

# Variation totale moyenne de modèles stochastiques de texture

Bruno GALERNE

CMLA, ENS Cachan, CNRS, UniverSud  
61 avenue du Président Wilson, F-94230 Cachan  
galerie@cmla.ens-cachan.fr

**Résumé** – On présente et illustre une formule générique permettant de calculer la variation totale moyenne par unité de surface  $\theta_V(f)$  d'un champ aléatoire stationnaire  $f$ , cette grandeur  $\theta_V(f)$  étant appelée *intensité de variation* du champ  $f$ . On explicite ensuite les expressions des intensités de variation de plusieurs modèles classiques de texture, à savoir les champs gaussiens et les modèles germes-grains.

**Abstract** – We present and illustrate a generic formula to compute the mean variation per unit area  $\theta_V(f)$  of a stationary random field  $f$ , this quantity  $\theta_V(f)$  being coined the *variation intensity* of  $f$ . We then give explicitly the variation intensities of various classical texture models, namely Gaussian random fields and germ-grain models.

## 1 Introduction

Les fonctions à variation bornée [1] constituent un modèle très important en traitement d'images [11]. Depuis l'article de Rudin, Osher et Fatemi [11], la variation totale a été largement utilisée pour divers problèmes tels que le débruitage, l'interpolation d'image, ou encore la déconvolution. En ce qui concerne les textures, la variation totale apparaît généralement dans le problème de décomposition d'une image en tant que somme d'une partie dite « cartoon » et une partie dite « texturée », problème initialement formulé par Meyer [10]. Dans ce modèle de décomposition, il est considéré que la variation totale de la partie texturée est élevée, voir même infinie, tandis que la variation totale de la partie cartoon est faible (relativement à une autre semi-norme adaptée aux images très oscillantes) [10, 15, 2], ce qui est en accord avec l'observation que les images naturelles ne sont pas nécessairement à variation bornée [8].

Bien que la variation totale des textures soit généralement considérée comme étant élevée voir infinie, à notre connaissance il n'existe pas de résultat permettant de calculer la variation totale moyenne des modèles de texture classiques tels que les champs gaussiens, les modèles *shot noise* ou d'autres modèles germes-grains. Cependant, l'observation de réalisations de modèles germes-grains (voir Fig. 2), qui modélisent des textures géométriques, laisse à penser que ces champs sont à variation localement bornée et que leur variation totale dépend des caractéristiques géométriques des formes aléatoires utilisées.

Dans cette communication, on introduit la notion d'*intensité de variation*  $\theta_V(f)$  d'un champ aléatoire stationnaire  $f$ . Cette grandeur  $\theta_V(f)$ , donnée par une formule générique, représente la variation totale moyenne de  $f$  par unité de surface. Afin d'illustrer cette nouvelle notion, on explicite ensuite l'intensité de variation de plusieurs modèles classiques de texture, à savoir les champs gaussiens et les modèles germes-grains.

Pour les modèles germes-grains, les formules établies pour les différentes intensités de variation rendent explicite la relation intuitive qui existe entre la variation totale moyenne des modèles germes-grains et la géométrie des grains. En particulier, pour tous les modèles germes-grains considérés (voir Fig. 2), les seules grandeurs géométriques intervenant dans l'expression de l'intensité de variation sont le périmètre moyen et la surface moyenne des grains.

## 2 Intensité de variation d'un champ aléatoire stationnaire

Dans toute la suite, on considère des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , mais vu l'application à l'analyse de modèles de texture on supposera que  $d = 2$  pour les commentaires. On rappelle que les fonctions à variation localement bornée (resp. à variation directionnelle localement bornée) sont les fonctions intégrables dont la dérivée (resp. la dérivée directionnelle) au sens des distributions est représentable par une mesure de Radon [1]. L'espace des fonctions à variation localement bornée est noté  $BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  et, pour toute direction  $u$  de la sphère unité  $S^{d-1}$ , l'espace des fonction à variation directionnelle localement bornée dans la direction  $u$  est noté  $BV_{\text{loc},u}(\mathbb{R}^d)$ . Pour tout ouvert  $G \subset \mathbb{R}^d$ ,  $V(f, G)$  et  $V_u(f, G)$  désignent respectivement la variation et la variation directionnelle de  $f$  dans  $G$  [1], avec la convention que ces variations valent  $+\infty$  si  $f$  n'est pas dans  $BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  ou  $BV_{\text{loc},u}(\mathbb{R}^d)$ . Enfin, pour tout ensemble mesurable  $A \subset \mathbb{R}^d$ , la variation sur  $\mathbb{R}^d$  de la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_A$  est appelée le périmètre de  $A$  et est notée  $\text{Per}(A)$ .

Étant donné  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, on appelle *champ aléatoire* toute fonction  $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable pour la tribu produit  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Un champ aléatoire est dit *station-*

naire si ses lois fini-dimensionnelles sont statistiquement invariantes par translation. Par définition, un champ aléatoire à variation (resp. variation directionnelle) localement bornée est un champ aléatoire dont les trajectoires  $f(\omega, \cdot)$  sont presque sûrement (p.s.) dans  $BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  (resp.  $BV_{\text{loc},u}(\mathbb{R}^d)$ ). Si un champ  $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  p.s., alors sa variation est une mesure aléatoire de Radon [5], et on appelle *mesure d'intensité de variation* de  $f$  la mesure  $G \mapsto \mathbb{E}(V(f, G))$ . De même, pour tout  $u \in S^{d-1}$  on définit la *mesure d'intensité de variation directionnelle* de  $f$  par  $G \mapsto \mathbb{E}(V_u(f, G))$ .

Comme le montre le résultat suivant, les mesures d'intensité de variation directionnelle des champs aléatoires stationnaires sont proportionnelles à la mesure de Lebesgue (on renvoie à [5] pour la démonstration).

**Théorème 1** (Définition et calcul de l'intensité de variation directionnelle d'un champ aléatoire stationnaire). *Soient  $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  un champ aléatoire stationnaire d'espérance finie et  $u \in S^{d-1}$ . Alors  $f \in BV_{u,\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  p.s. et a une mesure d'intensité de variation directionnelle localement finie si et seulement si la limite*

$$\theta_{V_u}(f) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(|f(ru) - f(0)|)}{|r|} \quad (1)$$

existe et est finie. Dans ce cas, la mesure d'intensité de variation directionnelle est donnée pour tout  $G \subset \mathbb{R}^d$  ouvert par

$$\mathbb{E}(V_u(f, G)) = \theta_{V_u}(f) \mathcal{L}^d(G).$$

La constante  $\theta_{V_u}(f)$  est appelée **intensité de variation directionnelle** de  $f$  dans la direction  $u$ .

$\theta_{V_u}(f)$  est la quantité moyenne de variation directionnelle de  $f$  par unité de surface. De même, on montre l'existence de l'**intensité de variation**  $\theta_V(f)$  qui vérifie les mêmes propriétés que  $\theta_{V_u}(f)$  et qui est déterminée par :

$$\begin{aligned} \theta_V(f) &= \frac{1}{2\omega_{d-1}} \int_{S^{d-1}} \theta_{V_u}(f) \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \frac{1}{2\omega_{d-1}} \int_{S^{d-1}} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(|f(ru) - f(0)|)}{|r|} \mathcal{H}^{d-1}(du), \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\omega_{d-1}$  est la mesure de Lebesgue de la boule unité dans  $\mathbb{R}^{d-1}$  et  $\mathcal{H}^{d-1}$  la mesure de Hausdorff de dimension  $d-1$ .

En particulier, on remarque avec les formules (1) et (2) que les intensités de variation  $\theta_{V_u}(f)$  et  $\theta_V(f)$  dépendent uniquement de la famille des lois bidimensionnelles du champ aléatoire  $f$ .

### 3 Intensité de variation de modèles classiques de texture

Dans cette section, les intensités de variation  $\theta_{V_u}(f)$  et  $\theta_V(f)$  de plusieurs modèles classiques de texture sont explicitement données. On renvoie à [5] pour les démonstrations.

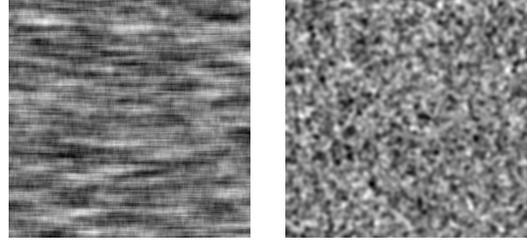


FIGURE 1 – Réalisations de deux champs gaussiens, en dehors (à gauche) et dans  $BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  (à droite). On remarque que le champ gaussien de droite est très régulier.

### 3.1 Champs gaussiens

On considère un *champ gaussien stationnaire*  $f_G$  de moyenne  $\mu \in \mathbb{R}$  et de fonction de covariance  $C : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , c'est-à-dire un champ aléatoire tel que pour tous  $p \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^d$ , et  $w_1, \dots, w_p \in \mathbb{R}$ , la v.a.  $\sum_{i=1}^p w_i f_G(x_i)$  est gaussienne de moyenne  $\sum_{i=1}^p w_i \mu$  et de variance  $\sum_{i,j=1}^p w_i w_j C(x_j - x_i)$ .

**Proposition 2** (Intensités de variation d'un champ gaussien). *Soit  $u \in S^{d-1}$ .  $f_G$  a une intensité de variation directionnelle  $\theta_{V_u}(f_G)$  finie si et seulement si la restriction de la covariance  $C_u : r \mapsto C(ru)$  est deux fois dérivable en 0, et dans ce cas, en notant  $C''_u(0)$  la dérivée seconde en 0 de  $C_u$ , on a*

$$\theta_{V_u}(f_G) = \sqrt{\frac{-2C''_u(0)}{\pi}}.$$

En conséquence,  $f_G$  a une intensité de variation  $\theta_V(f_G)$  finie si pour tous  $u \in S^{d-1}$  les restrictions de la covariance  $C_u : r \mapsto C(ru)$  sont deux fois dérivables en 0, et dans ce cas,

$$\theta_V(f_G) = \frac{1}{2\omega_{d-1}} \int_{S^{d-1}} \sqrt{\frac{-2C''_u(0)}{\pi}} \mathcal{H}^{d-1}(du).$$

D'après le récent article [12], la condition nécessaire et suffisante (CNS) de différentiabilité de la covariance de la Proposition 2 est également une CNS pour que le champ  $f_G$  soit p.s. dans l'espace de Sobolev  $W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ . Ainsi les champs gaussiens à variation localement bornée sont en réalité bien plus réguliers puisque leurs réalisations sont presque sûrement dans  $W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^d) \subset W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ . En particulier, la dérivée de ces champs gaussiens est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, elle n'a donc ni composante de sauts, ni composante cantorienne. On en conclut que le modèle des fonctions à variation bornée n'est pas adapté aux textures gaussiennes. En effet, soit l'intensité de variation des champs gaussiens est infinie, soit elle est finie mais alors les champs gaussiens sont réguliers, comme illustré par la Figure 1.

### 3.2 Modèles germes-grains

On considère à présent des modèles de texture géométrique appelés *modèles germes-grains* en géométrie stochastique [14]. Ces modèles définissent des champs aléatoires en combinant selon différents principes d'interaction une famille d'ensembles

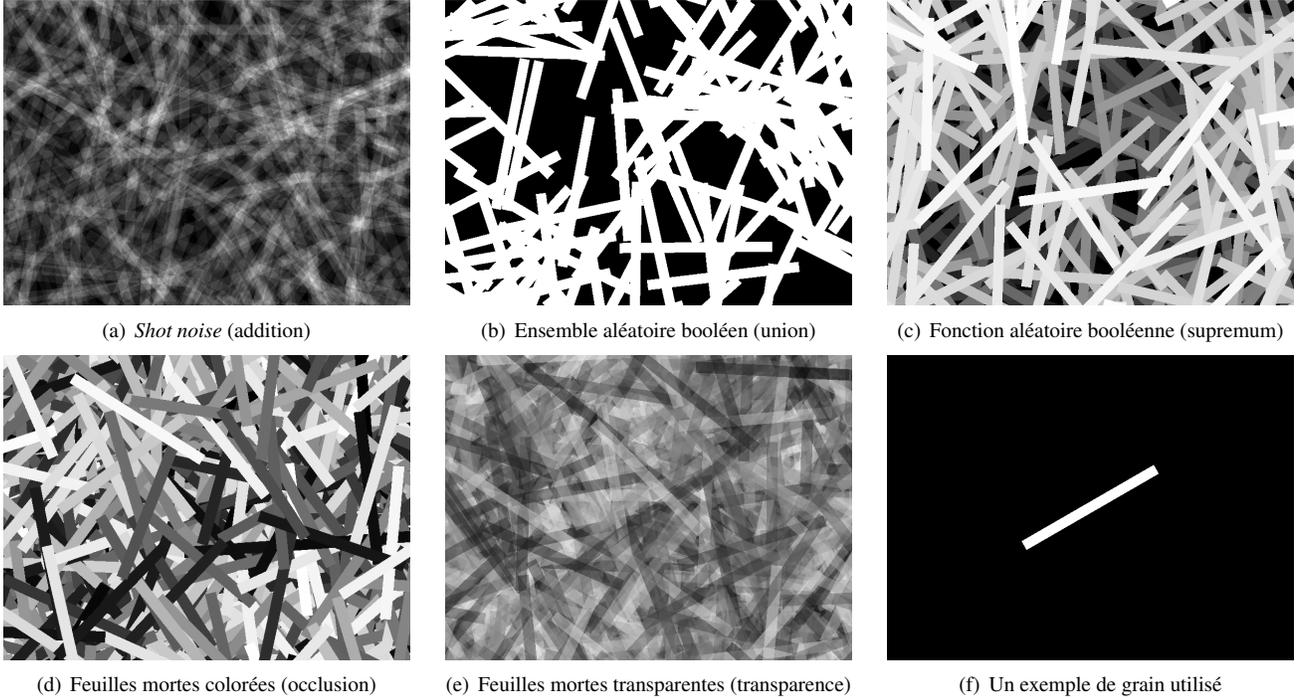


FIGURE 2 – Réalisations de différents modèles germes-grains, donnés avec leur principe d'interaction entre parenthèses, dont les grains sont des rectangles ayant une orientation aléatoire uniforme (en bas à droite).

aléatoires, appelés *grains*, ayant chacun un niveau de gris aléatoire. Les différents modèles considérés sont illustrés par la Figure 2. Dans toute la suite,  $\mathcal{F}$  désigne l'ensemble des sous-ensembles fermés de  $\mathbb{R}^d$ .

### 3.2.1 Le modèle *shot noise*

Le modèle *shot noise* est obtenu à partir d'un processus de Poisson indépendamment marqué  $\Phi = \{(x_j, X_j, a_j)\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathcal{F} \times \mathbb{R}$ , où les points  $\{x_j\}$  forment un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , les ensembles fermés aléatoires  $X_j$  et les niveaux de gris  $a_j$  sont indépendants de lois respectives  $P_X$  et  $P_a$ . On définit le *shot noise* en sommant le niveau de gris de chacun des grains (voir Figure 2(a)), c'est-à-dire

$$f_{SN}(y) = \sum_{(x_j, X_j, a_j) \in \Phi} a_j \mathbb{1}(y \in x_j + X_j).$$

Enfin, on note  $X$  un ensemble aléatoire de loi  $P_X$  et  $a$  une v.a. de loi  $P_a$ . On a alors la proposition suivante (voir [5]).

**Proposition 3** (Intensité de variation du *shot noise*). *On suppose que :*

- Il existe une boule  $B$  telle que  $E(\mathcal{L}^d(X \oplus B)) < +\infty$ .
- $\mathcal{L}^d(\partial X) = 0$   $P_X$ -p.s.
- $E(\text{Per}(X)) < +\infty$ .
- $E(|a|) < +\infty$ .

Alors  $f_{SN}$  est à variation bornée et  $\theta_V(f) = \lambda E(|a|)E(\text{Per}(X))$ .

Ainsi, sous ces hypothèses de régularité sur la frontière des grains, les variations de chacune des fonctions indicatrices  $y \mapsto a_j \mathbb{1}(y \in x_j + X_j)$  s'ajoutent et l'intensité de variation est égale

au nombre moyen  $\lambda$  de grains par unité de surface multiplié par la variation moyenne  $E(|a|)E(\text{Per}(X))$  d'une fonction indicatrice. Pour finir, on fait remarquer que dans le cas général où l'on somme des fonctions qui ne sont pas toutes des indicatrices, les variations individuelles peuvent s'atténuer mutuellement et non simplement s'ajouter [3].

### 3.2.2 Les modèles booléens

L'ensemble booléen est le modèle standard d'ensemble aléatoire stationnaire en géométrie stochastique [14, 13]. Il est construit comme l'union des ensembles aléatoires  $x_j + X_j$  où  $\{(x_j, X_j)\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathcal{F}$  est un processus de Poisson indépendamment marqué :

$$Z_B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} x_j + X_j,$$

comme illustré par la Figure 2(b). Ici le champ aléatoire  $f$  est l'indicatrice de l'ensemble  $Z_B$  et l'on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\mathbb{1}_{Z_B}(ru) - \mathbb{1}_{Z_B}(0)|) &= 2\mathbb{P}(ru \in Z_B \text{ et } 0 \notin Z_B) \\ &= 2(\mathbb{P}(0 \notin Z_B) - \mathbb{P}(Z_B \cap \{0, -ru\} = \emptyset)). \end{aligned}$$

Or les deux probabilités ci-dessus sont bien connues (elles sont données par la capacité de Choquet des modèles booléens [14]) et elles font intervenir le covariogramme géométrique des grains  $X_j$ , à savoir la fonction  $\gamma_X(y) = E(\mathcal{L}^d(X \cap (y + X)))$ . En utilisant le fait que les dérivées directionnelles du covariogramme géométrique  $\gamma_X$  sont proportionnelles aux variations directionnelles moyennes  $\mathbb{E}(V_u(X))$  de  $X$  [6], on obtient :

**Proposition 4** (Intensité de variation d'un ensemble booléen). *Pour tout  $u \in S^{d-1}$ ,*

$$\theta_{V_u}(Z_B) = \lambda \mathbb{E}(V_u(X)) \exp(-\lambda E(\mathcal{L}^d(X)))$$

$$\theta_V(Z_B) = \lambda \mathbb{E}(\text{Per}(X)) \exp(-\lambda \mathbb{E}(\mathcal{L}^d(X))).$$

Remarquons que la Proposition 4 est valide pour tout grain  $X$  et généralise ainsi des résultats connus pour les ensembles booléens à grains convexes [13, p. 386].

Les ensembles aléatoires booléens peuvent être étendus en un modèle de champs aléatoires appelés fonctions aléatoires booléennes. Pour cela, on considère un processus de Poisson de grains colorés  $(x_j, X_j, a_j)$  pour lequel les niveaux de gris  $a_j$  sont positifs et on définit le champ aléatoire

$$f_B(y) = \sup(\{0\} \cup \{a_j, y \in x_j + X_j\}),$$

ce qui impose que les grains les plus clairs sont placés au dessus des grains les plus sombres (voir Figure 2(c)). Ce modèle généralise celui des ensembles booléens car les ensembles de niveau supérieur de  $f_B$  sont des ensembles booléens. En utilisant cette propriété et une formule de la coaire pour les variations d'intensité, on obtient l'intensité de variation de  $f_B$  [5].

### 3.2.3 Les modèles feuilles mortes

Le modèle feuilles mortes colorées [9, 4], initialement introduit par Matheron, est un modèle germe-grain reposant sur le principe d'occlusion. Pour ce modèle, en plus d'avoir une position, les grains sont donnés avec un temps de chute afin de pouvoir les classer chronologiquement. Plus précisément, les grains, appelés *feuilles* dans ce contexte, sont donnés par le processus de Poisson indépendamment marqué

$$\Phi = \{(t_j, x_j, X_j, a_j)\} \subset (-\infty, 0) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{F} \times \mathbb{R}$$

où  $\{(t_j, x_j)\}$  est un processus de Poisson homogène sur  $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}^d$  d'intensité 1 et, comme pour les modèles précédents, les  $X_j$  et  $a_j$  sont des ensembles et variables aléatoires indépendants.

Pour chaque feuille  $(t_j, x_j, X_j, a_j)$ , du fait de l'occlusion, l'ensemble aléatoire  $x_j + X_j$  est partiellement ou totalement caché par les feuilles suivantes, c'est-à-dire les feuilles qui tombent après le temps  $t = t_j$ . Au final, au temps  $t = 0$ , la *partie visible* de  $x_j + X_j$  est

$$V_j = (x_j + X_j) \setminus \left( \bigcup_{(t_k, x_k, X_k, a_k) \in \Phi, t_k > t_j} x_k + X_k \right).$$

Dès que  $E(\mathcal{L}^d(X)) > 0$ , tout l'espace  $\mathbb{R}^d$  est recouvert par les ensembles aléatoires  $x_j + X_j$ , et par conséquent chaque point  $y$  de  $\mathbb{R}^d$  appartient à une unique partie visible. Le modèle feuilles mortes colorées  $y \mapsto f_{FMC}(y)$  est défini en associant à chaque point  $y$  la couleur  $a_j$  de la partie visible à laquelle il appartient, comme illustré par la Figure 2(d).

**Proposition 5** (Variation d'intensité du modèle feuilles mortes colorées). *On suppose que  $0 < E(\mathcal{L}^d(X)) < +\infty$  et que  $E(|a|) < +\infty$  et on note  $a_1$  et  $a_2$  deux v.a. i.i.d. de loi  $P_a$ . Alors*

$$\theta_V(f_{FMC}) = \mathbb{E}(|a_1 - a_2|) \frac{E(\text{Per}(X))}{E(\mathcal{L}^d(X))}.$$

L'expression de  $\theta_V(f_{FMC})$  est en accord avec l'intuition puisque  $\mathbb{E}(|a_1 - a_2|)$  représente le contraste moyen entre deux

feuilles adjacentes et le ratio  $\frac{E(\text{Per}(X))}{E(\mathcal{L}^d(X))}$  est connu pour être la longueur moyenne de frontière par unité de surface.

Pour finir, mentionnons que pour le modèle feuilles mortes transparentes, modèle similaire au modèle feuilles mortes colorées pour lequel le principe d'occlusion est remplacé par le principe de transparence [7] (voir Figure 2(e)), l'intensité de variation s'exprime également comme le produit d'un terme de contraste multiplié par le ratio périmètre moyen sur surface moyenne des grains [5].

## Références

- [1] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford university press, 2000.
- [2] J.-F. Aujol, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and A. Chambolle. Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component. *J. Math. Imag. Vis.*, 2005.
- [3] H. Biermé and A. Desolneux. A Fourier approach for the crossings of shot noise processes with jumps. Soumis, 2010.
- [4] C. Bordenave, Y. Gousseau, and F. Roueff. The dead leaves model : a general tessellation modeling occlusion. *Adv. Appl. Probab.*, 2006.
- [5] B. Galerne. *Modèles d'image aléatoires et synthèse de texture*. Thèse, ENS de Cachan, 2010.
- [6] B. Galerne. Computation of the perimeter of measurable sets via their covariogram. Applications to random sets. *Image Anal. Stereol.*, 2011.
- [7] B. Galerne and Y. Gousseau. The transparent dead leaves model. Soumis, 2011.
- [8] Y. Gousseau and J.-M. Morel. Are natural images of bounded variation ? *SIAM J. Math. Anal.*, 2001.
- [9] D. Jeulin. Dead leaves models : from space tessellation to random functions. In *Proc. of the Symp. on the Advances in the Theory and Applications of Random Sets*, 1997.
- [10] Y. Meyer. *Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations*. AMS, 2001.
- [11] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 1992.
- [12] M. Scheuerer. Regularity of the sample paths of a general second order random field. *Stoch. Process. Appl.*, 2010.
- [13] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and Integral Geometry*. Probability and Its Applications. Springer, 2008.
- [14] D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. Wiley, second edition, 1995.
- [15] L. A. Vese and S. J. Osher. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing. *Journal of Scientific Computing*, 2003.