

Méthodes proximales en tomographie CBCT et TEP

Sandrine ANTHOINE¹, Jean-François AUJOL², Yannick BOURSIER³, Clothilde MÉLOT¹

¹ Aix-Marseille Université, LATP, CNRS, Marseille, France

² Université Bordeaux 1, IMB, France

³ Aix-Marseille Université, CPPM, CNRS/IN2P3, Marseille, France

anthoine@cmi.univ-mrs.fr, jaujol@math.u-bordeaux1.fr

boursier@cppm.in2p3.fr, melot@cmi.univ-mrs.fr

Résumé – Dans ce travail, nous traitons du problème de reconstruction d’images médicales en tomodensitométrie (TDM) à faisceau conique (CBCT) et en tomographie par émission de positons (TEP). Nous proposons des formulations variationnelles adaptées à la CBCT à bas niveau de photons (équivalent à la dose de rayonnements X ionisants) et à la tomographie TEP à basse dose de radiotracteur. Les fonctionnelles considérées peuvent être non différentiables, elles prennent en compte le bruit de Poisson intrinsèque à ce type de mesures et la contrainte de positivité de la solution. L’utilisation de méthodes d’optimisation récemment introduites par A. Chambolle et T. Pock permet de proposer des solutions efficaces. Nous montrons qu’il est a priori possible de diminuer significativement les doses radio-actives et de rayonnements ionisants, tout en étant capable de reconstruire des images de bonne qualité. Nous montrons également que le fait de traiter la non différentiabilité et de tenir compte de la contrainte de positivité n’empêche pas de proposer des algorithmes rapides.

Abstract – Cone Beam Computerized Tomography (CBCT) and Positron Emission Tomography (PET) Scans are medical imaging devices that require solving ill-posed inverse problems. The models considered come directly from the physics of the acquisition devices, and take into account the specificity of the (Poisson) noise. We propose various fast numerical schemes to compute the solution. In particular, we show that a new algorithm recently introduced by A. Chambolle and T. Pock is well suited in the PET case when considering non differentiable regularizations such as total variation or wavelet ℓ_1 -regularization. Numerical experiments indicate that the proposed algorithms compare favorably with respect to well-established methods in tomography.

1 Introduction

En imagerie médicale, la tomodensitométrie à faisceau conique (CBCT pour *Cone Beam Computerized Tomography*) et la Tomographie par Émission de Positons (TEP) sont deux modalités qui permettent d’obtenir des informations anatomiques et métaboliques complémentaires pour un même patient. Pour chacune de ces deux modalités, l’enjeu principal actuel est de reconstruire des images de qualité satisfaisante tout en réduisant la nocivité des examens : diminuer la dose de produit radio-actif injecté au patient pour un scanner TEP (et la durée de l’examen), et la dose de rayons X absorbée, propriété physique intrinsèque des tissus biologiques, pour un scanner CBCT.

En tomodensitométrie, on cherche à estimer le vecteur d’atténuation $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{I_1}$ à partir des mesures $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{J_1}$ à différents angles de projection ($J_1 \ll I_1$). Le modèle d’acquisition discret peut être modélisé par : $y_j \sim \mathcal{P}(z_j \exp(-[\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}]_j))$, où $\mathcal{P}(\lambda)$ est une distribution de Poisson de paramètre λ et z_j désigne le nombre de photons émis par la source pour le pixel j ($j \in \{1 \dots J_1\}$). La matrice système est un opérateur linéaire \mathbf{A} correspondant aux projections qui décrivent la géométrie du système d’acquisition et dont les coefficients $a_{i,j}$ caractérisent la probabilité qu’un événement se produisant sur un photon au pixel i soit détecté au pixel j .

On modélise le scanner TEP de manière analogue : $w_j \sim \mathcal{P}([\mathbf{B}\mathbf{v}]_j)$, où $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{I_2}$ désigne le vecteur de concentration d’activité à reconstruire, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{J_2}$ les mesures et \mathbf{B} la matrice système qui décrit les propriétés du scanner TEP ($J_2 \ll I_2$).

L’anti log-vraisemblance \mathcal{L} pour chaque modalité s’exprime respectivement par :

$$\mathcal{L}_{CBCT}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{j=1}^{J_1} \left\{ y_j [\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}]_j + z_j \exp(-[\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}]_j) \right\} \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_{TEP}(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{J_2} \left\{ [\mathbf{B}\mathbf{v}]_j - w_j \log_\varepsilon([\mathbf{B}\mathbf{v}]_j) \right\} \quad (2)$$

avec la notation : $\log_\varepsilon(x) = \log(x + \varepsilon)$. On utilisera $\varepsilon = 0$, qui correspond au modèle physique, sauf si la méthode de résolution requiert $\varepsilon > 0$. Ces problèmes inverses étant posés, on ajoute un terme de régularisation J au terme d’attache au données \mathcal{L} , et on considère les problèmes respectifs pour $\lambda > 0$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \arg \min_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \mathcal{L}_{CBCT}(\boldsymbol{\mu}) + \lambda J(\boldsymbol{\mu}) \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v} \geq 0} \mathcal{L}_{TEP}(\mathbf{v}) + \lambda J(\mathbf{v}) \quad (4)$$

Comme les fonctionnelles considérées ne sont pas strictement convexes, les minimiseurs ne sont pas forcément uniques.

Dans ce papier, nous considérons des régularisations préservant les discontinuités telles la variation totale (éventuellement régularisée) ou une norme ℓ_1 en ondelettes. Les fonctionnelles obtenues prennent en compte le bruit de Poisson par le terme d'attache aux données et la contrainte de positivité. Nous comparons les performances de différents algorithmes du simple gradient projeté dans le cas différentiable aux méthodes proximales de type Forward-Backward Splitting [7] ou Chambolle-Pock [9].

2 Contexte

Les algorithmes proposés pour le problème CBCT ou pour le problème TEP appartiennent souvent à des familles communes.

Certains algorithmes de reconstruction commencent par appliquer une transformée stabilisatrice de variance comme celle d'Anscombe [1]. Si le bruit de Poisson est d'intensité faible, cette transformée ne permet pas de se ramener à un bruit gaussien. Dans ce qui suit, nous garderons l'hypothèse de bruit de Poisson et traiterons directement les termes d'attache aux données (1) et (2). Comme une transformée de Radon intervient dans chacun des deux problèmes, on peut utiliser la rétroprojection filtrée (FBP) pour restaurer les données dégradées. Cependant cette approche amplifie les hautes fréquences du bruit.

Les algorithmes du type ML-EM ont pour inconvénients leur coût numérique et des estimations souvent instables. Pour y pallier, Fessler *et al.* [5] ont développé des techniques basées sur des approximations quadratiques des fonctionnelles à minimiser. Des variations autour de ces idées et l'utilisation d'une régularisation du type variation totale ou ℓ^1 des coefficients en ondelettes ont donné des algorithmes [6] très proches des algorithmes proximaux mais dans un cadre différentiable.

En optimisation convexe, durant la dernière décennie, les algorithmes pour optimiser la somme de deux fonctions non différentiables ont vu leurs performances très sensiblement améliorées [7, 9, 15, 14]. L'algorithme PPA a été notamment appliqué dans le cadre de la TEP dynamique dans [12].

Notre travail s'inscrit dans ce champ de travaux et s'intéresse particulièrement aux performances de l'algorithme [9] en TEP.

3 Algorithmes

3.1 Notations

L'image est vue comme une matrice de taille $m \times n$. On note X l'espace euclidien $\mathbb{R}^{m \times n}$, muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \sum_{i,j} u_{i,j} v_{i,j}$ et de la norme $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. On considère les opérateurs de régularisation suivants :

- La variation totale discrète de u définie par : $J_{TV}(u) = \sum_{i,j} |(\nabla u)_{i,j}|$.
- Une version régularisée (différentiable) de la variation totale : $J_{TV}^{reg}(u) = \sum_{i,j} \sqrt{\alpha^2 + |(\nabla u)_{i,j}|^2}$.
- Une norme de parcimonie sur un repère strict $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (ondelettes, etc) : $J_{1,\varphi}(u) = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle u, \varphi_\lambda \rangle|$.

3.2 Algorithmes

Les problèmes posés aux Eq.(3) et (4) sont de la forme

$$\min_{x \geq 0} F(x) + G(x). \quad (5)$$

Si F et G sont différentiables, le gradient projeté donne la solution. Dans le cas contraire, on prend en compte la contrainte dans la fonctionnelle G et on utilise des techniques proximales. Considérons F une fonction convexe propre semi-continue inférieurement sur X , ∂F son sous-gradient, et F^* sa transformée de Legendre-Fenchel [8]. A x fixé l'unique solution de $\min_y F(y) + \frac{1}{2h} \|x - y\|^2$ est appelé opérateur proximal [7], et est noté $y = \text{prox}_h^F(x) = (I + h\partial F)^{-1}(x)$. Nous comparons deux techniques l'utilisant.

L'algorithme Forward-Backward [7] donné par les itérations : $x_{k+1} = (I + h\partial G)^{-1}(x_k - h\nabla F(x_k))$, ainsi que ses variantes accélérées [10] (FISTA) permettent de résoudre (5) si F est convexe $C^{1,1}$.

A. Chambolle et T. Pock [9] ont introduit un algorithme pour des problèmes d'optimisation de la forme :

$$\min_{x \in X} F(Kx) + G(x),$$

avec K un opérateur linéaire continu. L'algorithme suivant converge [9] si $\tau\sigma\|K\|^2 < 1$:

$$\begin{cases} y_{n+1} = (I + \sigma\partial F^*)^{-1}(y_n + \sigma K\bar{x}_n) \\ x_{n+1} = (I + \tau\partial G)^{-1}(x_n - \tau K^* y_{n+1}) \\ \bar{x}_{n+1} = 2x_{n+1} - x_n \end{cases} \quad (6)$$

On peut remarquer qu'un algorithme similaire avait été proposé dans [13].

3.3 Application au cas de la CBCT

TVreg Dans le cas J_{TV}^{reg} , on utilise une version accélérée de l'algorithme de gradient projeté [10].

FB-TV Dans le cas de J_{TV} , on utilise l'algorithme FISTA [10] avec $F = \mathcal{L}_{CBCT}$ et $G(\mu) = \lambda J_{TV}(\mu) + \chi_C(\mu)$ dans (5) (χ_C est la fonction indicatrice de C , i.e. $\chi_C(\mu) = 0$ si $\mu \in C$ et $+\infty$ sinon). On calcule l'opérateur proximal $\text{prox}^{\lambda J_{TV} + \chi_C}(\mu)$ avec l'algorithme rapide proposé dans [10].

FBwav Dans le cas de $J_{1,\varphi}$, on utilise FISTA [10] avec $F = \mathcal{L}_{CBCT}$ et $G(\mu) = \lambda J_{1,\varphi}(\mu) + \chi_C(\mu)$ dans (5). On calcule l'opérateur proximal $\text{prox}^{\lambda J_{1,\varphi} + \chi_C}(\mu)$ en adaptant l'algorithme FISTA [10].

3.4 Application au cas de la TEP

En TEP, seul l'algorithme Chambolle-Pock permet de laisser $\varepsilon = 0$ dans le terme d'attache aux données en \log_ε dans (2). Les autres algorithmes nécessitent que ce terme soit de gradient lipschitzien, ce qui impose de prendre $\varepsilon > 0$. De plus, dans ce cas, il est impossible d'utiliser des algorithmes d'accélération tels que FISTA [10], vu que le calcul de points intermédiaires qui ne vérifient pas la contrainte de positivité est impossible. Nous étudions donc les algorithmes suivants avec $\varepsilon > 0$:

TVreg Dans le cas de J_{TV}^{reg} , on utilise l'algorithme de gradient projeté.

FB-TV Pour J_{TV} , on utilise l'algorithme de Forward-Backward splitting avec $F = \mathcal{L}_{TEP}$ et $G(\mathbf{v}) = \lambda J_{TV}(\mathbf{v}) + \chi_C(\mathbf{v})$ dans (5).

FBwav Pour $J_{l_1, \varphi}$, on utilise l'algorithme de Forward-Backward splitting avec $F = \mathcal{L}_{TEP}$ et $G(\mathbf{v}) = \lambda J_{l_1, \varphi}(\mathbf{v}) + \chi_C(\mathbf{v})$ dans (5).

Posant $\varepsilon = 0$, nous comparons deux façons d'appliquer l'algorithme de Chambolle-Pock (6) :

CP1TV et CPwav On réécrit (4) sous la forme : $\min_{\mathbf{v}} F(K\mathbf{v}) + G(\mathbf{v})$, avec $K = B$, $C = \{\mathbf{v} \geq 0\}$, $F(x) = \langle x - w \log(x), 1 \rangle$, et $G(x) = \lambda J(x) + \chi_C(x)$ et on utilise l'algorithme (6). On choisit $J = J_{TV}$ pour (**CP1TV**) et $J_{l_1, \varphi}$ pour (**CPwav**).

CP2TV On réécrit (4) sous la forme : $\min_{\mathbf{v}} F(K\mathbf{v}) + G(B\mathbf{v}) + \chi_C(\mathbf{v})$, avec $K = \nabla$ et $C = \{\mathbf{v} \geq 0\}$, $F(p) = \lambda \|p\|_{L^1}$, $G(x) = \langle x - w \log(x), 1 \rangle$.

4 Résultats

Les données CT et TEP sont simulées via la toolbox Matlab IRT (<http://www.eecs.umich.edu/fessler/irt/irt>). La vérité est une version 128x128 du fantôme de Zubal, on utilise 128 projections. On étudie différentes intensités de bruit : de $1e4$, $1e3$ et $1e2$ photons en CBCT, et d'intensité $fcount$: $5e5$, $2e5$, $1e5$, en TEP. On compare avec différents algorithmes état de l'art, notamment la retroprojection filtrée (**FBP**), l'algorithme MLEM (**MLEM**), l'algorithme MLEM pénalisé par fonction de Huber (**MLEMh**) implémentés dans IRT et l'algorithme SPIRAL [6].

4.1 CBCT

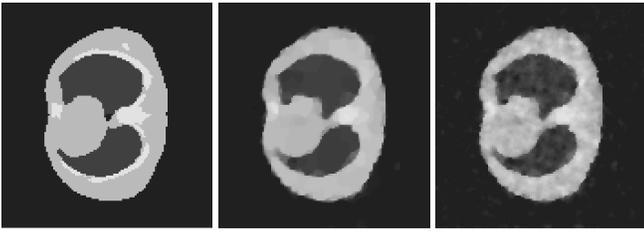


FIGURE 1 – Véritable image CT (gauche), reconstruction pour $z=1000$ avec **FB-TV** (milieu), **MLEMh** (droite).

On compare les 3 algorithmes proposés :

- la descente de gradient projeté avec la semi norme TV (**TVreg**),
 - l'algorithme Forward-Backward avec un repère d'ondelettes de Haar invariant par translation pour une pénalisation ℓ_1 (3 échelles) (**FBwav**),
 - l'algorithme Forward-Backward avec une pénalisation TV (**FB-TV**),
- à 3 algorithmes états de l'art implémentés dans IRT :

- la rétro-projection filtrée (**FBP**),
- l'algorithme MLEM (**MLEM**),
- l'algorithme MLEM avec pénalisation de Huber (avec $\delta = 9.10^{-4}$) (**MLEMh**).

Les tableaux 1, 2 et 3 synthétisent les résultats obtenus pour différents niveaux de bruits ; on montre des exemples de reconstructions sur la Figure 1.

	snr	ssim	λ	#iterations	temps
TVreg	19.57	0.900	300	300	44
FBWav	18.63	0.938	75	300	110
FB-TV	19.61	0.916	300	300	85
FBP	13.40	0.395	-	-	0.1
MLEM	15.60	0.711	-	120	46
MLEMh	19.61	0.856	2e5	1000	174

TABLE 1 – Reconstruction CT, niveau de photons $z=10000$.

	snr	ssim	λ	#iterations	temps
TVreg	15.06	0.808	200	300	36
FBWav	14.06	0.826	25	300	110
FB-TV	15.10	0.845	200	300	85
FBP	9.08	0.201	-	-	0.1
MLEM	11.86	0.462	-	43	14
MLEMh	14.52	0.680	7e5	672	117

TABLE 2 – Reconstruction CT, niveau de photons $z=1000$.

	snr	ssim	λ	#iterations	temps
TVreg	11.34	0.625	80	300	32
FBWav	10.62	0.695	10	300	110
FB-TV	11.35	0.690	80	300	78
FBP	0.44	0.076	-	-	0.1
MLEM	7.90	0.200	-	17	5.7
MLEMh	10.78	0.489	3.5e4	351	61

TABLE 3 – Reconstruction CT, niveau de photons $z=100$.

4.2 TEP

En plus des 6 algorithmes étudiés en CT, on fait aussi des simulations avec l'algorithme SPIRAL [6], ainsi que 3 versions de l'algorithme de Chambolle-Pock.

- l'algorithme de Chambolle-Pock (première approche) avec un repère d'ondelettes de Haar invariant par translation et une pénalisation ℓ_1 (3 échelles) (**CPwav**),
- l'algorithme de Chambolle-Pock (première approche) avec une pénalisation TV calculé avec FISTA (**CP1TV**),
- l'algorithme de Chambolle-Pock (seconde approche) avec une pénalisation TV (**CP2TV**).

Les Tableaux 4 et 5 synthétisent les résultats ; on montre des exemples de reconstructions sur la Figure 2 (remarque : on ne montre pas ici les résultats pour $fcount = 5e5$.)

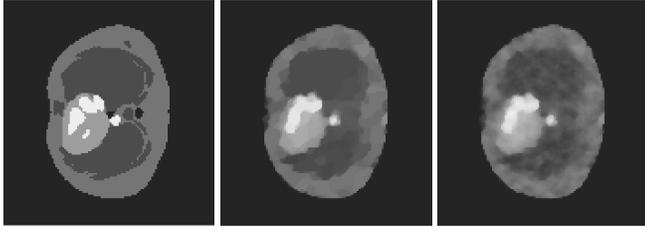


FIGURE 2 – Véritable image PET (gauche), reconstruction pour $f_{count}=200000$ avec *CP1TV* (milieu), *MLEMh* (droite).

	snr	ssim	λ	#iterations	temps
TVreg	13.68	0.866	0.50	200	11
FBwav	13.11	0.867	0.0875	150	89
FB-TV	13.71	0.875	0.50	100	65
CPwav	13.46	0.870	0.0875	100	79
CP1TV	14.17	0.882	0.50	100	82
CP2TV	14.01	0.867	0.50	150	107
SPIRAL	13.40	0.872	0.50	100	65
FBP	9.03	0.322	-	-	0.1
MLEM	12.08	0.774	-	12	2
MLEMh	13.97	0.853	0.9	274	53

TABLE 4 – Reconstruction TEP, $f_{count}=200000$.

4.3 Discussion

Les algorithmes régularisés avec la variation totale donnent les meilleurs résultats en terme de SNR. Notons que les algorithmes basés ondelettes donnent des résultats comparables en terme de SSIM (résultats non vus ici car optimisés pour le SNR).

Pour la CBCT, les performances des algorithmes de l'état de l'art se dégradent très rapidement avec le bruit, les algorithmes proximaux sont bien plus robustes, ouvrant la possibilité d'exams à faible dose. Pour la TEP, la méthode de Chambolle-Pock est la meilleure et la seule utilisant le terme d'attache aux données original ($\varepsilon = 0$). La seconde approche (**CT2TV**) (proposée initialement dans [9]) est plus lente que la première proposée ici. Par ailleurs, MLEM régularisé (**MLEMh**) en CBCT avec un grand nombre de photons donne des résultats de bonne qualité mais le grand nombre d'itérations nécessaires risque de poser des problèmes pour des données réelles (donc tridimen-

	snr	ssim	λ	#iterations	temps
TVreg	12.12	0.841	0.40	200	13
FBwav	11.55	0.834	0.0625	150	89
FB-TV	12.14	0.847	0.40	100	68
CPwav	11.65	0.835	0.0625	50	40
CP1TV	13.13	0.862	0.40	50	46
CP2TV	12.86	0.823	0.40	100	78
SPIRAL	11.77	0.841	0.40	100	86
FBP	6.66	0.254	-	-	0.1
MLEM	11.06	0.731	-	10	2
MLEMh	12.92	0.837	0.8	278	58

TABLE 5 – Reconstruction TEP, $f_{count}=100000$.

sionnelles).

Références

- [1] F.-X. Dupé, J. Fadili, and J.-L. Starck, "A proximal iteration for deconvolving poisson noisy images using sparse representations", *IEEE TIP*, vol. 18, 2009.
- [2] L. Feldkamp, L. Davis, and J. Kress, "Practical cone-beam algorithm," *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 1, no. 6, 1984.
- [3] L.A. Shepp and Y. Vardi, "Maximum likelihood reconstruction in positron emission tomography," *IEEE TMI*, vol. 1, no. 2, 1982.
- [4] J. Fessler and A. Hero, "Penalized maximum-likelihood image reconstruction using space-alternating generalized EM algorithms," *IEEE TIP*, vol. 4, no. 10, 1995.
- [5] H. Erdoğan and J. Fessler, "Monotonic algorithms for transmission tomography," *IEEE TMI*, vol. 18(9), 1999.
- [6] Z. Harmany, R. Marcia, and R. Willett, "This is SPIRAL-TAP : Sparse poisson intensity reconstruction algorithms theory and practice," *arXiv :1005.4274*, 2010.
- [7] P.L. Combettes and V. Wajs, "Signal recovery by proximal forward-backward splitting," *SIAM J. on Multi. Model. and Simu.*, vol. 4, no. 4, 2005.
- [8] T. Rockafellar, "Convex Analysis," Princeton University Press, 1983.
- [9] A. Chambolle and T. Pock, "A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging," *JMIV*, vol. 40, no. 1, 2011.
- [10] A. Beck and M. Teboulle, "Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems," *IEEE TIP*, vol. 18(11), 2009.
- [11] Z. Wang, A. Bovik, H. Sheikh, and E. Simoncelli, "Image quality assessment : From error visibility to structural similarity," *IEEE TIP*, vol. 13, no. 4, 2004.
- [12] N. Pustelnik, C. Chau, J-C Pesquet, and C. Comtat, "Parallel algorithm and hybrid regularization for dynamic pet," in *IEEE Med. Im. Conf.*, 2010.
- [13] G. Chen and M. Teboulle, "A proximal-based decomposition method for convex minimization problems," *Mathematical Programming*, 1994.
- [14] L.M. Briceño-Arias and P.L. Combettes, "Convex variational formulation with smooth coupling for multicomponent signal decomposition and recovery," *Numerical Mathematics : Theory, Methods, and Applications*, vol. 2, no. 4, 2009.
- [15] C. Chau, J.C. Pesquet, and N. Pustelnik, "Nested Iterative Algorithms for Convex Constrained Image Recovery Problems," *SIAM J. Img. Sci.*, vol. 2, no. 2, 2009.