

Identifiabilité partielle de mélanges trilineaires de sources linéairement dépendantes *

Xijing GUO^{1,2}, Sebastian MIRON¹, David BRIE¹, Alwin STEGEMAN³

¹Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Nancy-Université, CNRS
Boulevard des Aiguillettes, B.P. 70239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

²Department of Information and Communication Engineering, Xi'an Jiaotong University, 710049 Xi'an, China

³Heijmans Institute for Psychological Research
University of Groningen, Grote Kruisstraat 2/1, 9712 TS Groningen, The Netherlands
Sebastian.Miron@cran.uhp-nancy.fr

Résumé – Dans ce papier nous étudions l'identifiabilité partielle des modèles trilineaires de mélange de type CANDECOMP/PARAFAC, présentant des dépendances linéaires entre les sources dans au moins l'un des modes (diversités). Pour ce cas, nous démontrons deux conditions suffisantes garantissant l'identifiabilité d'un seul des trois modes. Nous montrons également que si l'un des modes est identifiable, alors le modèle de départ se décompose de façon unique en somme de sous-blocs dont l'identifiabilité peut être déterminée indépendamment.

Abstract – In this paper we study the partial identifiability of three-way CANDECOMP/PARAFAC source mixture models, presenting linear dependencies in at least one mode (diversity). For this special case, we prove two sufficient conditions ensuring identifiability of only one mode. Furthermore, we show that if one mode is identifiable, then the initial CP model can be uniquely decomposed in a sum of subarrays for which identifiability can be independently assessed.

1 Introduction

Un aspect essentiel en séparation de sources est relatif à l'*identifiabilité* du modèle de mélange garantissant la détermination *de façon unique* des sources et des coefficients de mélange. Classiquement, la résolution des problèmes de séparation de sources est fondée sur une factorisation bilinéaire du mélange qui, en général, n'est pas unique. Afin de palier ce problème de non-unicité, des contraintes supplémentaires telles que l'indépendance, la parcimonie ou la positivité des sources et/ou coefficients de mélange [1] sont souvent utilisées dans la pratique.

Selon les applications, une autre façon de régulariser le problème de séparation est l'utilisation d'une troisième diversité, permettant de passer d'un modèle de mélange bilinéaire à un modèle trilineaire. Une des décompositions trilineaires les plus utilisées dans la pratique est CANDECOMP/PARAFAC¹(CP), introduite indépendamment par Carroll et Chang [2] et Harshman [3]. Cette décomposition possède des propriétés d'identifiabilité particulièrement attrayantes et une polyvalence qui explique qu'elle a été employée dans des domaines aussi variés que la chimométrie, l'industrie alimentaire, les télécommunications et le traitement du signal. Pour une revue générale de CP et de ses applications, le lecteur pourra consulter les articles

[4, 5]. La décomposition CP permet d'exprimer un tenseur (tableau multidimensionnel) comme somme de tenseurs de rang 1. Pour un tenseur \mathcal{X} d'ordre trois et de dimensions $I \times J \times K$, sa décomposition en somme de R tenseurs de rang 1 est donnée par $\mathcal{X} = \sum_{r=1}^R (\mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r)$, où $(\mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r)$ est un tenseur de rang 1, exprimé comme le produit tensoriel (noté \circ) de trois vecteurs \mathbf{a}_r ($I \times 1$), \mathbf{b}_r ($J \times 1$) et \mathbf{c}_r ($K \times 1$), correspondant aux trois modes (dimensions) du tenseur. Une notation plus concise pour CP est

$$\mathcal{X} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rrbracket \quad (1)$$

avec $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_R]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_R]$ et $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_R]$ les matrices dont les colonnes contiennent les vecteurs des trois modes. La popularité de CP est principalement due à ses propriétés d'unicité sous de faibles contraintes, souvent satisfaites dans les applications pratiques, impliquant ainsi l'identifiabilité des mélanges analysés. L'un des résultats les plus importants d'unicité est dû à Kruskal [6] qui a montré que la décomposition en termes de rang 1, exprimée par l'équation (1), est unique² si

$$k_{\mathbf{A}} + k_{\mathbf{B}} + k_{\mathbf{C}} \geq 2R + 2 \quad (2)$$

où $k_{\mathbf{A}}$ dénote le rang de Kruskal³ (ou le k-rang) de la matrice \mathbf{A} . La condition de Kruskal est nécessaire et suffisante pour

2. Dans cette communication, l'unicité est définie à un facteur d'échelle près et à une permutation simultanée des colonnes des trois matrices près.

3. Le rang de Kruskal d'une matrice \mathbf{A} , noté $k_{\mathbf{A}}$, est le nombre maximum $\ell \in \mathbb{N}$ tel que tout sous-ensemble de ℓ colonnes de \mathbf{A} forme une famille libre.

1. CANDECOMP/PARAFAC sont les abréviations de « CANonical DE-COMPosition » [2] et « PARAllel FACTor decomposition » [3].

l'identifiabilité du modèle CP dans le cas où $R = 2$ ou 3 [7]. Si des dépendances linéaires sont présentes dans les colonnes des trois matrices, impliquant le non-respect de (2), l'identifiabilité du modèle (1) n'est plus garantie, et des phénomènes de non-identifiabilité ou d'*identifiabilité partielle* peuvent apparaître. Des cas d'identifiabilité partielle ont été rapportés pour la première fois par Harshman dans [3] : certaines colonnes de \mathbf{A} , \mathbf{B} ou \mathbf{C} peuvent être estimées de façon unique, tandis que d'autres sous-ensembles de colonnes sont identifiables à une rotation près. Récemment, ce phénomène d'identifiabilité partielle a suscité beaucoup d'intérêt et un certain nombre de résultats a été publié. Dans [8], ten Berge présente des résultats d'unicité partielle pour quelques cas particulier de tenseurs dont les entrées ont été tirées aléatoirement à partir d'une distribution continue. Bro *et al.* [9] donne une réponse quant à l'unicité partielle des tenseurs dont les matrices de deux modes sont de rang plein et quelques conjectures concernant les autres cas. Des résultats plus complets et plus généraux ont été démontrés par Stegeman *et al.* dans [10], basés sur l'analyse de rang d'une matrice construite à partir des matrices de contraintes (qui fixent les dépendances linéaires dans les trois modes). Néanmoins, ces résultats sont assez difficilement utilisables dans les applications liées à la séparation des sources.

Dans la section suivante, nous proposons trois nouveaux résultats d'unicité partielle qui complètent les résultats de [10] et offrent l'avantage d'être faciles à vérifier en pratique. Ces résultats seront illustrés par un exemple numérique dans la section 3 et suivis par quelques conclusions dans la section 4.

2 Les nouveaux résultats d'identifiabilité partielle du modèle de mélange trilineaire

Les deux premiers résultats sont des versions « allégées » de la condition de Kruskal, garantissant l'identifiabilité d'une seule des trois matrices correspondant aux trois modes de la décomposition CP.

Théorème 1 *Rappelons le modèle CP de \mathcal{X} donné par (1). Si la condition $\text{rang}(\mathbf{A}) + k_{\mathbf{B}} + k_{\mathbf{C}} \geq 2R + 2$ est vérifiée, alors la matrice \mathbf{A} peut être déterminée de façon unique à partir de \mathcal{X} .*

Démonstration. La démonstration repose sur le résultat suivant démontré pour la première fois par Kruskal dans [6] :

Lemme 1 (Le lemme de permutation de Kruskal [6]) *Etant données deux matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times R}$ et $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{I \times R}$, si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^I$ tel que $\omega(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}}) \leq R - \text{rang}(\bar{\mathbf{A}}) + 1$ on a $\omega(\mathbf{x}^H \mathbf{A}) \leq \omega(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}})$, alors \mathbf{A} et $\bar{\mathbf{A}}$ sont les mêmes à un facteur d'échelle et une permutation de colonnes près ($\omega(\mathbf{x})$: le nombre d'éléments non-nuls du vecteur \mathbf{x}).*

Supposons maintenant qu'il existe trois autres matrices $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, et $\bar{\mathbf{C}}$ satisfaisant $\mathbf{A}(\mathbf{C} \odot \mathbf{B})^T = \bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{C}} \odot \bar{\mathbf{B}})^T$. Alors, $\forall \mathbf{x}$ tel que

$\omega(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}}) \leq R - \text{rang}(\bar{\mathbf{A}}) + 1$, on peut écrire $(\mathbf{C} \odot \mathbf{B})\mathbf{A}^T \mathbf{x}^* = (\bar{\mathbf{C}} \odot \bar{\mathbf{B}})\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{x}^*$ ce qui est équivalent à

$$\mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{x}^H \mathbf{A}) \mathbf{C}^T = \bar{\mathbf{B}} \text{diag}(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}}) \bar{\mathbf{C}}^T. \quad (3)$$

Notons $\gamma = \omega(\mathbf{x}^H \mathbf{A})$ et $\bar{\gamma} = \omega(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}})$. En utilisant les propriétés du rang d'un produit de matrices, nous obtenons

$$\text{rang}[\bar{\mathbf{B}} \text{diag}(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}}) \bar{\mathbf{C}}^T] \leq \text{rang}[\text{diag}(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}})] = \bar{\gamma}. \quad (4)$$

Supposons, sans perdre en généralité, que les γ premiers éléments de $\mathbf{x}^H \mathbf{A}$ sont non-nuls, et que $\bar{\mathbf{B}}$ et $\bar{\mathbf{C}}$ sont les matrices correspondantes, composées des γ premières colonnes de $\bar{\mathbf{B}}$ et $\bar{\mathbf{C}}$. Alors,

$$\begin{aligned} \text{rang}[\bar{\mathbf{B}} \text{diag}(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}}) \bar{\mathbf{C}}^T] &\geq \text{rang}(\bar{\mathbf{B}}) + \text{rang}(\bar{\mathbf{C}}) - \gamma \\ &\geq \min(\gamma, k_{\bar{\mathbf{B}}}) + \min(\gamma, k_{\bar{\mathbf{C}}}) - \gamma \end{aligned} \quad (5)$$

où la première inégalité est due à l'inégalité de Sylvester [11] et où la seconde résulte d'un résultat démontré par Sidiropoulos et Liu [12], *i.e.* $\min(\gamma, k_{\bar{\mathbf{B}}}) \leq k_{\bar{\mathbf{B}}} \leq \gamma$. En combinant (3), (4) et (5), nous obtenons

$$\bar{\gamma} \geq \min(\gamma, k_{\bar{\mathbf{B}}}) + \min(\gamma, k_{\bar{\mathbf{C}}}) - \gamma. \quad (6)$$

Une conséquence directe de la condition du théorème 1 est que $k_{\mathbf{B}} + k_{\mathbf{C}} \geq R + 2$, ce qui implique (voir [13]) que le produit $\mathbf{C} \odot \mathbf{B}$ est de rang colonne plein. Ainsi, nous pouvons déduire la relation d'inégalité suivante

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}[\mathbf{A}(\mathbf{C} \odot \mathbf{B})^T] = \text{rang}[\bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{C}} \odot \bar{\mathbf{B}})^T] \leq \text{rang}(\bar{\mathbf{A}}) \quad (7)$$

La condition du théorème 1 peut également s'écrire comme $k_{\mathbf{B}} + k_{\mathbf{C}} - (R + 1) \geq R - \text{rang}(\mathbf{A}) + 1$, qui avec l'équation (7) donne $k_{\mathbf{B}} + k_{\mathbf{C}} - (R + 1) \geq R - \text{rang}(\bar{\mathbf{A}}) + 1$. En utilisant la condition du lemme 1, *i.e.* $\omega(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}}) \leq R - \text{rang}(\bar{\mathbf{A}}) + 1$, nous obtenons $k_{\bar{\mathbf{B}}} + k_{\bar{\mathbf{C}}} - (R + 1) \geq \bar{\gamma}$.

Pour terminer la démonstration, nous étudions l'équation (6) pour les trois cas possibles $\gamma > \max(k_{\bar{\mathbf{B}}}, k_{\bar{\mathbf{C}}})$, $\min(k_{\bar{\mathbf{B}}}, k_{\bar{\mathbf{C}}}) < \gamma \leq \max(k_{\bar{\mathbf{B}}}, k_{\bar{\mathbf{C}}})$ et $\gamma \leq \min(k_{\bar{\mathbf{B}}}, k_{\bar{\mathbf{C}}})$. Au vu des résultats obtenus précédemment, uniquement le troisième cas est possible. Cela implique (éq. (6)) $\bar{\gamma} \geq \gamma$, ce qui, d'après le lemme de permutation, signifie que \mathbf{A} et $\bar{\mathbf{A}}$ sont les mêmes. \square

Il est évident que si $\text{rang}(\mathbf{A}) = k_{\mathbf{A}}$, la condition du théorème 1 devient identique à la condition de Kruskal, impliquant l'identifiabilité des trois matrices. Le théorème suivant affaiblit d'un ordre de grandeur la condition du théorème 1, dans le cas où les rangs et k-rangs des matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} sont distincts.

Théorème 2 *Si, dans (1), $k_{\mathbf{B}} < \text{rang}(\mathbf{B})$, $k_{\mathbf{C}} < \text{rang}(\mathbf{C})$ et $\text{rang}(\mathbf{A}) + k_{\mathbf{B}} + k_{\mathbf{C}} \geq 2R + 1$, alors la matrice \mathbf{A} peut être déterminée de façon unique à partir de \mathcal{X} .*

Démonstration. La démonstration de ce théorème est très similaire à la démonstration du théorème 1. En suivant le même raisonnement que précédemment, nous obtenons

$$\bar{\gamma} \geq \min(\gamma, k_{\bar{\mathbf{B}}}) + \min(\gamma, k_{\bar{\mathbf{C}}}) - \gamma \quad (8)$$

et

$$k_{\bar{\mathbf{B}}} + k_{\bar{\mathbf{C}}} - R \geq R - \text{rang}(\bar{\mathbf{A}}) + 1 \geq R - \text{rang}(\bar{\mathbf{A}}) + 1 \geq \bar{\gamma}. \quad (9)$$

Suivant les valeurs de γ , trois cas sont possibles :

1. si $\gamma > \max(k_{\mathbf{B}}, k_{\mathbf{C}})$, alors (8) et (9) donnent $k_{\mathbf{B}} + k_{\mathbf{C}} - R \geq k_{\mathbf{B}} + k_{\mathbf{C}} - \gamma$, impliquant $\gamma = R$. Par conséquent, $\text{diag}(\mathbf{x}^H \mathbf{A})$ est de rang plein et nous pouvons écrire

$$\bar{\gamma} \geq \text{rang}[\mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{x}^H \mathbf{A}) \mathbf{C}^T] \geq \text{rang}(\mathbf{B}) + \text{rang}(\mathbf{C}) - \gamma \quad (10)$$

où la première inégalité s'obtient à partir de (3) et (4) et la deuxième est due à l'inégalité de Sylvester. A partir de (9) et (10) on obtient $k_{\mathbf{B}} = \text{rang}(\mathbf{B})$ et $k_{\mathbf{C}} = \text{rang}(\mathbf{C})$, ce qui contredit les hypothèses.

2. si $\min(k_{\mathbf{B}}, k_{\mathbf{C}}) < \gamma \leq \max(k_{\mathbf{B}}, k_{\mathbf{C}})$, alors (8) devient $\bar{\gamma} \geq \min(k_{\mathbf{B}}, k_{\mathbf{C}})$. On peut re-écrire la relation (9) comme $\min(k_{\mathbf{B}}, k_{\mathbf{C}}) + \max(k_{\mathbf{B}}, k_{\mathbf{C}}) - R \geq \bar{\gamma}$. Il en résulte $\max(k_{\mathbf{B}}, k_{\mathbf{C}}) \geq R$, ce qui est également impossible compte tenu des hypothèses.
3. si $\gamma \leq \min(k_{\mathbf{B}}, k_{\mathbf{C}})$, l'équation (8) donne $\bar{\gamma} \geq \min(\gamma, k_{\mathbf{B}}) + \min(\gamma, k_{\mathbf{C}}) - \gamma = \gamma$.

L'étude des trois cas montre que la seule possibilité est $\omega(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{A}}) \geq \omega(\mathbf{x}^H \mathbf{A})$, ce qui implique (Lemma 1) l'unicité de \mathbf{A} . \square

Dans la suite, nous présentons un théorème permettant d'analyser l'identifiabilité des deux autres matrices, \mathbf{B} et \mathbf{C} , dans le cas où \mathbf{A} est identifiable. Tout d'abord nous introduisons la partition suivante de \mathbf{A} en N sous-matrices : $\mathbf{A}\Pi_{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}_1 | \dots | \mathbf{A}_N]$, avec $\sum_{n=1}^N R_n = R$, R_n le nombre de colonnes de la sous-matrice \mathbf{A}_n et $\Pi_{\mathbf{A}}$ une matrice de permutation. La partition est faite telle que $\text{Im}(\mathbf{A}) = \text{Im}(\mathbf{A}_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(\mathbf{A}_N)$, où \oplus symbolise la somme directe des sous-espaces vectoriels $\text{Im}(\mathbf{A}_n)$ engendrés par les colonnes des matrices \mathbf{A}_n . On définit également les partitions correspondantes des deux autres matrices : $\mathbf{B}\Pi_{\mathbf{A}} = [\mathbf{B}_1 | \dots | \mathbf{B}_N]$ et $\mathbf{C}\Pi_{\mathbf{A}} = [\mathbf{C}_1 | \dots | \mathbf{C}_N]$. Avec ces notations, le troisième résultat d'unicité est donné par le théorème suivant :

Théorème 3 *Si \mathbf{A} est identifiable, alors \mathcal{X} peut se décomposer de manière unique en somme de N sous-blocs de type CP, $[\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n]$, avec R_n composantes. A l'intérieur de chaque sous-bloc, les colonnes de \mathbf{A}_n sont déterminées de façon unique. Les sous-matrices \mathbf{B}_n et \mathbf{C}_n peuvent être déterminées de façon unique si le modèle de mélange donné par $[\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n]$ est identifiable.*

Démonstration. Considérons la partition suivante de la matrice \mathbf{A} : $\mathbf{A}\Pi_{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_{\{1\}}]$, où $\mathbf{A}_{\{i\}}$ est la matrice obtenue de $\mathbf{A}\Pi_{\mathbf{A}}$ après extraction de la sous-matrice \mathbf{A}_i . De façon analogue, nous notons $\mathbf{B}\Pi_{\mathbf{A}} = [\mathbf{B}_1 | \mathbf{B}_{\{1\}}]$, $\mathbf{C}\Pi_{\mathbf{A}} = [\mathbf{C}_1 | \mathbf{C}_{\{1\}}]$ et $\mathbf{C} \odot \mathbf{B} = \mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 | \mathbf{P}_{\{1\}}] = [\mathbf{C}_1 \odot \mathbf{B}_1 | \mathbf{C}_{\{1\}} \odot \mathbf{B}_{\{1\}}]$. Une conséquence directe de l'identifiabilité de \mathbf{A} est que les matrices \mathbf{A}_1 and $\mathbf{A}_{\{1\}}$ sont essentiellement uniques. Supposons maintenant qu'il existe deux autres matrices $\bar{\mathbf{P}}_1 = \bar{\mathbf{C}}_1 \odot \bar{\mathbf{B}}_1$ et $\bar{\mathbf{P}}_{\{1\}} = \bar{\mathbf{C}}_{\{1\}} \odot \bar{\mathbf{B}}_{\{1\}}$, telles que

$$[\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_{\{1\}}] [\mathbf{P}_1 | \mathbf{P}_{\{1\}}]^T = [\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_{\{1\}}] [\bar{\mathbf{P}}_1 | \bar{\mathbf{P}}_{\{1\}}]^T$$

ce qui équivaut

$$[\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_{\{1\}}] [\mathbf{P}_1 - \bar{\mathbf{P}}_1 | \mathbf{P}_{\{1\}} - \bar{\mathbf{P}}_{\{1\}}]^T = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Etant donné que les sous-espaces sont en somme directe, la relation (11) est équivalente à

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 (\mathbf{P}_1 - \bar{\mathbf{P}}_1)^T = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\{1\}} (\mathbf{P}_{\{1\}} - \bar{\mathbf{P}}_{\{1\}})^T = \mathbf{0} \end{cases} \quad (12)$$

En appliquant, de manière itérative, le même raisonnement pour la deuxième équation de (12) nous obtenons l'ensemble d'équations

$$\mathbf{A}_i (\mathbf{C}_i \odot \mathbf{B}_i)^T = \mathbf{A}_i (\bar{\mathbf{C}}_i \odot \bar{\mathbf{B}}_i)^T \quad \text{avec } i = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Etant donnée l'unicité des \mathbf{A}_i , cela signifie que le modèle CP peut se décomposer de façon unique sous la forme

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] = \sum_{n=1}^N [\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n]. \quad (14)$$

Pour chacun de ces sous-blocs, \mathbf{A}_n est essentiellement unique et l'unicité des \mathbf{B}_n et \mathbf{C}_n peut être déterminée localement en analysant l'unicité de $[\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n]$. \square

3 Exemple numérique

Afin d'illustrer les résultats théoriques obtenus dans la section précédente nous avons choisi de simuler six sources non-négatives représentatives de données de type spectroscopiques. Les trois modes/diversités simulés pourraient correspondre, dans la pratiques, à trois différents paramètres tels que : la longueur d'onde, la concentration et le pH . Nous avons imposé les dépendances linéaires suivantes dans les trois modes : $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_5$ ($\text{rang}(\mathbf{A}) = 5$, $k_{\mathbf{A}} = 1$), $\mathbf{b}_6 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4 + \mathbf{b}_5$ et $\mathbf{c}_6 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_4$ ($k_{\mathbf{B}} = 5$ et $k_{\mathbf{C}} = 4$). La première colonne de la figure 1 montrent les profils simulés pour chacune des six sources dans les trois modes. La deuxième colonne montre les résultats superposés pour 20 estimations indépendantes des trois matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} à l'aide de l'algorithme PARALIND [9], avec des contraintes de positivité. On voit que pour le premier mode on obtient à chaque estimation le même résultat pour les six sources, ce qui s'explique par le théorème 1. Pour le deuxième mode, le théorème 3 nous dit que les quatre premières colonnes sont identifiables, alors que les colonnes cinq et six sont soumises à des indéterminations de type rotation. Cela est confirmé par les résultats de simulation (fig. 1(d)). Des résultats similaires sont obtenus pour le troisième mode C (voir fig. 1(e) et fig. 1(f)). Mentionnons que la portée des résultats obtenus dans la section précédente n'est aucunement conditionnée par des contraintes de type non-négativité ou parcimonie sur les sources. En revanche, le fait d'imposer la non-négativité dans la phase d'estimation permet de garantir l'existence d'une solution correspondant à un minimum global [14].

4 Conclusion

Dans ce papier nous présentons trois nouveaux résultats d'identifiabilité partielle pour les mélanges trilineaires de sources avec

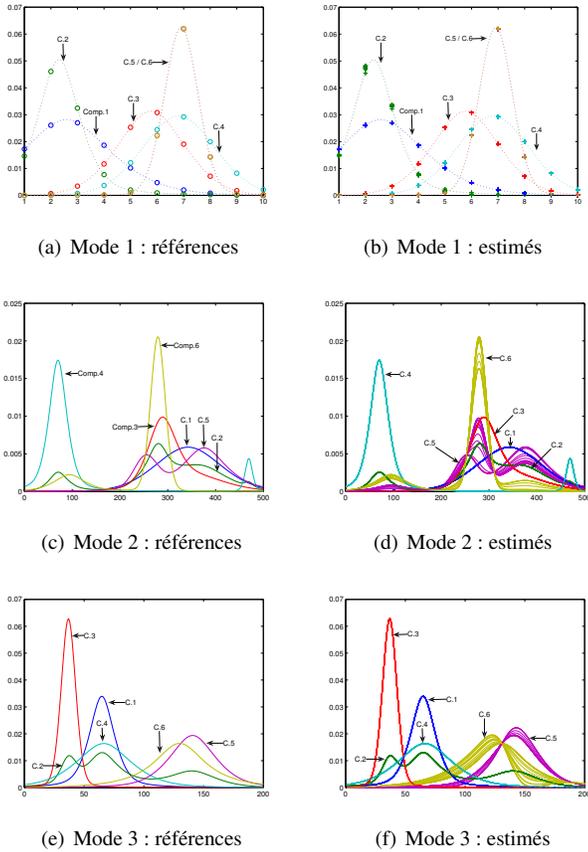


FIGURE 1 – Les profils de référence et les profils estimés pour les trois modes

des dépendances linéaires dans un ou plusieurs modes. Les deux premières conditions garantissent l'unicité d'un seul mode alors que le troisième résultat donne une condition suffisante pour la décomposition unique du mélange en sous-blocs. Ces nouveaux résultats peuvent s'avérer très utiles dans les problèmes de séparation pour lesquels la condition de Kruskal n'est pas vérifiée. Parmi les applications potentielles de ces résultats, mentionnons l'analyse de la réponse de biocapteurs bactériens non-spécifiques [15] et la séparation de sources cohérentes reçues sur une antenne vectorielle [16].

Références

[1] P. Comon and C. Jutten, *Séparation de sources*, vol. 1 et 2, Hermès - Lavoisier, Paris, 2007.

[2] J. D. Carroll and J.-J. Chang, "Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of "Eckart-Young" decomposition," *Psychometrika*, vol. 35, no. 3, pp. 283–319, Sept. 1970.

[3] R. A. Harshman, "Foundations of the PARAFAC procedure : Models and conditions for an 'explanatory' multimodal factor analysis," *UCLA Working Papers in Phonetics*, vol. 16, pp. 1–84, Dec. 1970.

[4] T. G. Kolda and B. W. Bader, "Tensor decompositions and applications," *SIAM Rev.*, vol. 51, no. 3, pp. 455–500, Sept. 2009.

[5] E. Acar and B. Yener, "Unsupervised multiway data analysis : A literature survey," *IEEE Trans. Knowledge Data Eng.*, vol. 21, no. 1, pp. 6–20, Jan. 2009.

[6] J. B. Kruskal, "Three-way arrays : Rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics," *Linear Algebra Applicat.*, vol. 18, no. 2, pp. 95–138, 1977.

[7] J. M. F. ten Berge and N. D. Sidiropoulos, "On uniqueness in CANDECOMP/PARAFAC," *Psychometrika*, vol. 67, no. 3, pp. 399–409, Sept. 2002.

[8] J. M. F. ten Berge, "Partial uniqueness in CANDECOMP/PARAFAC," *J. Chemometr.*, vol. 18, no. 1, pp. 12–16, May 2004.

[9] R. Bro, R. A. Harshman, N. D. Sidiropoulos, and M. E. Lundy, "Modeling multi-way data with linearly dependent loadings," *J. Chemometr.*, vol. 23, no. 7-8, pp. 324–340, July-Aug. 2009, Special Issue : In Honor of Professor Richard A. Harshman.

[10] A. Stegeman and A. L. F. de Almeida, "Uniqueness conditions for constrained three-way factor decompositions with linearly dependent loadings," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 31, no. 3, pp. 1469–1499, 2009.

[11] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1985.

[12] N. D. Sidiropoulos and X. Liu, "Identifiability results for blind beamforming in incoherent multipath with small delay spread," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 1, pp. 228–236, Jan. 2001.

[13] N. D. Sidiropoulos, R. Bro, and G. B. Giannakis, "Parallel factor analysis in sensor array processing," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, no. 8, pp. 2377–2388, Aug. 2000.

[14] L. H. Lim and P. Comon, "Nonnegative approximations of nonnegative tensors," *J. Chemometr.*, vol. 23, no. 7-8, pp. 432–441, July-Aug. 2009, Special Issue : In Honor of Professor Richard A. Harshman.

[15] F. Caland, S. Miron, D. Brie, and C. Mustin, "A CANDECOMP/PARAFAC approach to the estimation of environmental pollutant concentrations using biosensors," in *Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing 2011*, Nice, France, Sept. 2011.

[16] X. Guo, Miron S., D. Brie, S. Zhu, and X. Liao, "A CANDECOMP/PARAFAC perspective on uniqueness of DOA estimation using a vector sensor array," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 59, no. 7, pp. 3475–3481, July 2011.