

# G-estimation pour l’ajustement de débit dans les réseaux cognitifs

Abla KAMMOUN<sup>1</sup>, Romain COUILLET<sup>2</sup>, Jamal NAJIM<sup>1</sup>, Mérouane DEBBAH<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Télécom Paris-Tech

<sup>2</sup>Alcatel-Lucent Chair Supélec

{kammoun,najim}@telecom.paris-tech.fr, {romain.couillet,merouane.debbah}@supelec.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous nous intéressons au problème d’estimation de la capacité maximale que peuvent atteindre les communications secondaires dans un réseau radio-cognitif. Plus précisément, en nous fondant sur la théorie des matrices aléatoires, nous construisons un estimateur consistant de la capacité dans le cas où le nombre d’échantillons est insuffisant. Nous comparons par simulation l’estimateur proposé avec les estimateurs obtenus par les méthodes traditionnelles, et montrons que bien que notre étude ne soit valable que dans le régime asymptotique, la méthode proposée possède de bonnes performances et devance de loin les méthodes conventionnelles dans un contexte réaliste.

**Abstract** – This work deals with the problem of estimating the maximum capacity that could achieve secondary communications in a cognitive network. More precisely, based on random matrix theory tools, we build a consistent estimator of the capacity when the number of samples is insufficient. We compare using simulations, the proposed estimator with estimators obtained by conventional methods and show that although our study is valid only under the asymptotic regime, the proposed method achieve good performance and outperforms classical methods in a realistic context.

## Introduction

On sait, depuis les travaux de Shannon, que la gestion du spectre joue un rôle crucial dans les performances et les qualités de services pouvant être offertes. Pour autant, il a été observé que, dans les systèmes actuels, cette gestion est loin d’être optimale avec des bandes de fréquences entières demeurant inoccupées. Pour faire face à la demande croissante de débit, les futurs systèmes doivent tirer profit de l’utilisation très parcimonieuse du spectre afin de servir plus d’utilisateurs avec une meilleure qualité. Cela a conduit au concept des systèmes radio-cognitifs [1], où les utilisateurs sont classés en deux groupes : utilisateurs primaires et utilisateurs secondaires. Tout comme les utilisateurs des systèmes actuels, les utilisateurs primaires accèdent au spectre selon un protocole d’allocation bien défini. Les utilisateurs de type secondaire accèdent, quant à eux, au spectre de façon opportuniste. En contrepartie, ils doivent veiller à ne pas interférer avec les utilisateurs du réseau primaire qui restent prioritaires, et doivent choisir une stratégie de transmission qui leur permet de maximiser leurs débits. Récemment, des études ont considéré le cas où les utilisateurs secondaires envoient constamment des données tout en ajustant leur puissance afin de ne pas gêner les communications du réseau primaire. Ainsi, le problème de l’estimation de la puissance a été soulevé dans [2], où une méthode rapide pour son estimation a été proposée. Parmi les autres paramètres qu’il est intéressant d’estimer, figure la capacité, ou encore le débit maximal que peuvent atteindre les communications du réseau secondaire. Ceci permet par exemple, dans le cas où la transmission se fait sur plusieurs bandes de fréquences, d’aider l’utilisateur secon-

daire    sélectionner les bandes optimales qui correspondent aux débits les plus élevés. Une telle approche serait plus précise que celle consistant à évaluer la variance de bruit dans chaque bande.

Dans cet article, nous nous proposons de construire un estimateur consistant de la capacité dans le cas où le canal entre l’émetteur et le récepteur secondaires est connu, contrairement à l’interférence dont on ne connaît que quelques propriétés statistiques. Nous étudions dans un deuxième temps le comportement asymptotique de l’estimateur proposé et le comparons avec celui des méthodes conventionnelles.

Après une présentation du problème, nous rappelons dans la section 1 l’expression de l’estimateur traditionnel et montrons ses limites dans le cas où le nombre d’échantillons est faible. Puis, nous donnons l’expression de l’estimateur proposé dont la consistance a été prouvée. Nous décrivons dans la section 2 la performance asymptotique des deux estimateurs sous la forme de théorème central limite. En particulier, nous montrons que leur comportement asymptotique s’apparente à celui d’une gaussienne dont on déterminera les paramètres. Finalement, nous présentons les résultats des simulations qui attestent la précision des résultats théoriques même pour des dimensions usuelles, habituellement modestes.

## 1 Estimateurs de la capacité

### 1.1 Position du problème

Il est clair que les communications entre utilisateurs secondaires subissent de l’interférence caus  e principalement par les

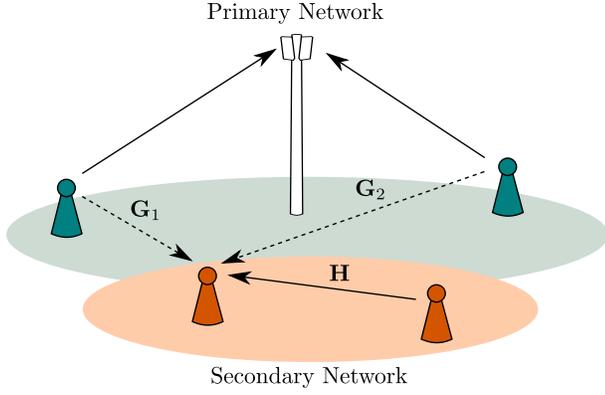


FIGURE 1 – System model.

utilisateurs primaires. Ceci influe bien évidemment sur la qualité de communication entre utilisateurs secondaires. En vue de les aider à répondre rapidement et efficacement à l'évolution de cette interférence, il est intéressant de doter les utilisateurs secondaires d'un outil leur permettant d'estimer le débit maximal auquel ils peuvent prétendre, ce qui est l'objet du présent travail.

Nous considérons un réseau cognitif composé d'un réseau primaire constitué de  $K$  transmetteurs sans fil et d'un réseau secondaire composé de deux utilisateurs qu'on désigne par transmetteur secondaire et récepteur secondaire (fig. 1). On suppose que le  $k$ -ième utilisateur du réseau primaire est équipé de  $n_k$  antennes et que le récepteur secondaire dispose de  $N$  antennes. Notons  $\mathbf{G}_k \in \mathbb{C}^{N \times n_k}$  le canal entre l'utilisateur primaire d'indexe  $k$  et le récepteur secondaire. Le canal entre le transmetteur secondaire et le récepteur secondaire est noté par  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times n_0}$  où  $n_0$  désigne le nombre d'antennes dont est équipé le transmetteur secondaire. Nous supposons que les matrices  $\mathbf{G}_k$  et  $\mathbf{H}$  sont constantes durant au moins  $M$  slots. Notons par  $\mathbf{y}_m$  le vecteur de taille  $N \times 1$  associé au signal interférant à l'instant  $m$ . Il s'écrit alors :

$$\mathbf{y}_m = \sum_{k=1}^K \mathbf{G}_k \mathbf{x}_k^{(m)} + \sigma \mathbf{w}^{(m)}$$

où  $\mathbf{x}_k^{(m)} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{I}_{n_k})$  est le signal transmis à l'instant  $m$  par le transmetteur primaire  $k$  et  $\mathbf{w}^{(m)} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{I}_N)$  désigne le bruit gaussien subi à l'instant  $m$ . En pratique, le vecteur  $\mathbf{y}_m$  pourrait être obtenu :

- soit en supprimant la contribution du signal utile au signal reçu, auquel cas, le décodage et l'estimation du canal sont supposés être parfaits,
- soit en arrêtant les communications secondaires pendant  $M$  slots.

Le débit maximal théorique (sans précodage à l'émetteur secondaire) que peut atteindre un utilisateur du réseau secondaire

est alors donné par :

$$\begin{aligned} C(\sigma^2) &= \frac{1}{N} \log \det \left( \sigma^2 \mathbf{I}_N + \sum_{k=1}^K \mathbf{G}_k \mathbf{G}_k^H + \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \\ &\quad - \frac{1}{N} \log \det \left( \sigma^2 \mathbf{I}_N + \sum_{k=1}^K \mathbf{G}_k \mathbf{G}_k^H \right), \\ &= \frac{1}{N} \log \det \left( \sigma^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{G} \mathbf{G}^H + \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \\ &\quad - \frac{1}{N} \log \det \left( \sigma^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{G} \mathbf{G}^H \right), \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_K]$ .

## 1.2 Estimateur traditionnel

Dans le cas où le canal  $\mathbf{H}$  est parfaitement estimé, une façon naturelle d'évaluer la capacité consiste à remplacer  $\mathbf{G} \mathbf{G}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N$  par  $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{y}_m \mathbf{y}_m^H$ , qui coïncide avec son estimée selon l'estimateur du maximum de vraisemblance, ce qui conduit à l'estimateur traditionnel donné par :

$$\hat{C}_{\text{trad}}(\sigma^2) = \frac{1}{N} \log \det \left( \mathbf{H} \mathbf{H}^H + \frac{\mathbf{Y} \mathbf{Y}^H}{M} \right) - \frac{1}{N} \log \det \left( \frac{\mathbf{Y} \mathbf{Y}^H}{M} \right) \quad (2)$$

où  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M]$ . Il est à noter que si le nombre de slots  $M$  est très grand, cet estimateur est consistant. En pratique, ceci est loin d'être réaliste surtout si le temps de cohérence du canal est faible, et donc  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{G}$  sont constants uniquement sur un nombre de slots réduits. Pour cette raison, il est plus intéressant de considérer le régime asymptotique dans lequel toutes les dimensions du système  $M, K$  et  $N, n_0, n = \sum_{k=1}^K n_k$  tendent à l'infini au même rythme, c'est à dire  $M, K, N, n_0, n \rightarrow +\infty$  tel que :

$$\begin{aligned} 0 &< \liminf_{M, N \rightarrow \infty} \frac{N}{n} \leq \limsup_{M, N \rightarrow \infty} \frac{N}{n} < +\infty, \\ 1 &< \liminf_{M, N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} \leq \limsup_{M, N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} < +\infty, \\ 0 &< \liminf_{N, n_0 \rightarrow \infty} \frac{n_0}{N} \leq \limsup_{N, n_0 \rightarrow \infty} \frac{n_0}{N} < +\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Dans ce régime, l'estimateur traditionnel donné par (2) est biaisé et non consistant. L'expression de son biais est donné dans ce qui suit. Elle dépendra de certaines quantités déterministes que nous définissons dans le lemme suivant :

**Lemme 1 ([3])** *L'équation fonctionnelle suivante :*

$$\kappa = \frac{1}{M} \text{tr} \left( \left( \mathbf{G} \mathbf{G}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N \right) \left( \frac{\mathbf{G} \mathbf{G}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N}{1 + \kappa} + \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right)^{-1} \right)$$

*admet une unique solution positive  $\kappa$ .*

Le biais est alors donné par :

**Théorème 1 ([3])** *Notons  $\mathbf{T} = \left( \mathbf{H} \mathbf{H}^H + \frac{\mathbf{G} \mathbf{G}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N}{1 + \kappa} \right)^{-1}$ . Alors,*

$$\hat{C}_{\text{trad}}(\sigma^2) - V \xrightarrow[N, M, n, n_0 \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0,$$

où p.s. signifie presque sûrement et :

$$V = -\frac{1}{N} \log \det(\mathbf{T}) + \frac{M}{N} \log(1 + \kappa) - \frac{M}{N} \frac{\kappa}{1 + \kappa}.$$

### 1.3 Estimateur consistant

Comme susmentionné, l'estimateur traditionnel fournit des estimées biaisées de la capacité. Aussi trouver un estimateur consistant associé au régime défini dans (3) constitue la motivation principale de notre travail. Notre étude se basera sur l'utilisation des techniques de la théorie des matrices aléatoires, dont les résultats sont très performants dès lors que les dimensions sont supposées être du même ordre de grandeur. Cette situation est très fréquente dans le domaine des communications numériques, qui est l'un des domaines où ces techniques ont été appliquées avec succès depuis les années 90.

Nous supposons que le récepteur secondaire a une parfaite connaissance du canal  $\mathbf{H}$ . Il est alors naturel que nous imposons à notre estimateur d'intégrer cette connaissance. Ceci rend notre étude plus délicate car le premier terme dans (1) dépend conjointement des vecteurs propres de  $\mathbf{H}$  et de  $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$  en plus de leurs valeurs propres respectives. Pour résoudre ces difficultés, nous nous sommes inspirés de l'approche présentée dans [4], plus appropriée aux cas où l'on doit tenir compte des vecteurs et des valeurs propres. Le théorème suivant présente l'estimateur obtenu :

**Théorème 2** *Considérons la quantité :*

$$\hat{C}_G = \frac{1}{N} \log \det \left( \mathbf{I}_N + \hat{y}_N \mathbf{H}\mathbf{H}^H \left( \frac{1}{M} \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H \right)^{-1} \right) + \frac{M-N}{N} \left[ \log \left( \frac{M}{M-N} \hat{y}_N \right) + 1 \right] - \frac{M}{N} \hat{y}_N,$$

où  $\hat{y}_N$  est l'unique solution réelle positive de l'équation suivante :

$$\hat{y}_N = \frac{\hat{y}_N}{M} \text{tr} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \left( \hat{y}_N \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{1}{M} \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H \right)^{-1} + \frac{M-N}{M}.$$

Alors, sous certaines conditions techniques :

$$\hat{C}_G - C(\sigma^2) \xrightarrow[M, N, n, n_0 \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0$$

On appelle  $\hat{C}_G$  le G-estimateur<sup>1</sup>.

## 2 Fluctuations des estimateurs

Dans ce qui suit, nous développons les résultats de fluctuations de  $\hat{C}_{\text{trad}}$  et  $\hat{C}_G$ . En particulier, nous donnons des expressions explicites de la variance et montrons que les deux estimateurs ont asymptotiquement un comportement gaussien dont on déterminera les paramètres.

1. en référence à Girko qui a dénommé G-estimation (general estimation) l'ensemble des techniques d'estimation dans ce contexte.

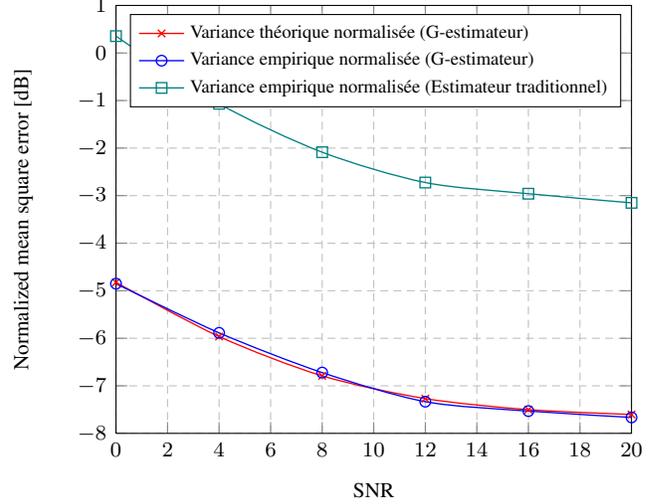


FIGURE 2 – Variances empiriques et théoriques en fonction du SNR

**Théorème 3** *Sous certaines hypothèses techniques, le G-estimateur et l'estimateur traditionnel vérifient :*

$$\frac{N}{\alpha_N} \left( \hat{C}_{\text{trad}} - V \right) \xrightarrow[N, M, n, n_0 \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1),$$

$$\frac{N}{\theta_N} \left( \hat{C}_G - C(\sigma^2) \right) \xrightarrow[N, M, n, n_0 \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1),$$

où  $\mathcal{D}$  représente la convergence en distribution et  $\alpha_N$  et  $\theta_N$  sont données par (4) et (5).

La preuve de ce théorème s'inspire profondément des méthodes développées dans [5], où l'on recourt à la technique d'intégration par partie et l'inégalité de Nash-Poincaré, outils appropriés pour les variables gaussiennes. (Pour plus de détails sur les preuves, voir notre travail [6].)

## 3 Simulations

Nous présentons dans ce qui suit les résultats de simulations qui ont été menées. Tout au long de ce paragraphe, nous considérons le cas où un récepteur secondaire muni de  $N = 4$  collecte durant  $M = 15$  créneaux des symboles de données provenant d'un émetteur secondaire disposant de  $n_0 = 4$  antennes. Nous supposons que le lien de communication subit de l'interférence provenant de  $K = 8$  utilisateurs munis d'une seule antenne. Fig 2 représente la variance théorique et empirique pour le G-estimateur  $\hat{C}_G$  en fonction du  $\text{SNR} = \frac{1}{\sigma^2}$ . Nous superposons sur le même graphe la variance empirique de l'estimateur traditionnel. Il est à noter que le G-estimateur présente une meilleure performance pour toutes les valeurs du SNR. Pour évaluer le comportement gaussien des deux estimateurs, nous représentons dans fig.3 et fig.4 l'histogramme dans le cas où le SNR est fixé à 10dB. Bien qu'on soit loin du régime asymptotique, nous notons une correspondance satisfaisante entre les résultats de simulations et les résultats théoriques.

$$\alpha_N = 2 \log(M) - \log \left( (M - N) \left( M(\kappa + 1)^2 - \text{tr} \left( \left( \frac{\mathbf{I}_N}{\kappa + 1} + \mathbf{H}\mathbf{H}^H (\mathbf{G}\mathbf{G}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \right)^{-2} \right) \right) \right), \quad (4)$$

$$\theta_N = 2 \log(My_N^*) - \log \left( (M - N) \left( M - \text{tr} \left( (\mathbf{I}_N + \mathbf{H}\mathbf{H}^H (\mathbf{G}\mathbf{G}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1})^{-2} \right) \right) \right). \quad (5)$$

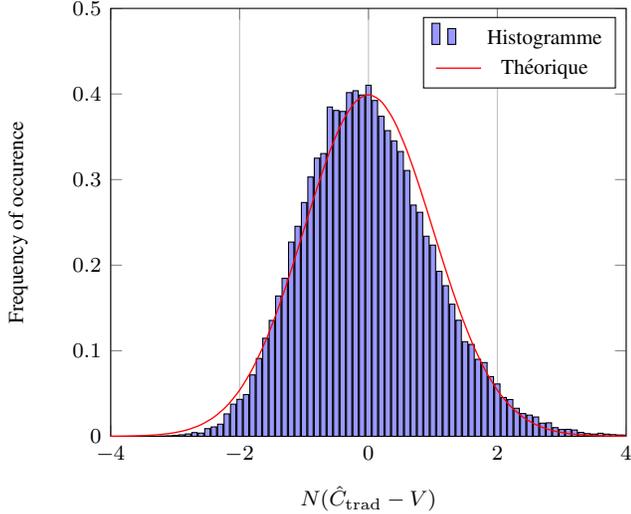


FIGURE 3 – Histogramme de  $N(\hat{C}_{\text{trad}} - V)$ .

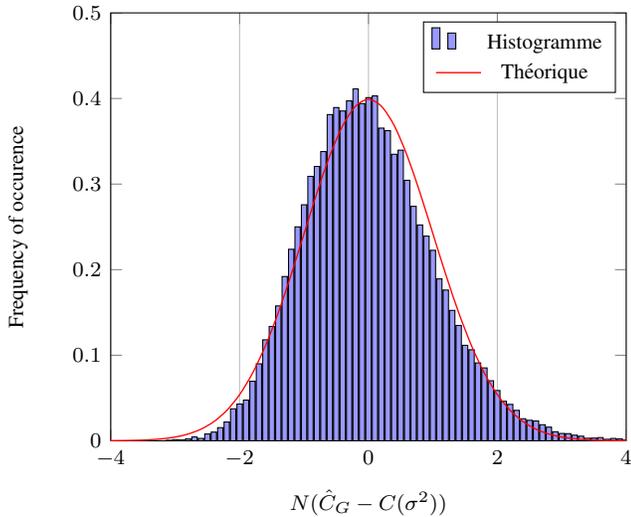


FIGURE 4 – Histogramme de  $N(\hat{C}_G - C(\sigma^2))$ .

## Conclusion

Dans ce travail, nous proposons un nouvel estimateur de la capacité pour l'évaluation rapide du débit maximal que peuvent atteindre les communications secondaires dans un réseau radio-cognitif. Nous montrons que contrairement aux méthodes classiques, notre technique fournit un estimateur consistant dans le cas où le nombre d'échantillons est réduit. Nous comparons par le biais d'études théoriques et de simulations les performances de l'estimateur proposé et de l'estimateur traditionnel, et prouvons ainsi la supériorité de notre méthode par rapport aux méthodes conventionnelles.

## Références

- [1] J. Mitola, "Cognitive Radio : An Integrated Agent Architecture for Software Defined Radio," Ph.D. dissertation, Royal Institute of Technology (KTH), May 2000.
- [2] R. Couillet, J. W. Silverstein, and M. Debbah, "Eigen-Inference for Energy Estimation of Multiple Sources," *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2011, to appear. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/1001.3934>
- [3] W. Hachem, P. Loubaton, and J. Najim, "Deterministic Equivalents for Certain Functionals of Large Random Matrices," *Annals of Applied Probability*, vol. 17, no. 3, pp. 875–930, 2007.
- [4] P. Vallet and P. Loubaton, "A G-estimator of the MIMO channel ergodic capacity," in *Proc. IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT'09)*, Seoul, Korea, Jun. 2009, pp. 774–778.
- [5] W. Hachem, O. Khorunzhy, P. Loubaton, J. Najim, and L. A. Pastur, "A new approach for capacity analysis of large dimensional multi-antenna channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 54, no. 9, 2008.
- [6] A. Kammoun, R. Couillet, J. Najim, and M. Debbah, "Performance of capacity inference methods under colored interference," *arxiv:math.PR/1105.5305v1*, 2011.