

Une nouvelle méthode de diffusion géométrique sur graphe pour la segmentation d’images et la classification de données de grandes dimensions

Xavier DESQUESNES, Abderrahim ELMOATAZ, Olivier LÉZORAY,

Université de Caen Basse Normandie - Laboratoire GREYC - Equipe Image - UMR CNRS 6972
6 Boulevard Marechal Juin, 14050 Caen, France

{xavier.desquesnes, abderrahim.elmoataz-billah, olivier.lezoray}@unicaen.fr

Résumé – Dans cet article, nous proposons une nouvelle adaptation, ainsi qu’une nouvelle méthode de résolution, de l’équation Eikonale sur des graphes pondérés, permettant l’introduction d’une nouvelle méthode de diffusion de labels sur des graphes de topologie arbitraire. Des résultats expérimentaux sont également proposés en segmentation d’image et classification de données réelles.

Abstract – In this paper, we propose a new adaptation of the Eikonal equation on weighted graphs, and a new method of resolution of such an equation which enables the introduction of a new method for label diffusion on graphs of arbitrary topology. Experimental results in image and data processing are also provided.

1 Introduction

De plus en plus d’applications impliquent la manipulation d’images ou de données définies sur des domaines complexes ou de grandes dimensions, comme les données collectées sous forme de graphes, de réseaux ou de données discrètes. L’analyse de ces différentes données, pour en extraire de l’information, est un défi majeur pour les communautés de traitement d’images et de données. Il y’a donc un grand intérêt à transcrire des méthodes de traitement initialement conçues pour les images sur des graphes, notamment des méthodes basées sur les EDPs [2].

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode de diffusion de labels, basée sur une adaptation de l’équation Eikonale sur graphes, ce qui permet d’élargir le champ d’application d’une telle méthode des images aux graphes de topologie arbitraires, et ainsi traiter tout type de données pouvant être représentées par des graphes (dont les images). L’équation Eikonale connaît déjà une certaine popularité dans le domaine du traitement d’images et de nombreux schémas de résolution ont d’ailleurs déjà été développés pour la résoudre sur des domaines Euclidiens, ou des cas particuliers de domaines non-cartésiens. À notre connaissance, une seule approche [4], basée sur des équations aux différences partielles sur graphes et un algorithme itératif, propose de résoudre une version non-stationnaire de cette équation sur des graphes de topologie arbitraire. Cet algorithme est coûteux en nombre d’itérations et ne permet pas de propager de manière efficace des labels sur le domaine considéré. De plus, dans le cas de multiples labels, une résolution sur l’ensemble du domaine est nécessaire pour chaque label.

Contributions Dans cet article, nous proposons une nouvelle adaptation, ainsi qu’une nouvelle méthode de résolution de l’équation Eikonale sur graphes pondérés, basée sur sa version stationnaire et un algorithme rapide adapté du Fast Marching [3]. Considérant un graphe $G(V, E, w)$, cette équation s’écrit

$$\begin{cases} \|(\nabla_w^- f)(u)\|_p = P(u) & u \in V \\ f(u) = 0 & u \in V_0. \end{cases}$$

Cette nouvelle formulation de l’équation Eikonale sur graphe permet également l’introduction d’une nouvelle méthode de diffusion de labels sur des graphes de topologie arbitraire, que nous présentons dans cet article, avec des applications en segmentation d’images et classification de données réelles.

2 Rappels sur les graphes

Nous considérons que tout ensemble discret peut-être représenté par un graphe pondéré $G = (V, E, w)$, composé de deux ensembles finis : $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ un ensemble de n sommets et $E \subset V \times V$ un ensemble d’arêtes pondérées. Une arête $(u, v) \in E$ connecte deux sommets adjacents u et v . Le poids w_{uv} d’une arête est défini par une fonction $w : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ si $(u, v) \in E$, et $w_{uv} = 0$ sinon. On note $N(u)$, l’ensemble des nœuds adjacents à u . Dans cet article, les graphes sont supposés simples, complets et non-orientés.

Gradients morphologiques sur graphes Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques opérateurs sur les graphes précédemment définis dans [2, 5]. Soient $G = (V, E, w)$ un graphe et

$f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur ses sommets. Les gradients morphologiques *externes* et *internes* sur graphe sont définis par :

$$(\nabla_w^\pm f)(u) = (\sqrt{w_{uv}} |Df(u)|^\pm)^p_{v \in N(u)}$$

où $Df(u) = f(v) - f(u)$, $(x)^+ = \max(x, 0)$ et $(x)^- = -\min(x, 0)$. Les normes associées à ces gradients sont alors données pour les normes \mathcal{L}_p , $p \in \{1, 2\}$, respectivement \mathcal{L}_∞ , par

$$\begin{aligned} \|(\nabla_w^\pm f)(u)\|_p &= \left[\sum_{v \sim u} w_{uv}^{p/2} |(Df(u))^\pm|^p \right]^{1/p} \\ \|(\nabla_w^\pm f)(u)\|_\infty &= \max_{v \sim u} (\sqrt{w_{uv}} |(Df(u))^\pm|), \end{aligned} \quad (1)$$

avec l'égalité suivante :

$$\|(\nabla_w f)(u)\|_p^p = \|(\nabla_w^+ f)(u)\|_p^p + \|(\nabla_w^- f)(u)\|_p^p \quad (2)$$

Construction des graphes Il existe de nombreuses méthodes pour transformer un ensemble discret de données en un graphe pondéré, où le voisinage reflète les interactions entre les différents éléments par le biais d'une mesure de distance $\mu : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$. Dans le cas général, on peut citer :

- Les ε -graphes où deux éléments u et v sont connectés si $\mu(u, v) \leq \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$.
- Les graphes des k plus proches voisins (k -ppv) où chaque nœud u est connecté à ses k plus proches voisins.

Dans le cas de données structurées, on peut citer les graphes de régions adjacentes (RAG). Un RAG peut être construit à partir de n'importe quelle structure de données représentée par un graphe, où une région R_i est définie comme un ensemble connexe de nœuds avec $\bigcup R_i = V$ et $\bigcap R_i = \emptyset$. Deux régions R_i et R_j sont connectées si $\exists v_i \in R_i$ et $v_j \in R_j | v_i \sim v_j$. Un RAG peut facilement être augmenté d'un k ppv afin de permettre l'ajout d'arêtes supplémentaires entre des régions non-adjacentes. Finalement, quelle que soit la construction du graphe, la pondération des arêtes est effectuée à partir d'une fonction de similarité telle que

$$\begin{aligned} g_0(u, v) &= 1, \text{ ou} \\ g_1(u, v) &= (\mu(F_u, F_v) + \varepsilon)^{-1} \text{ avec } \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0, \text{ ou} \\ g_2(u, v) &= \exp(-\mu(F_u, F_v)/\sigma^2) \text{ avec } \sigma > 0, \end{aligned}$$

où $F_u, u \in V$ est un vecteur caractéristique associé au nœud u .

3 Formulation et Algorithmes

Dans cette section, nous présentons notre adaptation de l'équation Eikonale sur graphes sous la forme d'une nouvelle équation aux dérivées partielles (4). Les solutions explicites pour $p \in \{1, 2, \infty\}$ sont proposées, ainsi qu'un algorithme efficace de résolution basé sur le Fast Marching [3] et pouvant être adapté pour de la diffusion de labels sur graphe.

Transposition de l'équation Eikonale sur graphe L'équation Eikonale est donnée par $\|\nabla f(x)\| = P(x)$, où $f(x)$ est la distance en x à une source Γ et P une fonction de potentiel. Cette équation peut-être reliée par un simple changement de variable ($\phi(x, t) = t - f(x)$) à la formulation par *level-set* de l'équation d'évolution d'un front Γ telle qu'introduite par Sethian [3]. Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \mathcal{F}(x) \|\nabla \phi(x, t)\|, \quad (3)$$

où ϕ est la représentation par *level-set* de Γ et $\mathcal{F} = 1/P$. La transposition sur graphe pondéré de (3) est donnée par

$$\frac{\partial \phi(u, t)}{\partial t} = \mathcal{F}(u) \|\nabla \phi(u, t)\|_p,$$

et en ne retenant que le cas où $\mathcal{F} \geq 0$, et avec le changement de variable $\phi(u, t) = t - f(u)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, t)}{\partial t} &= \mathcal{F}(u) \|(\nabla_w^+(t - f))(u)\|_p \\ &= \mathcal{F}(u) \|(\nabla_w^- f)(u)\|_p = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, avec $P = 1/\mathcal{F}$, on obtient une adaptation discrète de l'équation Eikonale sur graphe pondéré, décrivant un processus d'érosion morphologique :

$$\|(\nabla_w^- f)(u)\|_p = P(u). \quad (4)$$

Schémas numériques et algorithmes Avec quelques changements de variables, et dans le cas où $p \in \{1, 2\}$, l'équation (4) peut facilement être réécrite comme

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x - a_i)^+}{h_i} \right)^p = \mathcal{C}^p, \quad (5)$$

où $x = f(u)$, $h_i = \sqrt{1/w_{uv}}$, $n = \text{card}(N(u))$, $\mathcal{C} = P(u)$, $a = \{f(v_i) | v_i \in N(u) \text{ avec } i = 1, \dots, n\}$. Cette équation est indépendante de la topologie du graphe, et sa solution locale \bar{x} (i.e. la solution en un nœud u , sachant les autres nœuds fixés) peut-être obtenue par un algorithme itératif utilisant une liste triées des voisins de x . Cet algorithme utilise une solution temporaire \hat{x}_m calculée à chaque itération m et donnée par

$$\hat{x}_m = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{a_i}{h_i} + \mathcal{C}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{h_i}}$$

dans le cas où $p = 1$. La solution pour $p = 2$ peut-être obtenue de manière similaire. Finalement, la solution unique est obtenue lorsque $\hat{x}_m \leq a_{m+i}$ et on a $\bar{x} = \hat{x}_m$. Dans le cas où $p = \infty$, l'équation (4) peut-être réécrite comme $x = \min_{j=1}^n (a_j + h_j \mathcal{C})$ dont la résolution est triviale. On remarque que cette équation est équivalente à un algorithme de Dijkstra.

La solution globale (sur l'ensemble du graphe) est calculée à partir d'une adaptation de l'algorithme Fast Marching, utilisant

une mince bande de nœuds à mettre à jour notée NB et une liste de nœuds déjà calculés notée A . L'ensemble des nœuds n'appartenant à aucun de ces ensembles est noté FA . L'algorithme est initialisé comme suit : les nœuds correspondant à la position initiale du ou des fronts (les germes) sont ajoutés à A , puis les nœuds appartenant à la frontière extérieure de A sont ajoutés à NB , enfin les nœuds restant composent FA . La modification de l'algorithme initial pour l'étendre à de la diffusion de labels tient au fait qu'avec une multitude de fronts se propageant simultanément, la distance calculée en un nœud u est en fait la distance au germe le plus proche de u (au sens de la topologie du graphe, de la fonction de poids w et du potentiel P). Le front arrivant en u est donc nécessairement issu du germe le plus proche de u , et il devient facile d'associer à u le bon label en étudiant les labels des voisins de u (au moins un ayant déjà été marqué par le passage du front). Ainsi, la fonction associant un label à un nœud u lorsqu'un front atteint u est donnée par :

$$L(u) = L(v) | v \in N(u) \text{ et } \frac{f(v)}{w_{uv}} = \min_{z \sim u} \left(\frac{f(z)}{w_{uz}} \right). \quad (6)$$

Les lecteurs intéressés par l'algorithme complet du Fast Marching et les preuves qu'il construit une solution correcte trouveront plus de détails dans [3]. Contrairement aux autres approches, on remarque que la complexité d'une telle méthode est indépendante du nombre de labels (puisque'ils sont diffusés simultanément via une unique carte de distance). La complexité de la méthode quel que soit le nombre de labels à diffuser est en $O(n \log(n))$.

4 Résultats

Dans cette section, nous présentons quelques résultats expérimentaux afin d'illustrer le comportement de notre algorithme de diffusion de labels sur graphe, pour le traitement d'images ou de données réelles. Pour l'ensemble des exemples, seul le cas $p = 2$ est considéré et la fonction de potentiel est constante et définie par $P(u) = 1$.

Segmentation semi-supervisée d'image Un des avantages de l'utilisation de graphes est qu'elle permet plusieurs représentations de l'image en fonction du problème posé. Le premier exemple, illustré à la Figure 1, présente une comparaison entre des résultats de segmentation obtenus via une configuration locale et non-locale du graphe. Dans le cas non-local, chaque pixel est connecté aux pixels situés dans une fenêtre 11×11 centrée sur le pixel, et caractérisé par un patch de dimension 3×3 . Une telle construction permet de mieux caractériser la texture (via les patches) et donne un meilleur résultat de segmentation qu'avec une classique 4-adjacence. Le deuxième exemple, illustré à la Figure 2, présente la segmentation d'une image à partir de sa représentation sous forme d'un RAG augmenté d'un k -ppv. La carte de régions à l'origine de ce RAG est obtenue via un ensemble de germes répartis régulièrement sur l'image et diffusés sur le graphe de

4-adjacence de l'image. Puis, le RAG est augmenté d'un 2-ppv, en connectant chaque régions à ses 10 régions les plus similaires de l'image (d'après un critère de couleur moyenne). Enfin, la segmentation de l'image en objets d'intérêts est effectuée sur ce RAG via 3 germes distincts. L'utilisation d'un RAG permet de réduire fortement le nombre de nœuds du graphe. De plus l'ajout d'arêtes supplémentaires autorise la diffusion des labels entre des régions non adjacentes et permet de segmenter sous un même label des objets discontinus. Les lecteurs intéressés par une comparaison avec d'autres méthodes de segmentation d'image utilisant des graphes peuvent consulter [1] et les références connexes.

Classification de données réelles La Figure 3 présente une autre application de la méthode de diffusion de labels sur graphe, dans le domaine de la classification de données non ordonnées et caractérisées dans des espaces de grandes dimensions. Dans les deux exemples proposés, les vecteurs caractéristiques appartiennent respectivement à \mathbb{R}^2 (surface et convexité des cellules) et $\mathbb{R}^{28 \times 28}$ (l'ensemble des pixels des imagerie de chiffres manuscrits). Les deux graphes sont des 5-ppv.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons défini une nouvelle méthode de résolution de l'équation Eikonale sur des graphes de topologies arbitraires, afin de proposer une méthode rapide de diffusion de labels sur ces mêmes graphes. Les résultats obtenus lors des expérimentations décrivent un comportement et une efficacité prometteurs pour toute une gamme de problèmes sur des données de grandes dimensions, allant de la segmentation d'images à la classification de données.

Références

- [1] COUPRIE, C., GRADY, L., NAJMAN, L., AND TALBOT, H. Power watersheds : A new image segmentation framework extending graph cuts, random walker and optimal spanning forest. In *Proc. of ICCV* (Sept. 2009), pp. 731–738.
- [2] ELMOATAZ, A., LÉZORAY, O., AND BOUGLEUX, S. Nonlocal discrete regularization on weighted graphs : a framework for image and manifold processing. *IEEE Transactions on Image Processing* 17, 7 (2008), 1047–1060.
- [3] SETHIAN, J. A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press, 1999.
- [4] TA, V.-T., ELMOATAZ, A., AND LÉZORAY, O. Adaptation of eikonal equation over weighted graph. In *Proc. of SSMV* (2009), vol. 5567, pp. 187–199.
- [5] TA, V.-T., ELMOATAZ, A., AND LÉZORAY, O. Nonlocal pdes-based morphology on weighted graphs for image and data processing. *IEEE Transactions on Image Processing* 20, 6 (2011), 1504–1516.

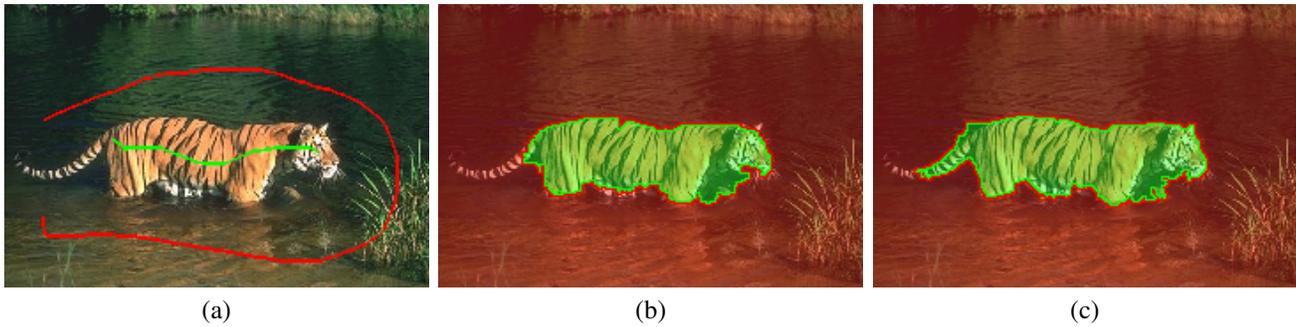


FIGURE 1 – Segmentation d’image texturée en utilisant l’information locale (b) ou non-locale (c). Les germes sont respectivement les traits rouges et verts (a). Dans le cas non-local, chaque pixel est caractérisé par un vecteur de \mathbb{R}^{27} et le voisinage est pris dans une fenêtre (11×11) centrée sur le pixel.

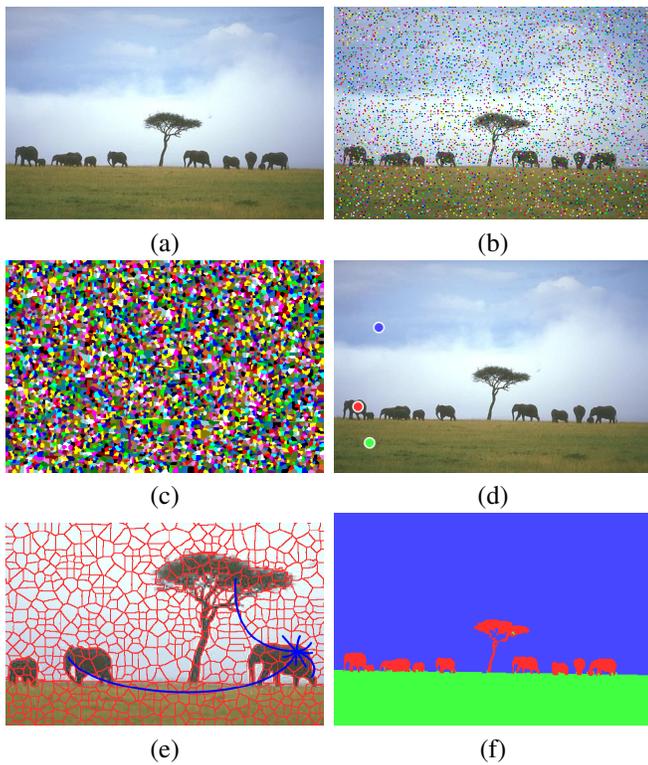


FIGURE 2 – Segmentation d’une image en deux étapes. Une première décomposition permet d’obtenir un RAG sur lequel est effectuée la segmentation. (a) L’image initiale. (b) Les graines pour la décomposition. (c) La carte de régions issue de la décomposition. (d) Les graines pour la segmentation. (e) Illustration du graphe de régions pour un nœud. (f) La segmentation finale.

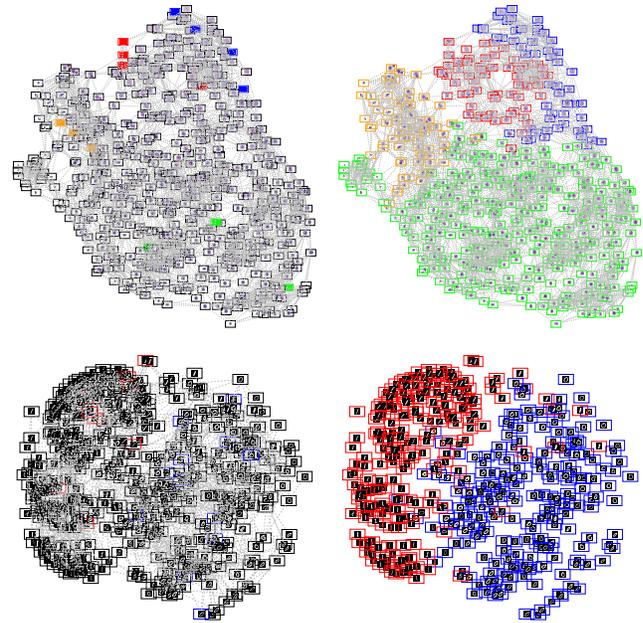


FIGURE 3 – Classification de données réelles non organisées (respectivement des noyaux cellulaires et des chiffres manuscrits). Pour chaque graphe, les germes initiaux et la classification obtenue sont présentés. Dans les deux exemples proposés, les taux de classification sont $> 90\%$.