

# Phase géométrique des signaux polarisés en milieux aléatoires

Jérémie BOULANGER<sup>1</sup>, Nicolas LE BIHAN<sup>1</sup>, Vincent ROSSETTO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>GIPSA-Lab, DIS, CNRS UMR 5216  
961 Rue de le Houille Blanche, Domaine Universitaire, BP 46, 38402 Saint Martin d’Hères, France

<sup>2</sup>LPMMC, CNRS UMR 5493  
Maison des Magistères CNRS, 25 avenue des Martyrs, BP166, 38042 Grenoble Cedex, France  
jeremie.boulanger@gipsa-lab.grenoble-inp.fr,  
nicolas.le-bihan@gipsa-lab.grenoble-inp.fr, vincent.rossetto@grenoble.cnrs.fr

**Résumé** – Lors de la propagation dans un milieu diffusant, les ondes polarisées sont affectées par les diffuseurs à la fois dans leur direction de propagation et leur polarisation. Dans cet article, nous proposons un modèle de processus aléatoire sur le groupe des rotations avec transport parallèle qui décrit le comportement des ondes polarisées dans ce type de milieu. En particulier, notre modèle permet de prédire la distribution de la phase géométrique des ondes polarisées. Cette phase est uniquement fonction de la trajectoire de l’onde dans le milieu et caractérise donc la géométrie de celle-ci. Nous montrons également comment notre modèle prédit la dépolarisation des ondes et permet d’estimer certains paramètres du milieu diffusant.

**Abstract** – During the propagation in random media, polarized waves encounter scatterers that affect its direction of propagation and polarization. In this paper, we present a model of random process on the rotation group subject to parallel transport that allows the description of the propagation in such medium. In particular, the proposed model allows predicting the distribution of a geometric phase. This phase is of purely geometric nature and thus is only due to the geometry of the path of the wave in the medium. Finally, we show how this model allows describing the depolarization of waves and to estimate some characteristics of the random medium.

## 1 Introduction

L’étude de la propagation des ondes polarisées dans les milieux aléatoires est un problème ancien, mais toujours un domaine de recherche actif [2]. Nous présentons ici un modèle de processus aléatoire sur le groupe des rotations  $SO(3)$  permettant de décrire le comportement des ondes polarisées dans ces milieux diffusants. Cette approche pour la description de la diffusion multiple a été initialement proposée (pour le cas non polarisé) dans [3]. Dans [6, 8], nous avons montré l’intérêt du modèle pour l’estimation de paramètres du milieu aléatoire et son extension aux groupes de Lie compacts. Ici, nous montrons comment il est possible d’inclure la polarisation dans ce modèle de processus aléatoire et montrons qu’il prédit l’apparition d’une phase liée uniquement à la géométrie du chemin 3D suivi par l’onde dans le milieu : la *phase géométrique* ou *phase de Berry*. Cette phase a été initialement découverte pour les systèmes quantiques par Sir M. Berry [10]. Son existence pour les ondes classiques a été prédite par Segert [4] et mise en évidence expérimentalement pour la lumière par Tomita et Chiao [9], dans un milieu *déterministe*.

Nous proposons ici un modèle de processus aléatoire permettant le calcul de cette phase géométrique pour les ondes polarisées se propageant dans un milieu aléatoire. Le fait que cette phase soit bien liée à la trajectoire de l’onde en diffusion multiple a été montré dans [12].

## 2 Signaux polarisés et milieux aléatoires

Un milieu aléatoire est constitué de plusieurs diffuseurs dont les propriétés physiques sont différentes de celles du milieu ambiant. Les diffuseurs sont considérés de taille caractéristique du même ordre de grandeur que la longueur d’ondes des ondes qui traversent le milieu (approximation géométrique [5]). Les événements de diffusion sont supposés indépendants. L’approximation géométrique assure que l’on est dans le cas où le signal est diffusé majoritairement vers l’avant. Finalement, le nombre de diffusions subies par l’onde est supposé faible. Cette dernière hypothèse garantit que le signal en sortie du milieu n’a pas totalement “oublié” sa direction incidente originale.

### 2.1 Polarisation

Nous considérons les ondes polarisées linéairement dans la suite. Afin de décrire le comportement des signaux polarisés dans un milieu aléatoire, nous adoptons un modèle de signaux à valeurs sur le groupe des rotations  $SO(3)$ . La direction de propagation de l’onde polarisée est un vecteur unitaire (on néglige l’absorption dans le milieu)  $\mathbf{z} \in \mathcal{S}^2$  (la sphère unité dans  $\mathbb{R}^3$  est notée  $\mathcal{S}^2$ ). La polarisation est la direction de vibration de l’onde et, dans le cas des ondes électromagnétiques ou des ondes élastiques de cisaillement, elle est naturellement contrainte à osciller dans le plan orthogonal à  $\mathbf{z}$ , *i.e.* le plan tangent

à la sphère unité, noté  $T\mathcal{S}^2$ . Pour suivre le comportement de l'onde polarisée au cours du temps, on utilise un fibré à trois dimensions dans lequel l'onde est représentée par un repère mobile  $\mathcal{R}(t) = [\mathbf{x}(t) (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x})(t) \mathbf{z}(t)]$ . La figure 1 illustre ce modèle. Il est à noter que nous ne faisons pas d'hypothèse sur le contenu fréquentiel du signal. Ce modèle est général, mais on gardera à l'esprit que la notion de polarisation n'est définie que pour des composantes (dans le plan tangent  $T\mathcal{S}^2$ ) de même fréquence [1].

## 2.2 Diffusion multiple, transport parallèle et phase géométrique

Pendant la propagation dans un milieu aléatoire, la direction de propagation est déviée lors de la rencontre avec un diffuseur. En même temps, la polarisation est contrainte à rester dans le plan orthogonal à la direction de propagation  $\mathbf{z}(t)$ . Mais elle est tout de même affectée.

L'action du diffuseur peut être modélisée par une variable aléatoire de rotation. La succession des événements de diffusion lors de la propagation consistera en une accumulation de rotations aléatoires appliquées au repère initial décrivant l'onde. En notant  $r$  la rotation due à un diffuseur, et supposant qu'un seul événement de diffusion a eu lieu entre le temps  $t$  et  $t + \tau$ , on peut écrire :

$$\mathcal{R}(t + \tau) = r\mathcal{R}(t)$$

La rotation aléatoire  $r$  est caractérisée par sa densité  $f$ , qui peut être paramétrée par les angles d'Euler  $\varphi, \theta, \psi$ . Pour la polarisation, la contrainte consistant à rester dans le plan tangent  $T\mathcal{S}^2$  est en fait une contrainte de *transport parallèle* (dans le cas de la diffusion vers l'avant [4, 5]). Ce transport de la polarisation est illustré sur la figure (2). Cela se traduit sur  $f$  par :

$$f(r) = f(\varphi, \theta, \psi) = g(\theta)\delta(\varphi + \psi) \quad (1)$$

Dans cette expression de  $f$ , les diffuseurs sont supposés à symétrie sphérique. Dans le cas contraire, la fonction  $g$  dépendrait aussi de  $\varphi$ . Cette particularité du transport de la polarisation entraîne que, dans l'hypothèse de la diffusion vers l'avant, une phase géométrique (ou phase de Berry) doit apparaître [4, 5]. Cette phase doit donc être présente dans l'expression de la densité du repère  $\mathcal{R}(t)$ .

## 3 Processus aléatoire sur $SO(3)$

Nous adaptons ici un modèle de processus de Poisson composé (PPC) sur le groupe des rotations [7, 8] pour décrire l'évolution de l'onde polarisée en milieu aléatoire. Cette approche est préférée à un modèle Brownien du fait de l'hypothèse du faible nombre d'événements de diffusion que traduit parfaitement le PPC. Dans la suite, nous montrons comment le transport parallèle de la polarisation affecte le processus.

## 3.1 Transport parallèle et processus de Poisson à droite

Le transport parallèle de la polarisation impose que les rotations aléatoires ne possèdent plus que deux degrés de libertés au lieu des trois (voir eq. 1). Par exemple, dans le cas d'une rotation aléatoire paramétrée par les angles  $\varphi, \theta, \psi$  appliquée au repère standard  $I_3$  (repère à l'origine), on aura  $\varphi = -\psi$ . Dans le cas plus général d'une rotation appliquée sur un repère quelconque  $\mathcal{R}$ , la condition de transport parallèle ne pourra plus se décrire de cette manière. En effet, les angles d'Euler décrivant les repères avant et après l'évènement de diffusion dépendent de la position du repère avant la diffusion. Ainsi, il n'y a plus indépendance entre les rotations successives et le modèle de processus de Poisson composé à gauche adopté dans [6] ne peut pas être utilisé.

Il est tout de même possible d'écrire ce processus comme un processus de Poisson composé (à incréments indépendants donc, puisque c'est un processus de Lévy), mais à *droite* (c.a.d. que les rotations  $r_n$  sont accumulées par la droite). La condition du transport parallèle peut alors s'écrire à nouveau :  $\varphi = -\psi$  pour toutes les rotations. Cette condition ne dépendant pas de la position du repère auquel l'on souhaite appliquer la rotation, on se retrouve avec des rotations indépendantes. Grâce à cela, au temps  $t$ , le repère, qui a subi  $N(t)$  rotations, est décrit par :

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(0)r_0r_1 \dots r_{N(t)} = \mathcal{R}(0) \prod_{n=0}^{N(t)} r_n$$

où  $N(t)$  est un processus de Poisson indépendant des  $r_n$ . Il est alors possible d'exprimer la densité de probabilité des  $r_n$  de la manière suivante :

$$f_n(r_n) = f_n(\varphi_n, \theta_n, \psi_n) = g_n(\theta_n)\delta(\varphi_n + \psi_n)$$

Dans la suite, les diffuseurs sont considérés identiques et sphériques. Par conséquent les rotations  $r_n$  ont la même distribution  $f$ . On aura ainsi un processus à incréments identiques et indépendants à droite, i.e. un processus de Lévy à droite sur  $SO(3)$ .

## 3.2 Distribution de la phase géométrique

En considérant que  $\mathcal{R}(0) = I_3$ , la distribution  $h$  du repère  $\mathcal{R}(t)$  est donnée au temps  $t$  par :

$$h_{\mathcal{R}(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N(t) = n) f^{*[n]}$$

où  $f^{*[n]}$  est la  $n$ -convoluée de  $f$ , qui est la distribution de chaque rotation  $r_n$ .  $P(N(t) = n)$  est la probabilité d'avoir eu  $n$  événements de diffusion pendant le temps  $t$ . À l'aide du théorème de Peter-Weyl sur  $SO(3)$  [8], on obtient :

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{R}(t)} &= \sum_m \sum_{l \geq m} \omega_l \hat{h}_{m,m}^l d_{m,m}^l(\theta) \cos(m(\varphi + \psi)) \\ &= \sum_m \sum_{l \geq m} \omega_l e^{\lambda t (\hat{f}_{m,m}^l - 1)} d_{m,m}^l(\theta) \cos(m(\varphi + \psi)) \end{aligned}$$

avec  $\omega_l = 2l + 1$  (facteur de normalisation) et  $\lambda$  le paramètre de Poisson de  $N(t)$  (lié au temps moyen de diffusion). Les  $\hat{h}_{m,m}^l$  sont les *coefficients de Fourier* (cf. [8]) de la distribution  $h$  et les  $\hat{f}_{m,m}^l$  ceux de  $f$  (distribution des rotations  $r_n$ ). Ces coefficients de Fourier sont donnés (pour  $h$  par exemple, les coefficients pour  $f$  s'obtiennent de manière identique) par :

$$\hat{h}_{m,m}^l = \frac{1}{8\pi^2} \int_{SO(3)} h(\varphi, \theta, \psi) U_{mn}^l(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi$$

avec

$$U_{mn}^l(\varphi, \theta, \psi) = e^{im\varphi} d_{m,n}^l(\cos \theta) e^{in\psi}$$

et où les  $d_{m,n}^l$  sont les fonctions Wigner-d [8]. La distribution  $h(t)$  montre l'effet du transport parallèle : il y a apparition d'une phase géométrique dont la distribution est donnée par la distribution de  $\varphi + \psi$ . Sur la figure 4, on montre pour un angle  $\theta \approx 0$  (la direction de propagation de l'onde est proche de la direction de propagation initiale) la distribution de la phase géométrique prédite par notre modèle et la répartition de celle-ci obtenue par simulation Monte-Carlo de la diffusion.

### 3.3 Estimation

Dans l'expression de la densité  $h$ , deux informations sont accessibles :

- La partie contenant l'angle  $\theta$  (obtenue en intégrant sur  $\varphi$  et  $\psi$ ) peut être reliée à l'information d'anisotropie des diffuseurs et au libre parcours moyen. Il s'agit de l'information *directionnelle* de l'onde diffusée. Cette distribution tend asymptotiquement vers la distribution uniforme sur le cercle.
- La partie en  $\varphi + \psi$  (obtenue en fixant  $\theta$  et  $\psi$ , après le changement de variable  $\phi_{geom} = \varphi + \psi$ ) porte l'information d'évolution de la polarisation au cours du temps. Cette distribution tend, elle aussi, à s'uniformiser au cours du temps. La vitesse d'uniformisation de cette distribution donne l'information de *vitesse de dépolarisation* des ondes dans le milieu aléatoire.

Sur la figure 3, nous montrons l'évolution de la distribution de polarisation au cours du temps lors de la propagation dans un milieu aléatoire. On peut observer la dépolarisation de l'onde au cours de sa propagation dans le milieu qui a lieu en même temps que l'uniformisation de sa direction de propagation.

Il est ainsi possible, à l'aide du modèle de processus proposé, de prédire les distributions en sortie du milieu aléatoire. Il est également possible de résoudre de manière paramétrique le problème inverse : à partir des distributions de sortie, estimer le libre parcours moyen  $\ell = \lambda t$  et l'anisotropie des diffuseurs  $g$ . En effet, en considérant un modèle simple (à un paramètre) pour les diffuseurs (modèle de type Henyey-Greenstein [6]), il est possible de donner des expressions pour les quantités  $g$  et  $\ell$ , à un temps donné  $t$  :

$$\begin{cases} g = \frac{\ln(\hat{h}_{0,0}^2)}{\ln(\hat{h}_{0,0}^1)} - 1 \\ \ell = \frac{\ln(\hat{h}_{0,0}^2)^2}{\ln(\hat{h}_{0,0}^2) - 2\ln(\hat{h}_{0,0}^1)} \end{cases}$$

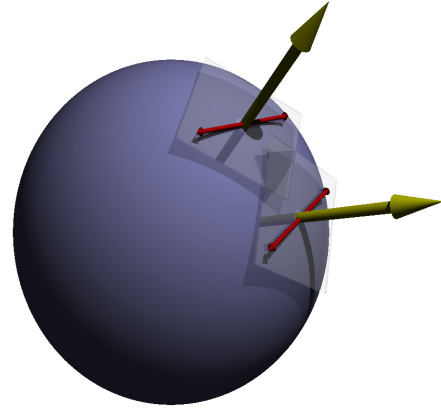


FIGURE 1 – Modèle de l'onde polarisée : vecteur *direction de propagation*  $\mathbf{z} \in \mathcal{S}^2$  (jaune) et polarisation dans le plan tangent  $\mathbf{v} \in T\mathcal{S}^2$  (rouge).

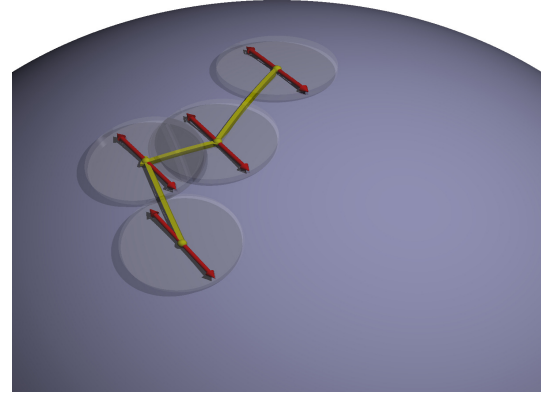


FIGURE 2 – Transport parallèle de la polarisation (vecteur rouge) à la surface de la sphère  $\mathcal{S}^2$  lors de la diffusion. Après chaque évènement de diffusion, la direction est modifiée (suivant la trajectoire en jaune) tandis que la polarisation est transportée parallèlement.

À l'aide d'estimateurs empiriques (non biaisés) sur  $\hat{h}_{0,0}^1$  et sur  $\hat{h}_{0,0}^2$ , on obtient donc un estimateur de l'anisotropie  $g$  et du libre parcours moyen  $\ell$  (distance entre deux diffusions dans le milieu). On a également directement une estimation du paramètre de Poisson  $\lambda$ .

## 4 Conclusion

La formulation de la diffusion multiple des ondes polarisées à l'aide d'un PPC à droite sur  $SO(3)$  a plusieurs avantages. Elle permet de prédire l'apparition de la phase géométrique et de donner une expression semi-analytique de sa distribution en fonction du temps. Il est également possible, grâce à la formulation *via* un processus de Lévy, de proposer des estimateurs de paramètres du milieu via une technique *méthode des mo-*

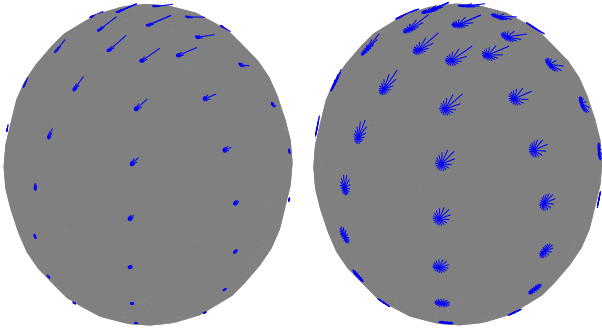


FIGURE 3 – Évolution de la distribution de la direction de propagation et de la polarisation de l’onde à deux temps ( $t_1$  à gauche,  $t_2$  à droite tels que  $t_1 < t_2$ ) différents. La longueur de chaque segment est proportionnel à la valeur de la distribution à ce point de  $SO(3)$ . La distribution du repère est un Dirac au pôle nord au temps  $t = 0$ . De même que la direction de l’onde tend à s’uniformiser au cours au temps, la direction de la polarisation tend à s’uniformiser elle aussi autour d’une direction de propagation donnée.

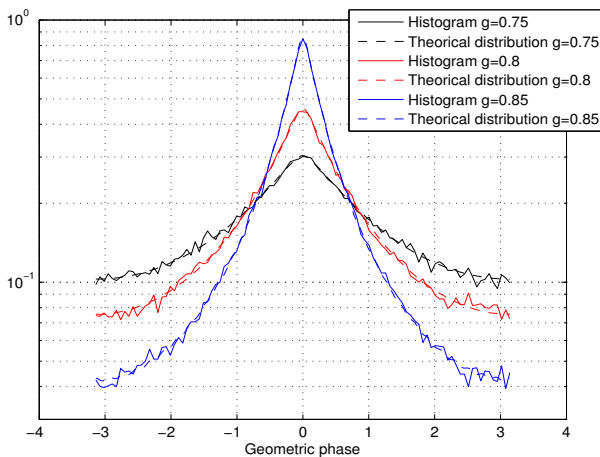


FIGURE 4 – Comparaison entre la distribution théorique de la phase géométrique prédite par notre modèle (pointillés) et la distribution obtenue par simulation Monte-Carlo de la diffusion multiple (traits pleins). La comparaison est faite pour plusieurs valeurs du paramètre d’hétérogénéité  $g$  représentant le cosinus moyen de l’angle de diffusion d’un diffuseur (anisotropie du diffuseur).

ments. Ceci est possible via des outils d’analyse harmonique non-commutative. Le développement d’autres techniques d’estimation paramétrique pour les processus à valeurs sur  $SO(3)$  ainsi que l’observation expérimentale de la phase de Berry dans les milieux aléatoires font partie des perspectives des travaux présentés.

## Références

- [1] C. Brosseau, *Fundamentals of polarized light : a statistical optics approach*, Wiley-Interscience 1998.
- [2] P. Sheng, *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*, Springer, 2006.
- [3] X. Ning, L. Papiez, & G. Sandison, *Compound Poisson process method for the multiple scattering of charged particles*, Physical Review E, Vol. 52, No. 5, pp. 5621-5633, 1995.
- [4] J. Segert, *Photon Berry’s phase as a classical topological effect*, Physical Review A, Vol. 36, No. 1, pp. 10-15, 1987
- [5] A.C. Maggs & V. Rossetto, *Writhing photons and Berry phases in polarized multiple scattering*, Physical Review Letters, Vol. 87, 253901, 2001.
- [6] N. Le Bihan & L. Margerin, *Nonparametric estimation of the heterogeneity of a random medium using Compound Poisson Process modeling of wave multiple scattering*, Physical Review E, 80, 016601, 2009.
- [7] D. Applebaum, *Compound Poisson processes and Lévy processes in groups and symmetric spaces*. Journal of Theoretical Probability, vol. 13, no. 2, pp. 383-425, 2000.
- [8] S. Said. *et al.*, *Decomposing on compact Lie groups*. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 56, Issue 6, pp. 2766-2777, 2010.
- [9] A. Tomita & R.Y. Chiao, *Observation of Berry’s topological phase by use of an optical fiber*, Physical Review Letters, Vol. 57, pp. 937-940, 1986.
- [10] M.V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proceedings of the Royal Society of London A, Vol. 392, pp. 45-47, 1984.
- [11] M.V. Berry, *The adiabatic phase and Pancharatnam’s phase for polarized light*, J. Mod. Optics, 34(11), pp. 1401-1407, 1987.
- [12] V. Rossetto, *General framework for multiple scattering of polarized waves including anisotropies and Berry phase*, Phys. Rev. E, Vol. 80, No. 5, 056605, 2009.