances de l'EMV.

X	Unités	$X_{Vrai}$	$\hat{X}_{moyen}$	Biais	$\sigma_{CRLB}$	$\hat{\sigma}$
$x_T(t_N)$	km	-3.25	-3.28	0.03	0.49	0.48
$y_T(t_N)$	km	7.91	7.88	0.03	0.27	0.27
$\dot{x}_T$	m/s	-0.70	-0.69	0.01	0.24	0.24
$\dot{y}_T$	m/s	-3.94	-3.95	0.01	0.15	0.15

## 8 Conclusion

La matrice d'information de Fisher, outil fondamental de la statistique mathématique, doit donc être utilisée avec beaucoup de précaution pour l'analyse de l'observabilité, notion déterministe.

Le cas de la trajectographie par mesures de distance seule illustre clairement les limites intrinsèques d'un usage illicite de cette matrice.

Nous présenterons dans des travaux à venir des cas de trajectographie où, à l'inverse, la matrice de Fisher est singulière alors que le système est observable.

[1] Song, T.L., "Observability of Target Tracking with Range-Only Measurements", *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 24, No. 3 (July 1999), pp. 383-387.

[2] Nardone, S.C., Lindgren, A.G., et Gong, K.F., "Fundamental Properties and Performance of Conventional Bearings-Only Target Motion Analysis", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-29, N° 9 (Sept. 1984), pp. 775-787.

[3] Dennis, J.E., "A User's Guide to Nonlinear Optimization Algorithms", *Proceedings of IEEE*, Vol. 72, N° 12 (Dec. 1984), pp. 1765-1776.

[4] Jauffret, C., "Observability and Fisher Information Matrix in Nonlinear Regression", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-43, N° 2 (Apr. 2007), pp. 756-759.

[5] Le Cadre, J.P. et Jauffret, C., "Discrete-Time Observability and Estimability Analysis for Bearings-Only Target Motion Analysis", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-33, N° 1, (Jan. 1997), pp. 178-201.

[6] Nardone, S.C. and Aidala, V.J., "Observability Criteria for Bearings-Only Target Motion Analysis", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-17, N° 2 (Mar. 1981), pp 162-166.

[7] Pillon, D. et Jauffret, C., "Nouveaux résultats concernant l'observabilité en trajectographie par mesure d'angles", *13<sup>ème</sup> Colloque Groupe de Recherche et d'Etude de Traitement du Signal et des Images, Juan-les-Pins(FR)*, 16-20 (Sept. 1991), pp 281-284.

[8] Hermann, R. and Krener, A.J., "Non-linear controllability and observability", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22, N°5 (Oct. 1997), pp 728-740.

[9] Pillon, D. et Jauffret, C., "Trajectographie passive par mesure d'angle", *Technique de l'Ingénieur, Traitement du signal, TE 6 705*, 2005.