

# Estimation d'attitudes dans les réseaux de capteurs

Mikael CARMONA<sup>1</sup>, Olivier MICHEL<sup>2</sup>, Jean-Louis LACOUME<sup>1,2</sup>, Nathalie SPRYNSKI<sup>1</sup>, Barbara NICOLAS<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CEA-Leti

MINATEC Campus, 17 avenue des Martyrs, 38054 Grenoble Cedex 9, France

<sup>2</sup>Gipsa-Lab

961 rue de la Houille Blanche, BP 46 F- 38402 Grenoble Cedex, France

mikael.carmona@cea.fr, olivier.michel@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

**Résumé** – Les capteurs multi-composantes, comme les accéléromètres tri-axiaux, retournent des mesures vectorielles exprimées dans leur propre repère. Pour interpréter les mesures d'un tel capteur, il faut connaître son orientation par rapport à un repère absolu *i.e.* son attitude absolue. On s'intéresse dans cet article à l'estimation d'attitudes absolues dans les réseaux de capteurs multi-composantes à partir d'une matrice d'attitudes relatives *i.e.* attitude d'un capteur relativement au repère d'un autre capteur. Ce problème, analogue au problème de localisation via une matrice des distances, est introduit via le formalisme des quaternions. Cette approche permet d'exprimer une solution analytique dans le cas où toutes les attitudes relatives sont connues. Une expérimentation avec des systèmes réels a été mise en oeuvre afin de valider la méthode d'estimation dans un cas concret.

**Abstract** – Measures of multi-components sensors, like tri-axial accelerometers, are provided in their own axis system. To interpret the measures of such a sensor, it is necessary to know its orientation with respect to an absolute axis system *i.e.* its absolute attitude. In this article, our interest is focused on retrieving absolute attitudes of sensors of a distributed network using a relative attitudes matrix *i.e.* a matrix containing attitudes of sensors relatively to axis systems of other sensors. This problem, similar to the localisation problem using an Euclidean distance matrix, is solved using the quaternion formalism. This approach allows to derive an analytical solution when all relative attitudes are known. An experimentation with real systems has been realised in order to validate our estimation method in a real case.

## 1 Introduction.

Ce papier s'intéresse à l'estimation d'attitudes absolues dans les réseaux de capteurs déployés, l'attitude absolue<sup>1</sup> d'un capteur étant son orientation par rapport à un repère absolu. L'estimation d'attitudes a des applications dans le domaine de la capture de mouvements, notamment en navigation spatiale [9] et aéronautique [3] ainsi qu'en biomédical [6]. Généralement, les systèmes utilisés permettent de retrouver directement l'attitude du capteur [3]. Or, le déploiement des réseaux de capteurs multi-composantes mène à des configurations où l'on ne peut pas centraliser les données et seule l'attitude d'un capteur par rapport à un autre est accessible, on parle d'attitude relative. L'objectif est alors de reconstruire les attitudes des capteurs à partir des attitudes relatives et d'attitudes déjà connues dites de références. Ce problème que nous appellerons SNA (*Sensor Network Attitude* problem) n'est pas sans rappeler le problème SNL (*Sensor Network Location* problem) de localisation dans les réseaux de capteurs via la matrice des distances euclidiennes [2].

L'organisation du papier est la suivante. Dans la **section 2**, on introduit l'ensemble des quaternions et leur lien avec les rotations de l'espace. Ceci est utilisé pour formaliser le problème

SNA. L'algorithme de résolution est détaillé dans la **section 3**. Enfin, la **section 4** est dédiée à la validation de l'algorithme sur des mesures réelles.

## 2 Formalisation du problème SNA.

### 2.1 Quaternions et matrice de quaternions.

Un quaternion  $\mathbf{q}$  est un élément de la forme  $\mathbf{q} := q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$  où les  $q_n$ ,  $n = 1 \dots 4$ , sont des nombres réels et  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  vérifient  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$ . L'ensemble des quaternions, noté  $\mathbb{H}$ , est une algèbre non commutative qui généralise l'algèbre des nombres complexes. On définit  $\bar{\mathbf{q}} := q_0 - \mathbf{i}q_1 - \mathbf{j}q_2 - \mathbf{k}q_3$  le quaternion conjugué de  $\mathbf{q}$  et  $|\mathbf{q}| := (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}$  la norme de  $\mathbf{q}$ . On note  $\mathbb{S}$  l'ensemble des quaternions unitaires *i.e.* de norme 1. On rappelle les relations suivantes :  $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{p}}$  et  $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = |\mathbf{q}|^2$ .

On note  $\mathbb{H}^{M \times N}$  l'ensemble des matrices de quaternions de taille  $M \times N$ ,  $\text{Tr}$  l'opérateur trace et  $*$  l'opérateur qui transpose et conjugue. La norme de Frobenius d'une matrice  $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbb{H}^{M \times N}$  est  $\|\underline{\mathbf{A}}\|_F := \text{Tr}(\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{A}}^*)^{1/2}$ . Une matrice hermitienne  $\underline{\mathbf{A}}$  est une matrice qui vérifie  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^*$ .  $\mathbb{H}$  étant non commutative, toute matrice carrée à des valeurs propres à droite et à gauche qui peuvent être différentes. Dans cet article, nous

1. Pour alléger la rédaction, on simplifiera "attitude absolue" par "attitude" lorsque qu'il n'y a pas d'ambiguïté.

aurons uniquement besoin de considérer les valeurs propres à droite. Afin d'alléger la rédaction, le sens ne sera plus précisé dans la suite. On peut montrer que toute matrice hermitienne  $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbb{H}^{N \times N}$  a uniquement des valeurs propres réelles et qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée *i.e.* il existe  $\underline{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}^{N \times N}$  telle que  $\underline{\mathbf{U}} \underline{\mathbf{U}}^* = \underline{\mathbf{I}}_N$  et  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{U}} \underline{\mathbf{\Gamma}} \underline{\mathbf{U}}^*$  où  $\underline{\mathbf{I}}_N$  est la matrice identité de taille  $N$ ,  $\underline{\mathbf{\Gamma}} := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  est la matrice diagonale qui contient les valeurs propres de  $\underline{\mathbf{A}}$  [10].

## 2.2 Quaternions unitaires, rotations 3D et attitudes.

Toute rotation 3D est caractérisée par un angle  $\theta$  et un vecteur  $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ . La matrice de la rotation d'angle  $\theta$  et de vecteur  $\underline{\mathbf{u}} := [\alpha \beta \gamma]$  exprimé dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  peut être paramétrée par le quaternion unitaire  $\mathbf{q} := \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\mathbf{u}$ , où  $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ , via la transformation [3] :

$$\underline{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

Cette paramétrisation est utile car elle permet de manipuler des rotations 3D dans l'algèbre des quaternions.

On fixe pour toute la suite un repère  $\mathfrak{R}_0$  que l'on choisit comme repère absolu. Soit  $\mathfrak{R}$  le repère d'un capteur à trois composantes. L'attitude (absolue) d'un capteur est la rotation 3D qui transforme  $\mathfrak{R}$  en  $\mathfrak{R}_0$ . Comme toute rotation 3D peut être paramétrée par un quaternion unitaire, l'attitude d'un capteur peut aussi être paramétrée par un quaternion unitaire. Dans la suite, on ne distinguera pas l'attitude, la rotation et le quaternion unitaire associé.

## 2.3 Énoncé et critère.

Soit  $N$  capteurs à trois composantes de repères  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_N$  et d'attitudes  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$  rangées dans le vecteur des attitudes  $\underline{\mathbf{Q}} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N]^T$ . Un capteur dont l'attitude est connue est dit de référence. Soit  $\underline{\mathbf{Q}}_r$  le sous-vecteur de  $\underline{\mathbf{Q}}$  contenant les quaternions associés aux références, c'est le vecteur des références. L'attitude relative entre le capteur  $m$  et le capteur  $n$  est la rotation qui transforme  $\mathfrak{R}_m$  en  $\mathfrak{R}_n$ . Cette rotation est représentée par le quaternion  $\mathbf{q}_{m,n} := \mathbf{q}_m \bar{\mathbf{q}}_n$ . On a  $\mathbf{q}_{m,n} = \bar{\mathbf{q}}_{n,m}$ . Ces quaternions sont rangés dans la matrice des attitudes relatives  $\underline{\mathbf{A}}$ . On pourra noter que :

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{Q}}^* \quad (1)$$

Dans toute la suite, les variables chapeautées par  $\sim$  sont les variables dont on dispose (entrées de l'algorithme) et qui sont éventuellement bruitées, et, les variables chapeautées par  $\hat{\sim}$  sont les variables estimées pendant et par l'algorithme. Une variable non chapeautée est une variable théorique (non bruitée).

Le problème SNA consiste à estimer le vecteur des attitudes  $\underline{\hat{\mathbf{Q}}}$  à partir d'une matrice des attitudes relatives bruitées  $\underline{\hat{\mathbf{A}}}$  et d'une matrice des références  $\underline{\hat{\mathbf{Q}}}_r$  aussi bruitée. Il est difficile

d'extraire de cette formulation un critère à minimiser qui inclut les informations a priori sur le bruit (via le théorème de Bayes, par exemple). On discutera de la difficulté de modéliser le bruit sur les attitudes relatives dans la section 4. En l'absence d'information a priori sur le bruit, on cherche à minimiser le critère des moindres carrés suivant :

$$\underline{\hat{\mathbf{Q}}} := \arg \max_{\underline{\mathbf{P}} \in \mathbb{S}^{N \times 1}, \underline{\mathbf{P}}_r = \underline{\hat{\mathbf{Q}}}_r} \|\underline{\hat{\mathbf{A}}} - \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{P}}^*\|_F^2 \quad (2)$$

où  $\underline{\mathbf{P}}_r$  désigne le sous-vecteur de  $\underline{\mathbf{P}}$  associé aux références. On peut montrer que la résolution de ce problème est NP-difficile, même en retirant la contrainte  $\underline{\mathbf{P}} \in \mathbb{S}^{N \times 1}$  (*i.e.*  $\underline{\mathbf{P}}$  parcourt  $\mathbb{H}^{N \times 1}$ ), en le comparant au problème SNL [2]. Tout estimateur de  $\underline{\hat{\mathbf{Q}}}$  est donc sous-optimal.

## 3 Algorithme de résolution.

### 3.1 Description.

L'algorithme s'inspire de la résolution du problème SNL par une approche de type MDS (Multidimensional Scaling) dont on trouvera l'origine et la description dans [7]. L'idée est de résoudre le problème non bruité et d'utiliser cette solution dans le cas bruité. La résolution du problème non bruité se fait en deux étapes. On recherche un vecteur de quaternions  $\underline{\mathbf{R}}$  solution de  $\underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}^* = \underline{\mathbf{A}}$ . Toute solution de cette équation, appelée solution particulière, est proportionnelle à droite au vecteur des attitudes *i.e.* il existe un quaternion  $s$  tel que  $\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{R}} s$  (cf. annexe 6.1 pour la preuve de ce résultat). La deuxième étape consiste à estimer  $s$  grâce aux références. A l'aide de ce quaternion et d'une solution particulière on peut estimer  $\underline{\hat{\mathbf{Q}}}$ . On détaille maintenant comment ces deux étapes sont réalisées.

### 3.2 Estimation d'une solution particulière.

En l'absence de bruit, on montre via la relation (1) que  $\underline{\hat{\mathbf{A}}}$  est une matrice hermitienne de valeurs propres :  $N$  (nombre de capteurs), d'ordre 1 et 0, d'ordre  $N - 1$ . De plus,  $\underline{\hat{\mathbf{Q}}}$  est un vecteur propre de  $\underline{\hat{\mathbf{A}}}$  associé à l'unique valeur propre non nulle  $N$ . En pratique,  $\underline{\hat{\mathbf{A}}}$  est bien hermitienne mais bruitée. Dans ce cas,  $N$  n'est plus valeur propre et les valeurs propres nulles en l'absence de bruit ont une amplitude non nulle. L'idée consiste à estimer un vecteur propre  $\underline{\hat{\mathbf{R}}} \in \mathbb{H}^{N \times 1}$  de  $\underline{\hat{\mathbf{A}}}$  associé à sa plus grande valeur propre  $\hat{\lambda}$ . Cette étape est réalisée en adaptant la méthode de la puissance itérée [8] aux matrices de quaternions hermitiennes (cf. annexe 6.2).

### 3.3 Estimation de l'isométrie et du vecteur des attitudes.

Pour estimer  $s$ , on utilise le fait que l'isométrie qui échange  $\underline{\hat{\mathbf{R}}}$  en  $\underline{\hat{\mathbf{Q}}}$  et la même que celle qui échange  $\underline{\hat{\mathbf{R}}}_r$  en  $\underline{\hat{\mathbf{Q}}}_r$ . On cherche alors à minimiser le critère des moindres carrés suivant :

$$\hat{s} := \arg \max_{t \in \mathbb{H}} \|\underline{\hat{\mathbf{Q}}}_r - \underline{\hat{\mathbf{R}}}_r t\|_F^2 \quad (3)$$

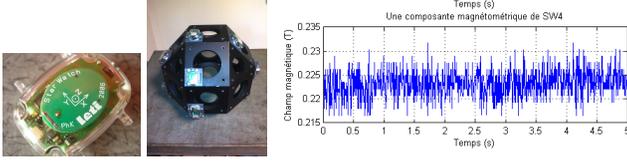


FIGURE 1 – De gauche à droite. Une star Watch. Le rhombicuboctaèdre instrumenté par 9 Star Watch. Une mesure de l’accéléromètre et du magnétomètre du capteur 4.

On peut montrer sans aucune difficulté que la solution est donnée par l’équation normale que l’on écrit :

$$\hat{\mathbf{s}} = \left( \hat{\mathbf{R}}_r^* \hat{\mathbf{R}}_r \right)^{-1} \left( \hat{\mathbf{R}}_r^* \tilde{\mathbf{Q}}_r \right) \quad (4)$$

Le vecteur des attitudes peut alors être estimé par le vecteur  $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{s}}$  dont on normalise chaque composante afin d’obtenir un vecteur de quaternions unitaires. On trouvera dans [1] une preuve de la robustesse de cet algorithme, des bornes sur les erreurs ainsi qu’une étude de la complexité algorithmique.

## 4 Validations expérimentales.

### 4.1 Configuration.

Pour valider expérimentalement l’algorithme de résolution, on utilise des Star Watch développées par le CEA-Leti. Une Star Watch (figure 1) est un système combinant un accéléromètre triaxial et un magnétomètre triaxial. Les mesures sont échantillonnées à 200 Hz et quantifiées sur 12 bits par le système, puis les données sont envoyées à un dispositif d’acquisition par un protocole de communication sans fil. L’intérêt d’un tel système est la possibilité d’estimer l’attitude du système à partir de ses données accélérométriques et magnétométriques lorsque celui-ci est immobile (cf. sous-section suivante).

Le protocole mis en oeuvre consiste à disposer 9 Star Watch  $SW_1, \dots, SW_9$  sur un rhombicuboctaèdre (figure 1) et d’enregistrer les données du réseau de capteurs immobiles pendant 5 secondes (pour information, on représente en figure 1 la configuration expérimentale ainsi qu’une composante de l’accéléromètre et du magnétomètre de  $SW_4$ ). Le repère absolu choisi correspond à la face supérieure du rhombicuboctaèdre. La géométrie connue du rhombicuboctaèdre permet de connaître le vecteur des attitudes théoriques  $\underline{\mathbf{Q}}$  et la matrice des attitudes relatives théoriques  $\underline{\mathbf{A}}$ .

### 4.2 Estimation des attitudes relatives.

On décrit ici l’algorithme utilisé pour estimer les attitudes relatives entre chaque paire de Star Watch qui seront les données d’entrée pour notre algorithme de résolution du problème SNA.

Pour toute Star Watch immobile, l’accéléromètre mesure le champ de pesanteur  $\underline{\mathbf{g}}$  et le magnétomètre mesure le champ magnétique terrestre  $\underline{\mathbf{h}}$ , tous deux exprimés dans le repère du capteur. Pour  $m = 1 \dots 9$  et  $t \in [0, 5s]$ , on notera  $[\underline{\mathbf{g}}]_{\mathfrak{R}_m}(t)$  la mesure de l’accéléromètre et  $[\underline{\mathbf{h}}]_{\mathfrak{R}_m}(t)$  la mesure du magnétomètre de  $SW_m$ . On peut écrire les fonctions de mesures suivantes :

$$[\underline{\mathbf{g}}]_{\mathfrak{R}_n}(t) = \underline{\mathcal{R}}(\mathbf{q}_{m,n})[\underline{\mathbf{g}}]_{\mathfrak{R}_m}(t) + \underline{\mathbf{b}}_{m,n}^g(t) \quad (5)$$

$$[\underline{\mathbf{h}}]_{\mathfrak{R}_n}(t) = \underline{\mathcal{R}}(\mathbf{q}_{m,n})[\underline{\mathbf{h}}]_{\mathfrak{R}_m}(t) + \underline{\mathbf{b}}_{m,n}^h(t) \quad (6)$$

où  $\underline{\mathcal{R}}$  est défini en (1),  $\mathbf{q}_{m,n}$  est le quaternion unitaire associé à l’attitude relative entre les capteurs  $m$  et  $n$ , et,  $\underline{\mathbf{b}}_{m,n}^g$  et  $\underline{\mathbf{b}}_{m,n}^h$  sont les contributions des bruits de mesures associés respectivement aux accéléromètres et aux magnétomètres de  $SW_m$  et  $SW_n$ . Ces derniers sont des processus stationnaires, gaussiens et centrés<sup>2</sup>. On néglige la dépendance entre chaque composante d’un capteur de sorte que les matrices de covariance  $\Gamma_{m,n}^g$  et  $\Gamma_{m,n}^h$  de  $\underline{\mathbf{b}}_{m,n}^g$  et  $\underline{\mathbf{b}}_{m,n}^h$  soient diagonales. Dans ce cas, l’estimateur optimal de  $\mathbf{q}_{m,n}$  est défini implicitement par le problème de minimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{q}}_{m,n} := \arg \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{S}} \left\| \Gamma_{m,n}^g \left( \underline{\mathbf{g}}_n - \underline{\mathcal{R}}(\mathbf{q})\underline{\mathbf{g}}_m \right) \right\|_F^2 + \left\| \Gamma_{m,n}^h \left( \underline{\mathbf{h}}_n - \underline{\mathcal{R}}(\mathbf{q})\underline{\mathbf{h}}_m \right) \right\|_F^2 \quad (7)$$

où  $\underline{\mathbf{g}}_m, \underline{\mathbf{g}}_n, \underline{\mathbf{h}}_m$  et  $\underline{\mathbf{h}}_n$  sont les vecteurs obtenus en moyennant les mesures associées sur toute la durée d’enregistrement (5 secondes). Pour résoudre ce problème, nommé problème de Wahba [9], on utilise un algorithme classique [4] basé sur l’algorithme de décomposition en valeurs singulière.

On remarquera qu’il est difficile d’expliciter la densité de probabilité de  $\hat{\mathbf{q}}_{m,n}$  sachant la densité de probabilité de  $\underline{\mathbf{b}}_{m,n}^g$  et  $\underline{\mathbf{b}}_{m,n}^h$ . Plusieurs simulations ont été effectuées dans le but d’approcher la densité de  $\hat{\mathbf{q}}_{m,n}$  par une densité classique (Gauss, Poisson, etc.) sans succès. La difficulté provient de la contrainte sur la norme des quaternions. On pourra trouver une discussion approfondie de ce problème dans [5].

L’algorithme d’estimation d’attitudes relatives présenté ci-dessus est utilisé pour déterminer les 36 attitudes relatives  $\mathbf{q}_{m,n}$  avec  $1 \leq m < n \leq 9$ . Les attitudes relatives sont ensuite rangées dans la matrice des attitudes relatives bruitées  $\hat{\underline{\mathbf{A}}}$ . La figure 2 représente (à gauche) les erreurs en entrée, c’est à dire sur les attitudes relatives calculées à partir de  $\hat{\underline{\mathbf{A}}}$  et  $\underline{\mathbf{A}}$ . On a  $e(\underline{\mathbf{A}}) := \|\hat{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\mathbf{A}}\|_F / \|\underline{\mathbf{A}}\|_F \approx 2 \times 10^{-4}\%$ .

### 4.3 Estimation des attitudes.

On teste maintenant notre algorithme. On choisit d’avoir un seul capteur de référence,  $SW_1$ . On applique l’algorithme avec

2. Ces hypothèses ont fait l’objet de vérifications expérimentales

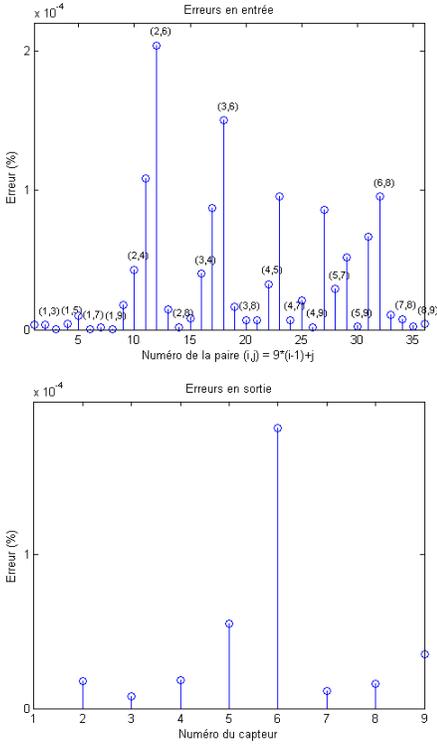


FIGURE 2 – Gauche : Erreurs en entrée. Droite : Erreurs en sortie. Les erreurs sont exprimées en pour cent.

pour entrées la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  et le vecteur des références  $\tilde{\mathbf{Q}}_r$ , qui contient donc uniquement l'attitude du capteur  $SW_1$ . Le vecteur des attitudes estimées est noté  $\hat{\mathbf{Q}}$ . La figure 2 représente (à droite) les erreurs en sortie, c'est-à-dire sur les attitudes, calculées à partir de  $\hat{\mathbf{Q}}$  et  $\mathbf{Q}$ . On a  $\epsilon(\mathbf{Q}) := \|\hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}\|_F / \|\mathbf{Q}\|_F \approx 1.8 \times 10^{-4}\%$ . Ces résultats valident la fiabilité de l'algorithme dans une situation réelle. En observant les erreurs sur les attitudes relatives des couples qui contiennent  $SW_6$  et l'erreur sur l'attitude de  $SW_6$ , on remarque que l'algorithme a conservé la répartition des erreurs.

## 5 Conclusion.

Nous avons formalisé le problème SNA en utilisant l'algèbre des quaternions. Un algorithme de résolution de ce problème dans le cas d'une matrice d'attitudes relatives complète a été décrit. L'algorithme a été validé en simulations (cf. [1]) et sur des données réelles justifiant ainsi l'applicabilité de l'algorithme à des situations concrètes.

En perspective, il sera intéressant d'étudier une version distribuée de cet algorithme afin d'améliorer son fonctionnement dans des situations réelles. D'autre part, on pourra développer l'étude de la densité de probabilité de la matrice d'attitudes relatives afin de calculer une borne de Cramer-Rao et d'adapter notre algorithme pour qu'il soit efficace (connaissant la densité du bruit en entrée bien sûr).

## Références

- [1] M. Carmona et al. *Algorithm for Sensor Network Attitude Problem Using Quaternion Theory*, arXiv :1104.1317v1, 2011.
- [2] N. Krislock, H. Wolkowicz, *Explicit sensor network localization using semidefinite representations and facial reductions*, SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(5) :2679-2708.
- [3] J.B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences*, Princeton University Press, 1998, ISBN-13 : 978-0691058726.
- [4] F.L. Markley, *Attitude determination using vector observations and the singular value decompositions*, Journal of Astronautical Sciences 36, 1988, 245-258.
- [5] F.L. Markley, *Attitude estimation or quaternion estimation ?*, Journal of Astronautical Sciences 52, 2004, 221-238.
- [6] R.E. Mayagoitia, A.V. Nene, P.H. Veltink, *Accelerometer and rate gyroscope measurement of kinematics : an inexpensive alternative to optical motion analysis systems*, Journal of Biomechanics 35, 2002, 537-542.
- [7] W.S. Torgerson, *MultiDimensional Scaling : Theory and Method*, Psychometrika 17, 1952.
- [8] D.S. Watkins, *Fundamentals of matrix computations*, Wiley-Interscience, 2002, ISBN-13 : 978-0471213949.
- [9] G. Wahba, *A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude*, SIAM Review, 1965.
- [10] F. Zhang, *Quaternions and Matrix of Quaternions*, Linear Algebra And Its Applications, 1998, 251 :21-57.

## 6 Annexes.

### 6.1 Isométrie des solutions particulières.

**Théorème 1.**  $\forall \mathbf{R} \in \mathbb{S}^N, \mathbf{Q} \mathbf{Q}^* = \mathbf{R} \mathbf{R}^* \Leftrightarrow \exists \mathbf{s} \in \mathbb{S}, \mathbf{Q} = \mathbf{R} \mathbf{s}$ .

*Preuve.* La preuve de la réciproque est immédiate. Soit  $\mathbf{R} \in \mathbb{S}^N$  vérifiant les hypothèses du théorème 1 et soit  $\mathbf{s} = \frac{1}{N} \mathbf{R}^* \mathbf{Q} \in \mathbb{H}$ . En multipliant à droite par  $\mathbf{Q}$  l'égalité  $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^* = \mathbf{R} \mathbf{R}^*$  on obtient bien  $\mathbf{Q} = \mathbf{R} \mathbf{s}$ . De plus, cette dernière égalité implique que  $\mathbf{s}$  est unitaire car  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  contiennent des quaternions unitaires.

### 6.2 Méthode de la puissance itérée pour des matrices de quaternions hermitiennes.

On présente la méthode de la puissance itérée pour des matrices de quaternions hermitiennes via le théorème suivant :

**Théorème 2.** Soit  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times N}$  une matrice hermitienne de valeurs propres (à droite)  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_N|$ . Soit  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N$  une base propre (à droite) de  $\mathbb{H}^N$  associée à  $\mathbf{A}$ . Soit  $\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i \mathbf{a}_i$  un vecteur de  $\mathbb{H}^N$  avec  $\mathbf{a}_1 \neq 0$ . La suite définie par :  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k$  vérifie  $\|\mathbf{x}_{k+1}\| / \|\mathbf{x}_k\| \rightarrow \lambda_1$  et  $\mathbf{x}_k$  tend vers un vecteur propre de  $\mathbf{A}$  associé à  $\lambda_1$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

*Preuve.* Pour tout entier  $k$ ,  $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i \lambda_i^k \mathbf{a}_i$ , et donc  $\lambda_1^{-k} \mathbf{x}_k$  tend vers  $\mathbf{U}_1 \mathbf{a}_1$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Il est aisé de conclure avec cette limite.

Il est intéressant de noter que la méthode de la puissance itérée s'étend aux matrices de quaternions hermitiennes car elles sont diagonalisables et toutes leurs valeurs propres commutent avec tous les quaternions (car elles sont réelles). On notera de plus que même si  $\mathbf{U}_1$  est inconnue, la condition  $\mathbf{a}_1 \neq 0$  est toujours vérifiée "grâce" aux incertitudes numériques. Enfin, comme dans le cas complexe [8], on améliore la convergence en considérant les suites  $\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k / \|\mathbf{x}_k\|$  et  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{v}_k$  qui vérifient  $\|\mathbf{x}_{k+1}\| / \|\mathbf{x}_k\| \rightarrow \lambda_1$  et  $\mathbf{v}_k$  tend vers un vecteur propre de  $\mathbf{A}$  associé à  $\lambda_1$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .