

Filtrage géométrique par minimisation de la fonctionnelle $TV_g + L^1$

Cédric LOOSLI, Stéphanie JEHAN-BESSON, Jonas KOKO

LIMOS, Université Blaise Pascal
CNRS UMR 6158, Complexe des Cézeaux, 63173 AUBIERE, FRANCE
cloosli@isima.fr, jehan@isima.fr, koko@isima.fr

Résumé – Nous nous intéressons à la minimisation d’une fonctionnelle $TV_g + L^1$ où la variation totale pondérée TV_g correspond au terme de régularisation et où la norme L^1 est utilisée comme terme d’attache aux données. A partir du critère, une formulation utilisant un Lagrangien augmenté avec un terme de pénalité est introduite et la minimisation est opérée via l’algorithme de relaxation par blocs d’Uzawa (UBR). Dans cet article, les propriétés géométriques du critère sont mises à profit afin de proposer un filtrage sélectif ou géométrique de certaines structures ou régions de l’image. Pour cela nous définissons une fonction g non locale intégrant l’utilisation de patches. Ainsi, à partir d’un (ou plusieurs) patch(s) de référence, nous comparons l’ensemble des patches générés par l’image afin d’établir une zone de similarité et de la lisser. Nous évaluons ici deux fonctions : la première est définie à l’aide de la distance L^2 inter-pixellique, la seconde compare les densités de probabilités de l’intensité à l’intérieur des patches à l’aide de la divergence de Kullback-Leibler. Des résultats expérimentaux montrent la faisabilité d’un tel filtrage pour enlever certaines structures géométriques ou certaines régions texturées d’une image.

Abstract – This work focuses on the minimization of the functional $TV_g + L^1$, where the weighted total variation TV_g corresponds to the regularization term and where the L^1 norm acts as the data fidelity term. Issued from the criterion, an augmented Lagrangian formulation including a penalty term is then introduced and solved using the Uzawa block relaxation (UBR) method. In this paper, we propose to take benefit from geometrical properties of the functional so as to propose a geometrical or selective filtering of some given structures or image regions. To this end, a new function g is defined by integrating non-local information through patches. More precisely, given one reference patch (or more), we compare it with the set of patches generated by the image in order to determine the similarity space to be filtered using the $TV_g + L^1$ model. Two similarity measures are evaluated within this framework. The first one is based on the L^2 distance between intensities of each patch. The second one introduces a comparison between the two probability density functions of the intensities within the patches, using the Kullback-Leibler divergence. Provided experimental results demonstrate the efficiency of this scheme to remove geometrical structures or to filter textured regions.

1 Introduction

Le “filtrage géométrique” proposé dans cet article se situe à l’interface de la segmentation et du filtrage. En effet, l’idée est de pouvoir filtrer de manière sélective certaines structures ou régions de l’image en se basant sur des propriétés géométriques ou, de manière plus générale, structurelles. Afin de réaliser un tel filtrage, nous nous plaçons dans un cadre variationnel et nous nous intéressons à la minimisation de fonctionnelles utilisant la variation totale pondérée comme terme de régularisation et la norme L^1 comme terme d’attache aux données. En effet, de telles fonctionnelles présentent d’intéressantes propriétés géométriques [14, 2, 7] qui peuvent être mises à profit non seulement pour le débruitage [10, 16] mais aussi pour la segmentation [2, 6, 12] et donc de manière intermédiaire pour le filtrage géométrique.

L’utilisation de la variation totale comme terme de régularisation pour le débruitage a été proposé initialement par Rudin Osher et Fatemi [16] où elle est associée à la minimisation de la norme L^2 comme terme d’attache aux données. Cependant comme il a été démontré dans [17], le filtrage utilisant la norme L^2 ne permet pas une préservation des contrastes de l’image, contrairement à la norme L^1 [19]. Plus récemment,

Bresson et al [2] ont proposé d’étudier la minimisation d’une variation totale pondérée par une fonction g intégrant le gradient de l’image. Cette pondération permet une meilleure préservation des contours de l’image lors du débruitage (pour des bruits Gaussien). De manière intéressante, les auteurs démontrent qu’il existe un lien entre la TV_g et le terme de minimisation de la longueur géodésique introduit par [4] pour la segmentation par contours actifs. Afin de minimiser la fonctionnelle, Bresson et al [2] proposent d’utiliser une méthode primale/duale via l’introduction d’une pénalisation, ce qui permet de converger plus rapidement vers la solution, notamment grâce à l’utilisation de l’algorithme de Chambolle [5].

Dans cet article, comme nous l’avons initialement proposé dans [10], nous introduisons une formulation basée sur un Lagrangien augmenté et un algorithme de relaxation par blocs d’Uzawa afin de minimiser la fonctionnelle $TV_g + L^1$. Un tel schéma numérique a l’avantage d’être robuste au choix du paramètre de pénalisation et autorise ainsi des traitements efficaces en temps de calcul. Ces schémas de minimisation sont ici mis à profit afin de réaliser un filtrage géométrique. Pour cela, nous proposons d’évaluer l’utilisation de fonctions g intégrant des informations non locales. Ces informations non locales peu-

vent être introduites par le biais de distances entre l'ensemble des patches de l'image et un patch de référence servant de "pattern" pour le filtrage. Notons que les méthodes par patches [8] peuvent être utilisées de manière très efficace à la fois pour le débruitage [3, 11] ou pour la segmentation [9, 1, 18]. En ce qui concerne les approches variationnelles, on peut trouver des études intéressantes sur les méthodes non-locales pour la segmentation : non-supervisées appliquées à la fonctionnelle $TV_g + L^1$ dans Bresson et Chan [1] où ils intègrent une notion de gradient non-local basé sur la distance entre patches ; supervisées dans Gilboa et Osher [9] où il faut choisir 2 zones de l'image pour initialiser l'algorithme. Notre approche est différente puisque nous proposons un lissage sélectif se basant sur les propriétés géométriques de $TV_g + L^1$ et que la distance entre patches est intégrée dans une fonction g précalculée. Nous proposons d'évaluer deux distances entre patches : l'une est basée sur une comparaison de l'intensité au niveau pixelique, l'autre utilise les densités de probabilités de l'intensité à l'intérieur des patches. Des résultats expérimentaux montrent, comment, en choisissant un patch de référence, l'algorithme permet de filtrer sélectivement certaines structures ou régions texturées.

Le modèle $TV_g + L^1$ et la méthode de minimisation sont détaillés dans la section 2. Le filtrage géométrique avec les différentes fonctions g étudiées est présenté dans la section 3.

2 Minimisation de $TV_g + L^1$

Nous expliquons brièvement comment nous arrivons au modèle du Lagrangien augmenté. Dans un souci d'espace et de lisibilité, nous utilisons la notation continue. Cependant, tel qu'il est indiqué dans [10], les travaux ont été traité en discret.

On considère la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$E(u) = \int_{\Omega} g(x)|\nabla u(x)|dx + \lambda \int_{\Omega} |u(x) - f(x)|dx, \quad (1)$$

où Ω est le domaine de l'image, λ est un paramètre réel strictement positif. La fonction f est l'image à restaurer et $u \in BV(\mathbb{R}^2)$ est la fonction recherchée qui minimisera la fonctionnelle E . La fonction $g : \Omega \rightarrow [0, 1]$ est positive, décroissante (c' est à dire $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} g(x) = 0$) et indépendante de u .

2.1 Méthode du Lagrangien augmenté

Cette méthode consiste à utiliser d'une part la formulation Lagrangienne de la fonctionnelle, d'autre part un terme de pénalisation de la contrainte. Introduisons la variable auxiliaire $p = f - u$. De la fonctionnelle (1), on peut appeler

$$J(u) := \int_{\Omega} g(x)|\nabla u(x)|dx, \quad (2)$$

$$F(p) := \lambda \int_{\Omega} |p(x)|dx, \quad (3)$$

Nous pouvons alors réécrire le problème initial de la manière suivante :

$$\min_{(u,p) \in K} E(u,p) = J(u) + F(p), \quad (4)$$

où $K = \{(u,p) \in X \times X \mid u + p - f = 0 \text{ dans } X\}$. L'avantage de cette formulation est d'avoir 2 fonctionnelles J et F indépendantes. On résout alors par la méthode du point selle. La formulation du Lagrangien augmenté est la suivante :

$$\sup_{s \in X} \inf_{(u,p) \in K} \mathcal{L}_r(u,p;s) = E(u,p) + (s, u + p - f)_X + \frac{r}{2} \|u + p - f\|_{L^2}^2, \quad (5)$$

où s est un multiplicateur de Lagrange et $r > 0$ un paramètre de pénalité. L'avantage de cette formulation réside dans le meilleur conditionnement de l'algorithme au choix du paramètre r [10] qui est plus simple en rendant l'algorithme plus robuste. En effet, le choix de r n'influe pas sur le résultat final, ce qui permet aussi d'accélérer la convergence.

2.2 Algorithme UBR

Nous exhibons brièvement l'algorithme utilisé dans [10] qui se base sur l'algorithme UBR (Uzawa Block Relaxation). Il se déroule en 3 étapes :

Après initialisation des données $p^{-1}, s^0, r > 0$, on calcule successivement u^k, p^k et s^k pour $k \geq 0$ de la manière suivante :

Étape 1. Trouver $u^k \in X$ tel que

$$\mathcal{L}_r(u^k, p^{k-1}; s^k) \leq \mathcal{L}_r(v, p^{k-1}; s^k), \quad \forall v \in X. \quad (6)$$

On obtient alors $u^k = f - p^{k-1} + \frac{1}{r}(\nabla \cdot v_*^k - s^k)$, où v_*^k est la solution du problème dual qui est calculé à l'aide de l'algorithme de Chambolle [5].

Étape 2. Trouver $p^k \in X$ tel que

$$\mathcal{L}_r(u^k, p^k; s^k) \leq \mathcal{L}_r(u^k, q; s^k), \quad \forall q \in X. \quad (7)$$

On obtient :

$$p^k = \begin{cases} 0, & \text{si } |s^k + r(u^k - f)| \leq \lambda, \\ f - u^k - \frac{1}{r} \left[s^k - \lambda \frac{s^k + r(u^k - f)}{|s^k + r(u^k - f)|} \right], & \\ \text{si } |s^k + r(u^k - f)| \geq \lambda. \end{cases}$$

Étape 3. Mettre à jour le multiplicateur de Lagrange

$$s^{k+1} = s^k + r(u^k + p^k - f).$$

3 Un filtrage géométrique

Des travaux montrent des liens étroits entre le modèle $TV + L^1$ et la géométrie des objets (voir entre autres les travaux d'Aujol et al. [7], ou encore Chan et Esedoglu [19]). Dans [7], les auteurs montrent que le paramètre d'échelle λ agit en fonction du rapport périmètre sur aire des objets à lisser. Certaines zones de l'image vont donc tendre à disparaître avant d'autres. Lorsque le paramètre λ est choisi assez faible, toutes les textures de l'image seront lissées comme on peut le voir sur l'exemple de la Fig. 1. Afin de pouvoir filtrer de manière sélective l'une des textures, nous proposons de mettre à profit les propriétés géométriques de la TV_g (section 3.1) en utilisant des fonctions g non locales (section 3.2).

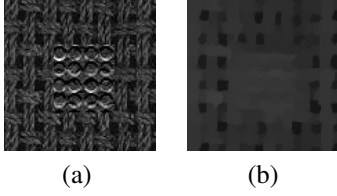


FIGURE 1 – (a) : Image originale (110×110) comportant 2 textures. (b) : Résultat avec $TV + L^1$ ($\lambda = 0.7$).

3.1 Propriétés de $TV_g + L^1$

Le modèle $TV_g + L^1$ permet d'intégrer un lissage variable au travers de la fonction g . Cette dernière permet donc une certaine souplesse pour le lissage. Elle fait son apparition dans le modèle étendu de Bresson et al [2] qui est la jonction entre le modèle ROF [16] et le modèle de contour actif issu des travaux de Caselles et al [4]. Ils utilisent alors la fonction $g(x) = 1/(1 + |\nabla f(x)|)$ [1, 2, 4, 13] qui influe sur l'évolution de la courbe en la stoppant lorsqu'elle arrive sur les contours d'objets de l'image. Pour le débruitage, cette même fonction s'intègre bien dans le problème du bruit Gaussien. En effet, elle autorise une forte variation sur les zone de fort gradient (représentatifs des contours). Dans le même esprit, nous proposons une fonction g adaptée au bruit impulsionnel dans [10].

3.2 TV_g non-locale

Nous définissons donc la fonction g à l'aide de patches. Soit x un point de Ω . On appelle P_x le patch centré en x qui définit un voisinage de x . Les patches utilisés sont choisis de forme rectangulaires et nous notons Ω_P le domaine associé. Soit un point p appartenant à Ω_P , $P_x(p)$ dénote ainsi l'intensité au point p à l'intérieur du patch centré en x . On définit T_x telle que :

$$T_x : y \in \Omega \rightarrow T_x(y) = \begin{cases} \beta_1, & \text{si } d(P_x, P_y) < \epsilon, \\ \beta_2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\epsilon > 0$. On choisit de prendre $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 0.01$. Enfin on pose $g(y) = G_\tau * T_x(y)$, où G_τ est un noyau Gaussien centré de variance τ qui est une régularisation de la fonction T_x . Nous proposons alors 2 distances différentes pour la construction de g .

3.2.1 Distance L^2 -interpixellique

Afin d'étudier la ressemblance entre deux patches de l'image P_x et P_y , nous proposons d'utiliser dans un premier temps la distance euclidienne entre deux patches :

$$d_{L^2}(P_x, P_y) = \sqrt{\int_{\Omega_P} |P_x(p) - P_y(p)|^2 dp} \quad (8)$$

Cette distance reste cependant très locale et dépendante du choix du patch de référence. Afin de limiter ces problèmes, les patches peuvent être estimés par une moyenne autour d'une fenêtre entourant le patch comme cela est fait dans la méthode des NL-means [3]. Une autre solution peut consister à utiliser

une distance avec un noyau de pondération Gaussien variant en fonction de la distance au centre ([15]).

3.2.2 Divergence de Kullback-Leibler

Afin d'utiliser une description globale des patches, nous proposons d'étudier également la densité de probabilité (pdf) de l'intensité à l'intérieur de chaque patch. Notons ainsi q_{P_x} la pdf de I^* à l'intérieur du patch P_x avec I^* la variable aléatoire associée à l'intensité I . La densité de probabilité du patch de référence sera noté q_{ref} . Nous considérons alors la divergence de Kullback-Leibler de q_{P_x} par rapport à q_{ref} qui s'écrit de la manière suivante :

$$d_{KL}(q_{P_x}, q_{ref}) = \int_{\chi} q_{ref}(I) \log \left(\frac{q_{ref}(I)}{q_{P_x}(I)} \right) dI \quad (9)$$

avec $\chi \subset \mathbb{R}$ le domaine de définition de l'intensité.

Notons que la divergence de KL est toujours positive et correspond à mesurer l'espérance du log de $\frac{q_{ref}}{q_{P_x}}$ sous la loi q_{ref} . Notons également que l'estimation des densités de probabilité à l'intérieur des patches est délicate en raison du faible nombre d'échantillons. Afin de pallier ce problème, une solution consiste à utiliser une densité de probabilité estimée par le biais d'un patch moyen calculé par la méthode des NL-means [3]. Dans ce papier, nous nous limiterons à l'utilisation des histogrammes issus des patches non lissés.

4 Résultats expérimentaux

4.1 Distance inter-pixellique

Un premier exemple de filtrage sélectif avec la distance (8) est donné dans la Fig. 2. Comme cela y est observé, en sélectionnant un patch dans l'image 2.a, l'une des textures est filtrée alors que la seconde est conservée. Ce résultat peut être comparé au lissage global obtenu avec $g = 1$ (voir Fig. 1). Ainsi, grâce à l'ajout de la fonction non-locale g , l'une des régions de l'image est lissée de manière sélective.

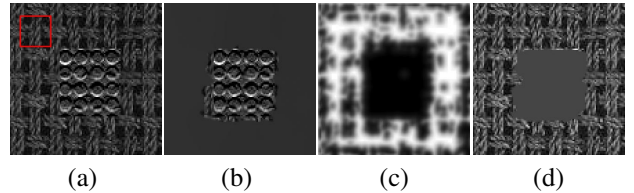


FIGURE 2 – (a) : Choix du patch de référence, (b) : Résultat avec $TV_g + L^1$ (patches 21×21) ($\lambda = 0.07$, $r = 20$). (c) : Fonction g non locale (d_{L^2}). (d) : fonction $p = f - u$

Ce type de filtrage peut également être mis à profit pour enlever des structures géométriques de l'image comme nous le montrons Fig. 3 où le grillage est lissé de manière sélective par le biais du choix de deux patches de référence. Notons que l'on peut aussi retrouver dans [10] un exemple de filtrage directionnel.

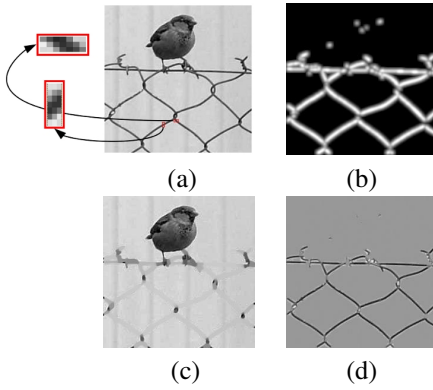


FIGURE 3 – (a) : Image originale (256×256). (b) : Fonction g non locale. (c) : Résultat avec $TV_g + L1$ (patches 3×7 et 7×3) ($\lambda = 0.07, r = 20$). (d) Fonction $p = f - u$

4.2 Divergence de Kullback-Leibler

Il s'avère que la distance euclidienne échoue lorsque la région à filtrer ne possède pas une structure répétitive. L'utilisation de divergences entre les pdfs de l'intensité à l'intérieur des patches permet de considérer de manière plus globale les composantes du motif sans se limiter à sa structure. Dans les Fig. 4 et 5, un exemple est donné pour lequel les deux distances ont un comportement différent pour les mêmes patches de référence. Nous avons choisi 4 textures différentes avec les textures 1 et 3 de répartition d'intensité assez similaire (Fig. 4). La patch de référence est choisi dans la texture 3.

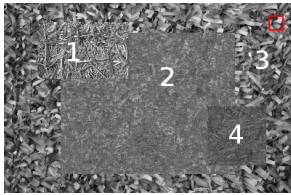


FIGURE 4 – Image originale (402×262) comportant 4 textures.

Comme on peut le voir dans la Fig. 5.a, la carte des distances pour d_{L2} nous indique que le patch sélectionné dans la texture 3 est plus proche des textures 2 et 4. La carte des divergences d_{KL} (Fig. 5.c) permet d'obtenir une classification plus cohérente mais ne parvient pas à différencier les textures 1 et 3. Ceci est dû au fait que les patches de ces deux textures ont des histogrammes similaires. Afin de pouvoir utiliser à la fois les propriétés statistiques et structurelles du patch, il pourrait être intéressant d'utiliser une combinaison de la distance inter-pixellique et de la divergence entre pdfs.

Références

- [1] X. Bresson and T. F. Chan. Non-local unsupervised variational image segmentation models. *UCLA C.A.M. Report 08-67*, 2008.
- [2] X. Bresson, P. Vandergheynst, and S. Osher et al. Fast global minimization of the active contour/snake model. *J. Math. Imaging Vis.*, 28 :151–167, 2007.
- [3] A. Buades, B. Coll, and J. M. Morel. A review of image denoising algorithms, with a new one. *Simul.*, 4 :490–530, 2005.

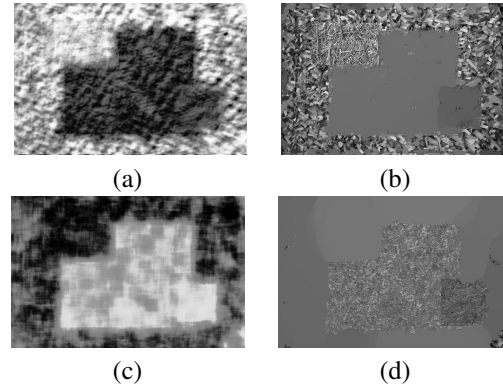


FIGURE 5 – (a) : carte des distances (d_{L2}) (Du blanc au noir : de plus en plus proche), (b) : Résultat avec la distance euclidienne interpixellique ($\lambda = 0.1, r = 20$), (c) : carte des divergences (d_{KL}) (Du blanc au noir : de plus en plus proche), (d) : Résultat avec la divergence de Kullback (patches 21×21) ($\lambda = 0.1, r = 20$)

- [4] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *Int. J. Computer Vis.*, 22(1) :61–79, 1997.
- [5] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *JMIV*, 20 :89–97, 2004.
- [6] Jérôme Darbon and Marc Sigelle. Image restoration with discrete constrained total variation part i : Fast and exact optimization. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 26(3) :261–276, 2006.
- [7] V. Duval, J. Aujol, and Y. Gousseau. The TV L1 model : a geometric point of view. *Multiscale Model. Simul.*, 8 :154–251, 2009.
- [8] Alexei Efros and Thomas Leung. Texture synthesis by non-parametric sampling. In *International Conference on Computer Vision*, pages 1033–1038, 1999.
- [9] Gilboa G. and Osher S. Non local linear image regularization and supervised segmentation. *SIAM MMS* 6(2), pages 595–630, 2007.
- [10] Jonas Koko and Stéphanie Jehan-Besson. An augmented lagrangian method for TVg L1-norm minimization. *J. Math. Imaging Vis.*, 38 :182–196, Nov. 2010.
- [11] C. Louchet and L. Moisan. Total variation as a local filter. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011.
- [12] Werlberger M., Pock T., Unger M., and Bischof H. A variational model for interactive shape prior segmentation and real-time tracking.
- [13] R. Malladi, J. Sethian, and B. Vemuri. Evolutionary fronts for topology-independent shape modeling and recovery. *Springer Berlin / Heidelberg*, 800 :1–13, 1994.
- [14] Mila Nikolova, Selim Esedoglu, and Tony F. Chan. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 66(5) :1632–1648, 2006.
- [15] G. Peyre. Image processing with non-local spectral bases. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 7(2) :703–730, 2008.
- [16] Leonid I. Rudin, Stanley Osher, and Emad Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Phys. D*, 60 :259–268, November 1992.
- [17] D. M. Strong and T. F. Chan. Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization. In *Inverse Problems*, pages 165–187, 2000.
- [18] V.T. Ta, A. Elmoataz, and O. Lézoray. Non local pdes-based morphology on weighted graphs for image and data processing. *IEEE transactions on Image Processing*, 20(6) :1504–1516, June 2011.
- [19] S. Esedoglu T.F. Chan. Aspects of total variation regularized L1 function approximation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v65 i5 :1817–1837, 2004.