

Modèles sous-jacents à certaines techniques d'interpolation géodésique dans l'espace des matrices de cohérence en optique de polarisation

V. DEVLAMINCK

LAGIS – FRE CNRS 3303

Université Lille 1, Sciences et Technologies – 59655 France

e.mail : vincent.devlaminck@univ-lille1.fr

Résumé - Nous montrons au travers de l'exemple particulier des matrices de cohérence optique, qu'il est possible de mettre en évidence des modèles physiques sous-jacents à différentes solutions d'interpolation de ces matrices au moyen de courbes géodésiques. Le choix de la méthode d'interpolation dépend donc de connaissances a priori que l'on a sur les données à traiter. Nous développons cette idée en conclusion à partir de la notion de matrices de covariance globale.

Abstract - The question of physical significance of coherency matrix interpolation is addressed. We draw a comparison between three interpolation processes (based on Euclidean metrics, Log-Euclidean metrics or Affine Invariant metrics). All the associated interpolation procedures are depicted with their underlying physical model. We shown that the choice between both these interpolation processes may depend on what the a priori knowledge is considered. This idea is developed from the global covariance matrix approach.

Introduction

En optique de polarisation, les matrices de Mueller sont des outils qui permettent de caractériser les interactions linéaires de la lumière avec la matière. Elles déterminent ainsi la relation entre les vecteurs de Stokes d'entrée et de sortie de la lumière qui interagit avec la matière. La mesure de cette matrice pour chaque pixels d'une image est appelée *imagerie de Mueller* et ce type d'imagerie trouve des applications dans des domaines comme la caractérisation d'objets biologiques [1], d'objets manufacturés [2][3] ou en médecine [4][5] par exemple.

La possibilité d'obtenir une information polarimétrique spatialement répartie, permet d'utiliser des techniques de traitement d'image sur ce type de données. Il se pose toutefois alors la question de comprendre le modèle physique sous-jacent aux outils de traitement appliqués aux matrices de Mueller. Bien qu'une matrice de Mueller $\mathbf{M}=(m_{ij})$ ne présente pas de propriété de symétrie particulière, il est bien connu [6] [7] que l'on peut lui faire correspondre une matrice \mathbf{H} hermitienne semi définie positive de taille 4 (appelée *matrice de cohérence*), telle que :

$$\mathbf{H} = \sum_{ij} m_{ij} (\boldsymbol{\sigma}_i \otimes \boldsymbol{\sigma}_j^*) = \text{Per}(\Lambda \mathbf{M} \Lambda^\dagger) \quad (1)$$

m_{ij} correspond alors au coefficient (réel) de la décomposition de \mathbf{H} sur la base des matrices complexes 4x4 obtenues par les produits de Kronecker des matrices de Pauli $\boldsymbol{\sigma}_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_j$. \mathbf{H} peut

également être obtenue en effectuant la permutation de certains termes de la matrice $\Lambda \mathbf{M} \Lambda^\dagger$ avec

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Sous certaines hypothèses (voir [8]) il est possible de limiter l'ensemble des matrices \mathbf{H} à $HPD(4)$, l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives. L'étude des matrices de Mueller (à coefficients réels) peut donc être remplacée par celle des matrices \mathbf{H} , hermitiennes et donc à coefficients complexes. Nous étudions ici plus particulièrement le problème de l'interpolation de ces matrices quand elles sont définies positives. Du point de vue de l'interpolation, il est tout a fait possible de définir cette opération dans un cadre euclidien. La somme convexe de matrices hermitiennes définies positives est une matrice hermitienne définie positive. Cette métrique pose toutefois des problèmes si on souhaite faire des opérations plus complexes comme par exemple des descentes de gradients. On peut alors atteindre les frontières du domaine de la variété associée. D'autres métriques ont été proposées dans la littérature. On peut citer plus particulièrement le cas des métriques Affine-Invariante (AI) et Log-Euclidienne (LE) introduites dans [9][10] et [11] respectivement, pour les matrices symétriques définies positives. Ces métriques s'étendent de façon directe aux matrices hermitiennes définies positives

[12]. Leurs propriétés mathématiques diffèrent (invariance de la moyenne par transformation affine ou uniquement par similitude par exemple) mais elles permettent également de définir des courbes d'interpolation sur cet ensemble de matrices. Du point de vue de l'utilisateur, le problème n'est pas tant de savoir si telle ou telle technique d'interpolation est *meilleure* qu'une autre mais bien de déterminer quand on peut les appliquer. Ceci revient évidemment à déterminer quel est le modèle sous jacent.

Interpolations

A partir des propriétés algébriques et différentielles de la variété $HPD(4)$, il est possible de définir un cadre de travail riemannien sur cette variété et donc de lui associer des distances. Nous considérons dans cet article plus particulièrement le cas des métriques Affine-Invariante (AI) et Log-Euclidienne (LE) introduites dans [9][10] et [11] respectivement, pour les matrices symétriques définies positives. Ces métriques s'étendent de façon directe aux matrices hermitiennes définies positives [12]. Le cadre Euclidien (EC) est également considéré.

A partir des définitions des distances associées, les courbes d'interpolation entre \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 , deux éléments de $HPD(4)$, sont données pour chacun de ces cas par:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{LE}(t) &= \exp\left[\left[(1-t)\text{Log}(\mathbf{H}_1) + t\text{Log}(\mathbf{H}_2)\right]\right] \\ \mathbf{H}_{AI}(t) &= \mathbf{H}_1^{1/2} \exp\left(t \log\left(\mathbf{H}_1^{-1/2} \mathbf{H}_2 (\mathbf{H}_1^{-1/2})^\dagger\right)\right) (\mathbf{H}_1^{1/2})^\dagger \quad (3) \\ \mathbf{H}_{EC}(t) &= (1-t)\mathbf{H}_1 + t\mathbf{H}_2\end{aligned}$$

Interpolation Euclidienne

L'interprétation physique de l'interpolation euclidienne est immédiate. $\mathbf{H}_{EC}(t)$ (et donc $\mathbf{M}(t)$ la matrice de Mueller associée) correspond à la matrice d'un système optique dont la surface éclairée par le rayon lumineux, présente une hétérogénéité spatiale. L'ensemble se comporte comme deux systèmes en parallèles, de matrices respectives \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 . Le rayon lumineux est partagé entre ces deux éléments dans des proportions $(1-t)$ et t respectivement. Le rayon émergent est la somme incohérente de ces deux ondes. Dans ce cas, le paramètre t peut être considéré comme une grandeur caractérisant une proportion de surfaces.

Interpolation Log-Euclidienne

Il est possible d'accrocher un modèle physique sous-jacent au cas de l'interpolation LE en considérant l'expression des sous groupes à un paramètre de $HPD(4)$:

$$\mathbf{H}(\tau) = \exp(\tau \mathbf{D}) = \mathbf{I} + \tau \mathbf{D} + \frac{1}{2}(\tau \mathbf{D})^2 + \frac{1}{6}(\tau \mathbf{D})^3 + \dots \quad (4)$$

où \mathbf{D} est le générateur infinitésimal du sous-groupe associé (\mathbf{I} est la matrice identité), on définit alors une matrice \mathbf{H}_s comme le produit de deux matrices associées à des milieux d'épaisseur infime τ_1 et τ_2 et de générateurs \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 soit :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_s &= \mathbf{I} + \tau_1 \mathbf{D}_1 + \tau_2 \mathbf{D}_2 + O\left[(\tau_1 + \tau_2)^2\right] \\ \mathbf{H}_s &= \mathbf{I} + \tau \left[(1-t)\mathbf{D}_1 + t\mathbf{D}_2\right] + O(\tau^2) \quad (5) \\ \text{avec } t &= \frac{\tau_2}{\tau} \text{ et } \tau = \tau_1 + \tau_2\end{aligned}$$

Il s'en suit que si l'on considère maintenant un empilement de q couches élémentaires associées à la matrice \mathbf{H}_s , on a quand q tend vers l'infinie et τ vers 0 de sorte que $q\tau = z$,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{LE}(z, t) &= \lim_{q \rightarrow +\infty} (\mathbf{H}_s)^q = \lim_{\tau \rightarrow 0} (\mathbf{H}_s)^{\frac{z}{\tau}} \\ &= \exp\left(z \left[(1-t)\mathbf{D}_1 + t\mathbf{D}_2\right]\right) \quad (6)\end{aligned}$$

$\mathbf{H}_{LE}(t)$ caractérise donc un milieu qui est composé d'un empilement de couches élémentaires; l'interpolation consistant alors à changer la proportion des deux éléments constituants. Le paramètre t peut donc être assimilé à une proportion d'un mélange d'épaisseurs.

Interpolation Affine-Invariante

Pour le cas Affine-Invariant, on considère une tranche d'épaisseur infime τ d'un milieu associé au générateur \mathbf{D} tel que :

$$\mathbf{D} = \log\left(\mathbf{H}_1^{-1/2} \mathbf{H}_2 (\mathbf{H}_1^{-1/2})^\dagger\right) \quad (7)$$

et on pose \mathbf{H}_s tel que :

$$\mathbf{C}_s(\tau) = \exp(\tau \mathbf{D}) = \mathbf{H}_1^{-1/2} \mathbf{H}_s(\tau) (\mathbf{H}_1^{-1/2})^\dagger \quad (8)$$

Si on applique maintenant à \mathbf{C}_s le même raisonnement fait précédemment pour le cas LE , on a :

$$\begin{aligned}\exp(z\mathbf{D}) &= \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0 \\ q\tau = z}} [\mathbf{C}_s(\tau)]^q \\ &= \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0 \\ q\tau = z}} \mathbf{H}_1^{-1/2} \left[\mathbf{H}_s(\tau) \mathbf{H}_1^{-1}\right]^q (\mathbf{H}_1^{1/2}) \quad (9)\end{aligned}$$

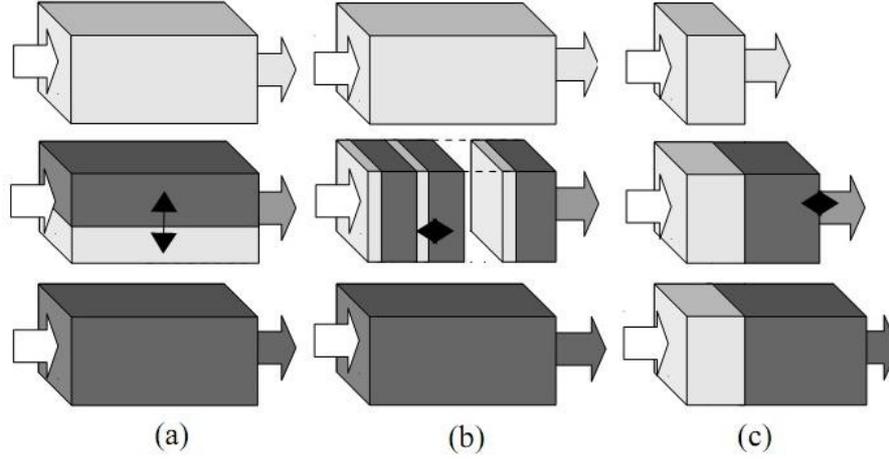


Fig. 1 : les 3 situations décrites respectivement par (a) : l'interpolation *EC*, (b) : l'interpolation *LE* et (c) : l'interpolation *AI*.

Et donc la courbe d'interpolation s'exprime comme :

$$\mathbf{H}_{AI}(t) = [\mathbf{H}_s(\tau \rightarrow 0)\mathbf{H}_1^{-1}]^{q \rightarrow \infty} \mathbf{H}_1 \quad (10)$$

$\mathbf{H}_{AI}(t)$ correspond cette fois à un empilement d'épaisseur t de couches élémentaires identiques associées à $\mathbf{H}_s\mathbf{H}_1^{-1}$ qui sont placées derrière une couche associée à \mathbf{H}_1 . t est maintenant homogène à une épaisseur.

La figure 1 résume les 3 situations décrites respectivement par l'interpolation *EC*, *LE* et *AI*.

Il résulte de ce qui précède que le choix de la méthode d'interpolation peut dépendre de connaissances a priori que l'on a sur les données à traiter. Ces connaissances peuvent parfois provenir des données elles mêmes. Nous développons cette idée en conclusion en supposant que l'on connaisse la matrice de covariance entre deux positions z_1 et z_2 du processus aléatoire. On peut alors introduire des matrices de covariance globales Σ associées au vecteur $\Omega_v^T = [\mathbf{V}(k, z_1)^T \quad \mathbf{V}(k, z_2)^T]^T$, où $\mathbf{V}(k, z)$ représente la réalisation k du vecteur aléatoire associé dont la matrice de covariance à la position z est $\mathbf{H}(z)$. Σ fournit donc une description complète des caractéristiques statistiques de second ordre du processus aléatoire considéré pour deux positions z_1 et z_2 .

$$\begin{aligned} \Sigma &= \langle \Omega_v(k, z_1, z_2) \Omega_v^\dagger(k, z_1, z_2) \rangle_k \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}(z_1) & \mathbf{G}^\dagger(z_1, z_2) \\ \mathbf{G}(z_1, z_2) & \mathbf{H}(z_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

Pour un couple de positions z_1 et z_2 , il est alors possible de définir deux situations physiques équivalentes au moins du point de vue des statistiques

du second ordre. Pour cela on définit l'action d'un groupe sur l'ensemble des matrices Σ . Cette action de groupe étant transitive sur la classe d'équivalence associée à la matrices Σ considérée, il est possible de définir des courbes géodésiques sur cette classe. Le cas particulier de la corrélation nulle entre les positions z_1 et z_2 est plus particulièrement traité.

Conclusion

Nous avons montré au travers de l'exemple particulier des matrices de cohérence optique, qu'il est possible de mettre en évidence des modèles physiques sous-jacents à différentes solutions d'interpolation de ces matrices au moyen de courbes géodésiques. Il résulte de ce qui précède que le choix de la méthode d'interpolation peut dépendre de connaissances a priori que l'on a sur les données à traiter. Soit on connaît le modèle sous jacent et il convient de retenir la technique correspondante, soit on peut aussi partir des données elles mêmes afin de construire une métrique en rapport. Nous développons cette idée en conclusion en introduisant des matrices de covariance globales.

Références

1. F Boulvert, B Boulbry, G Le Brun, B Le Jeune, S Rivet and J Cariou, "Analysis of the depolarizing properties of irradiated pig skin", J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 7, 21–28 (2005)
2. M. H. Smith, E. A. Sornsin, R. A. Chipman, T. J. Tayag, "Mueller matrix imaging of GaAs/AlGaAs self-imaging beamsplitting waveguides", in Proc. Polarization Measurement, Analysis, and Remote Sensing, SPIE 3121, 47-54 (1997)
3. Lianhua Jin, Takayuki Hamada, Yukitoshi Otani, and Norihiro Umeda, Measurement of characteristics of

- magnetic fluid by the Mueller matrix imaging polarimeter, *Opt. Eng.* 43, 181-185(2004), doi:10.1117/1.1631001
4. Patrick Terrier, Vincent Devlaminck, and Jean Michel Charbois, "Segmentation of rough surfaces using a polarization imaging system", *J. Opt. Soc. Am. A* 25, 423-430 (2008)
 5. M. H. Smith, P. Burke, A. Lompado, E. Tanner, and L. W. Hillman, "Mueller matrix imaging polarimetry in dermatology", in *Proc. SPIE* 3911, 210-216 (2000)
 6. Juan M. Bueno and Pablo Artal, "Double-pass imaging polarimetry in the human eye", *Opt. Lett.* 24, 64-66 (1999)
 7. Angelo Pierangelo, Abdelali Benali, Maria-Rosaria Antonelli, Tatiana Novikova, Pierre Validire, Brice Gayet, and Antonello De Martino, "Ex-vivo characterization of human colon cancer by Mueller polarimetric imaging", *Opt. Express* 19, 1582-1593 (2011)
 8. J. J. Gil, "Characteristic properties of Mueller matrices", *J. Opt. Soc. Am. A* 17, 328-334 (2000)
 9. K. Kim, L. Mandel, and E. Wolf, "Relationship between Jones and Mueller matrices for random media", *J. Opt. Soc. Am. A* 4, 433-437 (1987)
 10. V. Devlaminck, "Mueller matrix interpolation in polarization optics", *J. Opt. Soc. Am. A* 27, 1529-1534 (2010)
 11. P.T. Fletcher and S.C. Joshi, "Principal geodesic analysis on symmetric spaces: statistics of diffusion tensors", in *Proc. CVAMIA and MMBIA Workshops*, 87-98 (2004)
 12. Xavier Pennec, "Intrinsic Statistics on Riemannian Manifolds: Basic tools for Geometric Measurements", *J. Math Imaging Vis.* 25, 127-154 (2006)
 13. V. Arsigny, P. Fillard, X. Pennec, N. Ayache, "Geometric means in a novel vector space structure on symmetric positive-definite matrices", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 29, 328-347 (2007)
 14. V. Devlaminck and P. Terrier, "Geodesic distance on non-singular coherency matrix space in polarization optics", *J. Opt. Soc. Am. A* 27, 1756-1763 (2010)