

Sur certaines performances opérationnelles de la méthode MUSIC

Anne FERRÉOL^{1,2}, Pascal LARZABAL^{2*}

¹THALES Communication
160 boulevard de Valmy, 92700 Colombes, France

²SATIE, ENS Cachan, CNRS, Universud,
61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France

anne.ferreol@fr.thalesgroup.com, pascal.larzabal@satie.ens-cachan.fr

Résumé – Dans la conception d’un système opérationnel de goniométrie, la prédiction de performances non asymptotiques est indispensable. Celles-ci ne sont actuellement accessibles qu’à travers des simulations. Cet article établit, en conditions non asymptotiques les performances (biais, variance) conditionnelles à la résolution de deux sources ainsi que la probabilité associée. D’autre part, la mise en œuvre de l’algorithme doit veiller à ne pas interpréter tous les pics du critère comme des sources réelles. La suppression de tels pics aberrants (souvent appelés « outliers ») dans la mise en œuvre est alors nécessaire et son action doit aussi être quantifiée en termes de performances. Cet article traite de ces deux différents problèmes sous l’hypothèse d’un modèle de réception conforme à la réalité.

Abstract – The design of an operational direction finding system need its performances prediction in non asymptotic condition. These performances are available through high computation cost simulations. This paper establish , in non asymptotic conditions, the performances (bias, variance and probability) conditionally to the resolution of two sources. In addition, all the picks of the algorithm criterion must not been considers as the direction of true sources. The rejection of these false picks (or outliers) is necessary and its consequences must be evaluate in term of performances. This paper focus on these two problematic assuming a realistic signal modelling.

1 Introduction

Les méthodes à haute résolution [6], dont l’algorithme MUSIC est un des plus emblématiques représentants, exhibent d’excellentes performances en asymptotique avec un grand nombre d’échantillons [7]. Les prédictions de performances de la méthode MUSIC sont alors traditionnellement établies en régime asymptotique sans se soucier de la résolution, effective ou non, des sources ou encore des problèmes d’ambiguïtés rencontrés. Or, dans la réalité opérationnelle, même pour un modèle de réception parfait, il en est tout autrement dès que le nombre d’échantillons utilisés baisse significativement.

En particulier, quand le nombre d’échantillons diminue la méthode exhibe, un pouvoir de résolution (à ne pas confondre avec la détection qui est un autre problème) trop faible pour obtenir la présence de deux pics dans le critère de goniométrie en présence du même nombre de sources. C’est ainsi que la méthode MUSIC n’arrive pas à résoudre systématiquement les sources présentes lorsque la durée d’observation est trop faible. Dans une telle configuration où le système « voit » parfois une seule source, le biais et la variance qui ne tiennent pas compte de ce manque de résolution sont difficiles à interpréter et souvent inexploitable. Les deux situations extrêmes de présence effective de soit deux soit un seul pic pour un même scénario bi-sources sont aléatoires et leur probabilité d’apparition dépend

très clairement du scénario traité. Cette variabilité, toujours rencontrée dans des systèmes opérationnels, met en défaut les études de performances statistiques qui supposent qu’il y a autant de pics que de sources à localiser [7]. En dehors de très rares travaux portant sur le seuil de résolution (écart angulaire pour une probabilité de résolution de 50%), de résultats à nombre d’échantillons fini n’existent pas à notre connaissance. En s’appuyant sur une méthodologie de calcul que nous avons récemment développée dans [4], les expressions des performances conditionnelles à une résolution sont proposées dans cet article.

Avec la même approche, nous effectuons l’étude de performances de MUSIC en présence d’éventuels pics fantômes dans le spectre (ou critère) de MUSIC. En effet ces pics sont dépendants du diagramme d’ambiguïtés et ne peuvent pas être ignorés dans la mise en oeuvre de l’algorithme. Certains travaux existent à ce sujet pour tenter d’y remédier [1]. Grâce à une technique de seuillage ad hoc du critère de MUSIC, proposé récemment dans [2] en présence d’erreurs de modèle, nous proposons une alternative simple permettant de rejeter les pics fantômes et en prédisons les performances.

2 Modélisation du signal et formulation du problème

Le modèle de réception exposé dans ce paragraphe est conforme à la réalité des signaux radioélectriques incidents à un réseau de

*Ce travail de recherche a été effectué dans le cadre du réseau d’excellence NEWCOM++ avec le numéro de contrat 216715

N capteurs. Le vecteur observation $\mathbf{x}(t)$ composé des signaux $x_n(t)$, $1 \leq n \leq N$ des capteurs du réseau s'écrit de la manière suivante sous l'hypothèse bande étroite

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) s_m(t) + \mathbf{b}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t). \quad (1)$$

où $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$ est le vrai vecteur directeur tel que $\tilde{\mathbf{a}}_m = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m)$, $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}_1 \cdots \tilde{\mathbf{a}}_M]$ et $\mathbf{b}(t)$ est le bruit additif supposé spatialement blanc avec $\mathbb{E}[\mathbf{b}(t)\mathbf{b}(t)^H] = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ ($(\cdot)^H$ est le transposé conjugué et \mathbf{I}_N la matrice identité). Le signal $s_m(t)$, composante de $\mathbf{s}(t)$, est celui de la m -ième source. En supposant que le vecteur directeur est $\mathbf{a}(\theta)$, l'algorithme MUSIC permet d'estimer les angles d'arrivées θ_m en cherchant les M plus petits minima locaux du critère

$$c(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \hat{\mathbf{\Pi}}(K) \mathbf{a}(\theta), \quad (2)$$

où $\hat{\mathbf{\Pi}}(K)$ est le projecteur bruit construit à partir des $N - M$ vecteurs propres associés aux plus faibles valeurs propres d'une estimée $\hat{\mathbf{R}}_x(K) = (\sum_{k=1}^K \mathbf{x}(t_k)\mathbf{x}(t_k)^H)/K$ de la matrice de covariance des observations $\mathbf{R}_x = \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H]$. Sachant que \mathbf{R}_x est différente de $\hat{\mathbf{R}}_x(K)$ et que $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$ est différent du vecteur $\mathbf{a}(\theta)$, les estimées $\hat{\theta}_m$ des directions des sources sont différentes des directions θ_m et le critère $c(\theta_m)$ est non nul. L'erreur d'estimation $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m - \theta_m$ est une fonction de

- $\Delta\mathbf{R}_x(K) = \hat{\mathbf{R}}_x(K) - \mathbf{R}_x$: Erreur d'estimation de la matrice de covariance qui dépend du nombre fini K d'observations.
- $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_M]$: Erreur de modèle où $\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) - \mathbf{a}(\theta_m)$.

Récemment nous avons formulé dans [3][4][2] les performances de MUSIC en présence d'erreurs de modèles lorsque K est infini et donc $\Delta\mathbf{R}_x$ nulle. L'objectif du présent article est de calculer les performances de MUSIC à temps d'intégration fini K sans erreur de modèle en établissant une dualité entre ces deux types de perturbations (K fini et erreur de modèle). En particulier, les calculs de performances consistent à donner les expressions des moments de la variable aléatoire $\Delta\theta_m$ qui est dépendante des matrices aléatoires $\Delta\mathbf{R}_x(K)$ et \mathbf{E} . On définit ainsi l'EQM de la m -ième source par $EQM_m = \sqrt{\mathbb{E}[(\Delta\theta_m)^2]}$. Une étude statistique des points aberrants du critère $c(\theta)$ pourra en particulier être effectuée grâce aux outils développés dans [2] pour un contexte d'erreur de modèle.

3 Méthodologie de prédiction des performances à temps fini

La méthodologie de calcul des performances de MUSIC est basée sur le constat que l'impact du nombre fini d'échantillons pour estimer la matrice de covariance sans erreur de modèle est le même que celui des erreurs de modèle en conditions asymptotiques (K infini). En effet les deux situations introduisent chacune, de manière très similaire une erreur sur le

projecteur bruit. La dualité est établie à l'aide de [5]. Cela nous permet de donner une approximation des erreurs d'estimation par des rapports de formes quadratiques pour lesquels nous savons développer les calculs nécessaires. Nous nous servons pour cela d'une méthodologie de calcul issue de celle que nous avons utilisée dans nos travaux récents sur l'établissement de ces performances [4] (dans un contexte d'erreur de modèle) afin d'établir les performances recherchées : biais et variance conditionnels, et probabilité de résolution. Les calculs de performances sont basés sur l'approximation suivante de l'erreur d'estimation $\Delta\theta_m$

$$\Delta\theta_m \approx -\frac{\dot{c}(\theta_m)}{\ddot{c}(\theta_m)} \quad (3)$$

qui consiste à effectuer un développement limité d'ordre 2 du critère $c(\theta)$ au voisinage de θ_m . Les variables aléatoires $\dot{c}(\theta)$ et $\ddot{c}(\theta)$ sont les dérivées première et seconde du critère $c(\theta)$ tel que

$$\begin{aligned} \dot{c}(\theta) &= 2 \operatorname{real} \left(\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \hat{\mathbf{\Pi}}(K) \mathbf{a}(\theta) \right) \\ \ddot{c}(\theta) &= 2 \operatorname{real} \left(\ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \hat{\mathbf{\Pi}}(K) \mathbf{a}(\theta) \right) + 2 \left(\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \hat{\mathbf{\Pi}}(K) \dot{\mathbf{a}}(\theta) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

sachant que $\dot{\mathbf{a}}(\theta)$ et $\ddot{\mathbf{a}}(\theta)$ sont les dérivées première et seconde de $\mathbf{a}(\theta)$. La variable aléatoire $\Delta\theta_m$ dépend des dérivées du critère de MUSIC $c(\theta)$ qui sont, comme le critère, dépendantes de la matrice aléatoire $\hat{\mathbf{\Pi}}(K)$. Ce projecteur bruit $\hat{\mathbf{\Pi}}(K)$ dépend non linéairement des matrices aléatoires $\Delta\mathbf{R}_x(K)$ et \mathbf{E} . Un développement limité de $\hat{\mathbf{\Pi}}(K)$ a été proposé en fonction de $\Delta\mathbf{R}_x(K)$ dans [5]. Lorsque $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{A} = \mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_M]$, l'expression du projecteur bruit à l'ordre 1 est la suivante

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Pi}}(K) &= \mathbf{\Pi} - \Delta\mathbf{\Pi}(K) + o(\Delta\mathbf{R}_x(K)) \\ \Delta\mathbf{\Pi}(K) &= \mathbf{\Pi} \Delta\mathbf{R}_x(K) (\mathbf{R}_y)^\# + (\cdot)^H \end{aligned} \quad (5)$$

où $\mathbf{R}_y = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H$, $\mathbf{R}_s = \mathbb{E}[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}(t)^H]$, $\mathbf{\Pi} = \mathbf{I}_N - \mathbf{A}\mathbf{A}^\#$ et $\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$. Dans [3], un développement limité de $\hat{\mathbf{\Pi}} = \hat{\mathbf{\Pi}}(K \rightarrow +\infty) = \mathbf{I}_N - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^\#$ a été proposé en fonction de \mathbf{E} lorsque $\Delta\mathbf{R}_x(K)$ est nulle. Le développement d'ordre 1 donne

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Pi}} &= \mathbf{\Pi} - \Delta\mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) + o(\mathbf{E}) \\ \Delta\mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) &= \mathbf{\Pi} \mathbf{E} (\mathbf{A})^\# + (\cdot)^H \end{aligned} \quad (6)$$

Les équations précédentes montrent que l'impact, sur la distortion du projecteur bruit, de l'erreur d'estimation de la matrice de covariance $\Delta\mathbf{R}_x(K)$ dans (5) est équivalent à celle de l'erreur de modèle \mathbf{E} dans (6). D'autre part, la matrice de covariance non bruitée \mathbf{R}_y dans (5) joue le même rôle que la matrice \mathbf{A} des vecteurs directeurs dans (6). Cette dualité entre les perturbations provoquées par le temps fini et les erreurs de modèle restent valables pour un développement limité d'ordre 2 du projecteur bruit. En conséquence, tous les résultats de nos articles sur les performances en présence d'erreur de modèle utilisant un développement limité à l'ordre 2 du projecteur bruit sont transposables au cas du temps d'intégration fini. Selon (3) et (4), on remarque que $\Delta\theta_m$ ainsi que le critère

$c(\theta)$ et ses dérivées dépendent d'une sous-fonction $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^H \hat{\mathbf{\Pi}}(K) \mathbf{v}$ qui en utilisant les résultats de [3] et la dualité entre (6) et (5) peut s'écrire

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^H \hat{\mathbf{\Pi}}(K) \mathbf{v} \approx \boldsymbol{\rho}^H \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \boldsymbol{\rho} \quad (7)$$

où $\boldsymbol{\rho} = [1 \quad \text{vec}(\Delta \mathbf{R}_x)^T \quad \text{vec}(\Delta \mathbf{R}_x)^H]^T$. Ainsi, la matrice $\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ suivante

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} q & -\mathbf{q}_{12}^H & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

est composée par $q = \mathbf{u}^H \mathbf{\Pi} \mathbf{v}$,

$$\mathbf{q}_{12} = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ((\mathbf{R}_y)^\# \mathbf{u})^* \otimes (\mathbf{\Pi} \mathbf{v}),$$

$$\mathbf{Q}_{22} = \Omega\left((\mathbf{R}_y)^\#, (\mathbf{R}_y)^\#, \mathbf{\Pi}\right),$$

$$\mathbf{Q}_{23} = \Omega\left((\mathbf{R}_y)^\#, \mathbf{\Pi}, (\mathbf{R}_y)^\#{}^H\right) \mathbf{P},$$

$$\mathbf{Q}_{32} = \mathbf{P}^H \Omega\left(\mathbf{\Pi}, (\mathbf{R}_y)^\#, (\mathbf{R}_y)^\#\right),$$

$$\mathbf{Q}_{33} = -\mathbf{P}^H \Omega\left(\mathbf{\Pi}, \mathbf{\Pi}, (\mathbf{R}_y)^\# (\mathbf{R}_y)^\#{}^H\right) \mathbf{P},$$

où \otimes est le produit de Kronecker, $\mathbf{q}_{21} = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, $\Omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = ((\mathbf{X}\mathbf{v})^* (\mathbf{Y}\mathbf{u})^T) \otimes \mathbf{Z}$, et \mathbf{P} est une matrice de permutation définie par $\text{vec}((\mathbf{U})^T) = \mathbf{P} \text{vec}(\mathbf{U})$. En utilisant (3)(4) et (7) on en déduit que

$$\Delta\theta_m \approx -\frac{\dot{c}(\theta_m)}{\ddot{c}(\theta_m)} \approx -\frac{\boldsymbol{\rho}^H \dot{\mathbf{Q}}(\theta_m) \boldsymbol{\rho}}{\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\rho}^H \ddot{\mathbf{Q}}(\theta_m) \boldsymbol{\rho}\right]} \quad (9)$$

$$c(\theta) = \boldsymbol{\rho}^H \mathbf{Q}(\theta) \boldsymbol{\rho} \quad (10)$$

où $\mathbb{E}[\cdot]$ est l'espérance mathématique.

3.1 Prédiction de performances

Les performances dépendent des statistiques de la variable $\Delta\theta_m$ qui sont dépendantes de celles du vecteur $\boldsymbol{\rho}$. La loi de Wishart nous indique que $\Delta \mathbf{R}_x(K)$ et donc $\boldsymbol{\rho}$ sont gaussiens et centrés tel que

$$\mathbb{E}[\Delta \mathbf{R}_x(i, j) \Delta \mathbf{R}_x(m, n)] = \frac{\mathbf{R}_x(i, n) \mathbf{R}_x(m, j)}{K}.$$

Les matrices $\mathbf{R}_\rho = \mathbb{E}[\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\rho}^H]$ et $\mathbf{C}_\rho = \mathbb{E}[\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\rho}^T]$ peuvent alors être déduites de l'équation précédente. D'après (9), on en déduit alors que l'EQM de la m -ième source s'écrit

$$EQM_m \simeq \sqrt{\frac{F_2\left(\dot{\mathbf{Q}}(\theta_m), \dot{\mathbf{Q}}(\theta_m)\right)}{F_1\left(\ddot{\mathbf{Q}}(\theta_m)\right)^2}} \quad (11)$$

sachant que $F_1(\mathbf{A}) = \mathbb{E}[\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\rho}] = \text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{R}_\rho)$ et

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \mathbb{E}[(\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\rho}) (\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{B} \boldsymbol{\rho})] \\ &= \text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{R}_\rho) \text{trace}(\mathbf{B} \mathbf{R}_\rho) \\ &\quad + \text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{R}_\rho \mathbf{B} \mathbf{R}_\rho) - 2[\mathbf{A}]_{11} [\mathbf{B}]_{11} \\ &\quad + \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{C}_\rho^* \mathbf{B} \mathbf{C}_\rho). \end{aligned} \quad (12)$$

avec $[\mathbf{A}]_{ij}$ le ij -ième élément de la matrice \mathbf{A} , sous l'hypothèse que $\boldsymbol{\rho}$ soit gaussien. Lorsque deux sources sont en limite de résolution ou alors lorsqu'une ambiguïté dans le spectre de MUSIC $c(\theta)$ est détectée en $\theta = \omega_p$ à la place de directions $\hat{\theta}_m$ proche de θ_m , alors l'EQM de l'équation (11) devient insuffisante pour caractériser une performance. C'est ainsi que l'on a défini dans [4] puis dans [2] des performances conditionnelles $\mathbb{E}[(\Delta\theta_m)^k | C_m]$ où $\mathbb{E}[(\Delta\theta_m)^0 | C_m]$ est la probabilité $\Pr(C_m)$ de vérifier la condition C_m . Plus particulièrement nous avons défini

- Les performances conditionnées à une résolution dans [4] où, par exemple, $C_m = \{y < 0\}$ avec $y = c(\theta_1) + c(\theta_2) - 2c(\theta_{moy})$ avec $\theta_{moy} = (\theta_1 + \theta_2)/2$.
- Les performances conditionnées à la non détection d'une ambiguïté en ω_p dans [2] où, par exemple, $C_m = \{y < 0\}$ avec $y = c(\omega_p) - c(\theta_m)$.

Les performances $\mathbb{E}[(\Delta\theta_m)^k | C_m]$ sont établies avec les expressions (12)(13)(14)(15) sous l'hypothèse que les variables aléatoires $\Delta\theta_m$ et y , qui s'écrivent sous la forme $\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\rho}$, aient convergées vers une loi gaussienne.

4 Simulations

Les simulations traitent le cas de deux sources, de même puissance $\gamma = \mathbb{E}[|s_m(t)|^2]$, de directions $\theta_1 = 0^\circ$ et $\theta_2 = 10^\circ$, incidentes à un réseau circulaire de rayon $R = 0.8\lambda$ (λ est la longueur d'onde) avec $N = 5$ capteurs. Les performances de MUSIC sont données en fonction du rapport signal sur bruit ($RSB = 10 \log_{10}(\gamma/\sigma^2)$) des deux sources corrélées à 90% ($r = [\mathbf{R}_s]_{12} / \sqrt{[\mathbf{R}_s]_{11} [\mathbf{R}_s]_{22}} = 0.9$). La matrice de covariance est estimée à temps fini avec $K = 200$ échantillons. Dans Fig.1 et Fig.2, les performances simulées sont comparées aux performances théoriques à partir d'un moyennage sur 100 réalisations. Dans la Fig.1, l'EQM estimée de la source d'incidence $\theta_1 = 0^\circ$ est comparée à la prédiction classique, disponible dans la littérature, utilisant une approximation d'ordre 1 du projecteur bruit et la prédiction proposée utilisant l'approximation d'ordre 2. On peut observer qu'en dessous de 20 dB de rapport signal sur bruit que les performances classiques s'éloignent fortement des résultats obtenus en simulations alors que la prédiction proposée est beaucoup plus proche. En dessous de 5dB de rapport signal sur bruit l'EQM converge vers une situation de non résolution en valant $|\theta_1 - \theta_2|/2 = 5^\circ$: Cela indique que les estimées des deux sources valent environ θ_{moy} . Il faut noter que les performances, correctement prédites par l'approximation d'ordre 2, entre 5dB et 20dB de rapport sur bruit correspondent à des scénarios très couramment rencontrés dans les systèmes opérationnels. Dans Fig.2, la qualité de la prédiction de la probabilité de résolution est évaluée avec le test $c(\theta_1) + c(\theta_2) < 2c(\theta_{moy})$. La figure montre que la prédiction de la probabilité de résolution est correcte et permet de vérifier que lorsque la probabilité de résolution est nulle en dessous de 5dB que l'EQM est proche de $|\theta_1 - \theta_2|/2 = 5^\circ$.

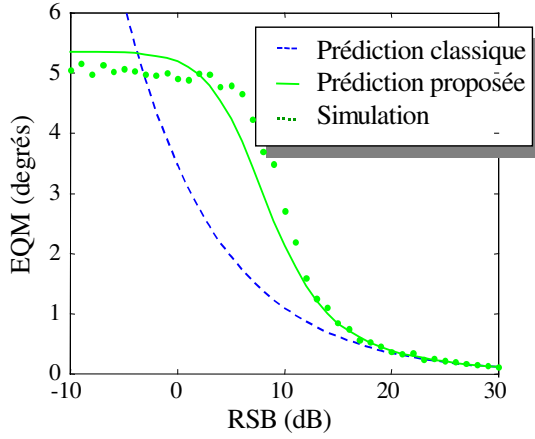


FIG. 1: EQM de la source d'incidence $\theta_1 = 0^\circ$ en présence d'une source d'incidence $\theta_2 = 10^\circ$ corrélées à 90%, $K = 200$

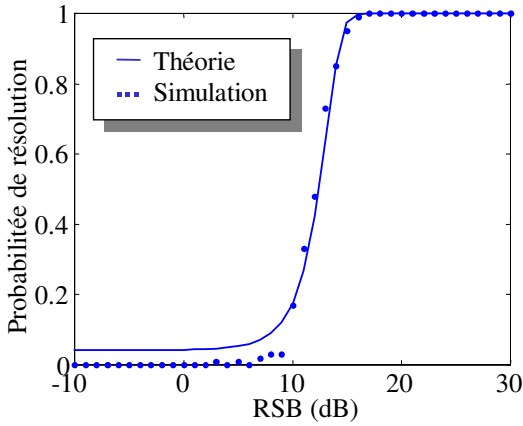


FIG. 2: Probabilité de résolution des deux sources du scenario de Fig.1

5 Conclusions

Dans cet article une stratégie de calcul a été établie pour prédire les performances de MUSIC avec un nombre fini d'observations (condition non asymptotique). Plus particulièrement, nous donnons les expressions du biais, de la variance conditionnellement à soit la résolution ou soit la suppression d'observations inexploitable par un système opérationnel. Les probabilités associées de résolution et de détection de pics des sources sont données. Les simulations montrent que les résultats classiques sont exagérément optimistes dans la zone préasymptotique. Les expressions établies dans ce papier permettent de quantifier directement, et de manière analytique, le rôle joué par les différents paramètres du système. Ces résultats principalement méthodologiques sont essentiels pour la conception et la mise en œuvre de systèmes opérationnels devant répondre à un cahier des charges.

Références

- [1] Y. Abramovich and N. Spencer. Performance breakdown of subspace-based methods in arbitrary antenna arrays: GLRT-based prediction and cure. *ICASSP*, 2004.
- [2] A. Ferréol and P. Larzabal. Operational performances of a MUSIC algorithm robust to outliers. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Prague, May 2011.
- [3] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. On the asymptotic performance analysis of subspace DOA estimation in the presence of modeling errors: Case of MUSIC. *IEEE Trans. Signal Processing*, 54(3):907–920, Mar. 2006.
- [4] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. Statistical analysis of the MUSIC algorithm in the presence of modelling errors, taking into account the resolution probability. *IEEE Trans. Signal Processing*, 58(8):4156–4166, Aug. 2010.
- [5] H. Krim, P. Forster, and JG.Proakis. Operator Approach to Performance Analysis of Root-MUSIC and Root-Min-Norm. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 40(7):1687–1696, July 1992.
- [6] L. Kopp. Détection et estimation en traitement d'antenne. *Technique de l'ingénieur*, 2003.
- [7] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood and the Cramer-Rao bound. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37:720–741, May 1989.

Annexe - Moments conditionnels dans le cas Gaussien

Dans les outils de calcul de [4] et des papiers de la même catégorie, nous avons établi des expressions des moments conditionnels lorsque les variables x et y sont Gaussiennes. On définit le moment d'ordre k conditionné à $\{y < \eta\}$ par

$$m_k^\eta(x, y) = \mathbb{E}[x^k | y < \eta]$$

où η est une constante et $m_0^\eta(x, y) = \Pr(y < \eta)$. Les expressions de ces moments dans le cas gaussien sont

$$m_0^\eta(x, y) = \int_{-\infty}^{(\eta - \mathbb{E}[y]) / \sqrt{C_{yy}}} \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}} du \quad (13)$$

$$m_1^\eta(x, y) = -\frac{C_{xy}}{C_{yy}} \Psi_y(\eta) + \mathbb{E}[x] \quad (14)$$

$$m_2^\eta(x, y) - (m_1^\eta(x, y))^2 = -\frac{(C_{xy})^2}{(C_{yy})^{3/2}} \Psi_{yy}(\eta) + C_{xx} \quad (15)$$

où $C_{xy} = \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y]$ et

$$\Psi_{yy}(\eta) = \Psi_y(\eta) \left(\eta + \sqrt{C_{yy}} \Psi_y(\eta) - \mathbb{E}[y] \right)$$

$$\Psi_y(\eta) = \Psi \left(\frac{\eta - \mathbb{E}[y]}{\sqrt{C_{yy}}} \right)$$

$$\Psi(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\int_{-\infty}^0 \exp(-u^2/2) du}$$