

Arbres de Markov couple et segmentation non supervisée d'images : cas de la mono-résolution

EMMANUEL MONFRINI¹, WOJCIECH PIECZYNSKI¹

¹ Telecom SudParis, Département CITI, CNRS UMR 5157
9 rue Charles Fourier, 91011 Evry Cedex, France

¹Emmanuel.Monfrini@it-sudparis.eu, Wojciech.Pieczynski@it-sudparis.eu

Résumé - Les modèles d'arbres de Markov cachés (AMC), de plus en plus souvent utilisés dans les problèmes de traitement du signal ainsi qu'en matière de segmentation d'images, permettent d'estimer la réalisation d'un processus caché à partir des réalisations d'un processus auxiliaire observable. Ces modèles ont été étendus aux arbres de Markov couple (AMC couple) et l'objectif de cet article est de comparer les performances des AMC et des AMC couple dans le cadre de la segmentation non supervisée d'image mono-résolution. La méthode présentée ici améliore de façon significative la qualité des segmentations d'images dont le modèle de bruit ne vérifie pas les hypothèses classiques d'indépendance en préservant les résultats obtenus pour le modèle de bruit classique.

Abstract - The Hidden Markov Trees (AMC), which become widely applied in signal and image processing problems, enable one to estimate realizations of a hidden process from realizations of an associated one. They have recently been extended to "Pairwise" Markov trees (AMC couple) models. The aim of this paper is to compare the performance of AMC and AMC couple in the field of segmentation of unsupervised mono-resolution images. We propose here an original model which, on the one hand, significantly improves the quality of the segmentations of images for which the noise's model doesn't verify the classical hypothesis of "Independent noise" and, on the other hand, preserve the good results obtained with AMC in the case of classical hypothesis on the noise.

1 Introduction

La problématique de la segmentation statistique d'images est la suivante : on considère deux processus aléatoires $X = (X_s)_{s \in S}$ et $Y = (Y_s)_{s \in S}$, où S est l'ensemble des pixels. X_s est à valeurs dans un ensemble fini de classes $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ et chaque Y_s est à valeurs dans \mathbb{R} . Il s'agit d'estimer la réalisation inobservable x de X à partir de l'observation y de Y . Pour cela on choisit généralement de modéliser le processus caché X sous forme markovienne (champs, chaînes ou arbres de Markov) et de restreindre la famille des lois de Y conditionnelle à X qui modélisent le bruit, de façon à ce que la loi de X conditionnelle à Y soit encore markovienne (de tels modèles sont dits modèles de Markov cachés). Il devient alors possible d'appliquer les méthodes bayésiennes d'estimation MPM ou MAP. De plus, les paramètres peuvent très souvent être estimés par des méthodes générales de type « Expectation-Maximization » (EM), « Stochastic EM » (SEM) [1] ou « Iterative conditional estimation (ICE) » [2], ce qui permet la conception des méthodes de segmentation non supervisées.

Les modèles de Markov couple qui, sur le plan théorique, généralisent strictement les modèles de Markov cachés commencent à être également reconnus en pratique notamment en traitement du signal [3] ou pour la segmentation des images [5,6]. En effet, ces modèles pour lesquels on considère la markoviannité du couple (X, Y) ne nécessitent pas la markoviannité du

processus caché X . On peut ainsi généraliser la loi du couple (X, Y) tout en préservant la markoviannité de la distribution a posteriori, ce qui est essentiel pour l'utilisation des méthodes bayésiennes [5,8]. Notons, toutefois, que ce résultat qui a été démontré pour les chaînes et les arbres et confirmé par les expériences pour les champs, reste cependant à prouver pour ces derniers.

Nous nous intéressons ici au cas particulier de la segmentation mono-résolution par diarbres évolutifs de Markov couple dont nous comparons les performances, dans le cadre de segmentation non supervisées d'images de synthèse, avec celles obtenues avec les diarbres évolutifs de Markov cachés [7].

2 Arbres de Markov

Nous considérons le cas des images mono-résolution, qui correspond aux arbres dont les « feuilles » indiquent les variables du processus observé. On « regroupe » quatre à quatre ou deux à deux les variables du processus et on construit un père à chaque groupe de feuilles. Cette construction est alors appliquée au nouveau processus formé par les pères. On répète ainsi de suite l'opération tant qu'elle est possible jusqu'à l'ancêtre unique, que l'on appelle la « racine » comme le montrent la construction du Quadarbre de la Figure 1 ainsi que le Diarbre (droit) de la Figure 2. Le choix, de travailler ici avec le diarbre plutôt qu'avec le quadarbre vient de la plus grande robustesse des diarbres pour contrer les effets de bloc [7].

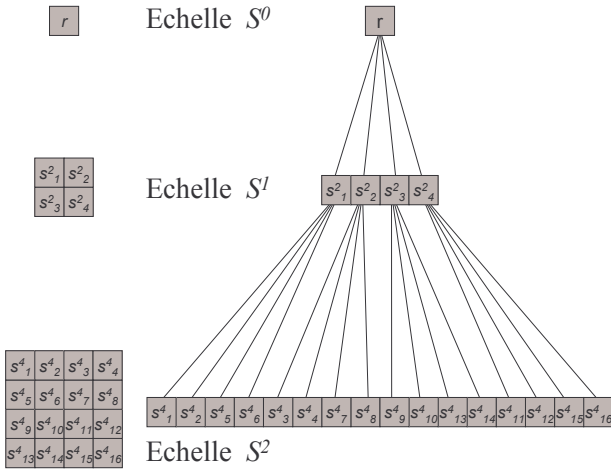


Figure 1 : Exemple de quadarbre

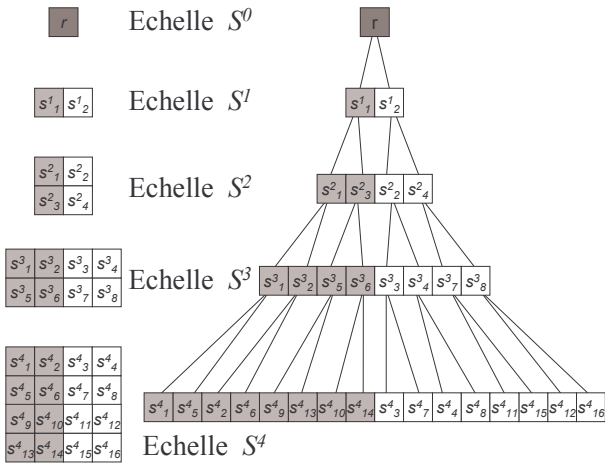


Figure 2 : Exemple de diarbre

Formellement (cf. [4]), soit $X = (X_s)_{s \in S}$, le processus des classes et $Y = (Y_s)_{s \in S}$ la variable observable. Soit S^1, \dots, S^N une partition de S représentant les différentes « générations » du processus sur arbre toutes issues d'un ancêtre commun, la « racine », notée r . A chaque $s \in S^i$ correspond $s^+ \subset S^{i+1}$ appelé l'ensemble des « fils » de s , les ensembles des enfants des éléments de S^i formant une partition de S^{i+1} . On note enfin s^- l'ensemble de tous les descendants de s , et s^- son unique « père ». Signalons ici que les processus $X^i = (X_s)_{s \in S^i}, i \in \{1, \dots, N-1\}$ correspondant aux différentes générations de l'arbre peuvent être interprétées comme représentant des images de classes à des résolutions inférieures à celle de X^N .

Compte tenu des notations précédentes, le processus $Z = (Z_s)_{s \in S} = (X_s, Y_s)_{s \in S}$ sera dit Arbre de Markov Couple (AMC Couple) si sa distribution prend la forme :

$$p(z) = p(z_r) \prod_{s \in r^-} p(z_s | z_{s^-}), \quad (1)$$

ce que l'on peut réécrire, sans perte de généralité :

$$p(z) = p(x, y) = p(x_r) p(y_r | x_r) \prod_{s \in r^-} p(x_s | x_{s^-}, y_{s^-}) p(y_s | x_s, x_{s^-}, y_{s^-}), \quad (2)$$

alors que Z sera un Arbre de Markov Caché à modèle de Bruit Indépendant (AMC-BI) si :

$$p(z) = p(x_r) p(y_r | x_r) \prod_{s \in r^-} p(x_s | x_{s^-}) p(y_s | x_s). \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) donnent, localement, une idée de la généralisation de la modélisation lorsque l'on passe des AMC-BI aux AMC Couple.

La difficulté de mise en œuvre des AMC Couple pour la segmentation mono-résolution des images vient précisément de la forme de l'équation (2) pour laquelle tant les probabilités de transition interéchelle généralisées $p(x_s | x_{s^-}, y_{s^-})$ que les $p(y_s | x_s, x_{s^-}, y_{s^-})$

nécessitent, en principe, l'existence d'une « observation » à toutes les résolutions. En effet, l'absence d'observation associée au pixel $s^-, \forall s \neq r$, contraint, pour la modélisation AMC Couple à faire l'hypothèse que $\forall s \neq r, p(x_s | x_{s^-}, y_{s^-}) = p(x_s | x_{s^-})$.

Cette hypothèse revient en fait à considérer que X est un arbre de Markov, ce qui nous replace dans le cas des arbres de Markov cachés (AMC). On ne fait certes plus l'hypothèse de bruit indépendant mais l'on ne sort cependant pas du modèle markovien caché.

Afin de préserver le modèle couple il faut donc simuler ces « observations » manquantes. Notons toutefois qu'il n'est pas nécessaire de simuler des observations à toutes les résolutions de l'arbre. En effet, dès que le processus X n'est plus markovien, le modèle AMC est généralisé. Dans le cadre de ce travail, nous nous plaçons dans le cas où seule l'observation $Y^{N-1} = y^{N-1}$, à la résolution immédiatement inférieure à l'image observée $Y^N = y^N$, sera simulée.

Si le fait de « fabriquer » une observation permet de simuler de l'information exploitable par le modèle couple, le recours aux tirages aléatoires revient concomitamment à introduire de l'incertitude et c'est pour cela que nous choisissons de ne pas générer des observations à toutes les résolutions. La méthode utilisée pour simuler l'observation auxiliaire sera détaillée dans la section 3.

3 Segmentation non supervisée d'images

3.1 MPM pour les AMC Couple évolutifs

Considérons N générations de descendants de la racine et plaçons nous dans le cas où il n'y a pas d'observation associée à S^0, \dots, S^{N-2} . Formellement, on considère alors que, pour tout $s \in S^1 \cup \dots \cup S^{N-2}$, $p(y_s | x_s, x_{s^-}, y_{s^-}) = 1$ et $p(x_s | x_{s^-}, y_{s^-}) = p(x_s | x_{s^-})$. Pour $s \in S^{N-1}$, on a toujours $p(x_s | x_{s^-}, y_{s^-}) = p(x_s | x_{s^-})$ mais $p(y_s | x_s, x_{s^-}, y_{s^-}) = \mathcal{N}(y_s, \mu_{N-1}(x_s), \sigma_{N-1}^2(x_s))$ où les y_s sont les observations simulées et $\mathcal{N}(y_s, \mu_{N-1}, \sigma_{N-1}^2)$ est la densité gaussienne de moyenne μ_{N-1} et de

variance σ_{N-1}^2 prise en y_s . Pour $s \in \mathcal{S}^N$, on peut alors exploiter la forme générale de $p(x_s | x_{s^-}, y_{s^-})$, dépassant ainsi le cadre des AMC, et généraliser $p(y_s | x_s, x_{s^-}, y_{s^-}) = \mathcal{N}(y_s, \mu_N(x_s) - y_{s^-} + \mu_{N-1}(x_{s^-}), \sigma_N^2(x_s))$.

La structure d'AMC Couple est relativement proche de celle des Chaînes de Markov Couple et c'est grâce à une procédure de type forward-backward, généralisant celle utilisée pour ces dernières, que l'on peut obtenir, par un algorithme déterministe de type Baum-Welsh, la solution du MPM [7].

3.2 Estimation des paramètres et simulation de l'« observation » à la résolution $N-1$.

Afin d'obtenir l'observation auxiliaire, à la résolution $N-1$, permettant d'utiliser un modèle généralisant celui des AMC, on commence par simuler, en générant des réalisations d'une loi normale centrée et réduite, une image ayant les dimensions de la résolution $N-1$. Cette image de départ n'est pas encore la version bruitée de la vérité terrain à la résolution $N-1$ et il est nécessaire, pour obtenir l'observation simulée, de lui faire subir, pixel par pixel et en fonction de la vérité terrain, les transformations affines liées aux paramètres de la loi normale modélisant le bruit. Ceci pose un double problème puisqu'on ne connaît a priori ni la vérité terrain à la résolution $N-1$, ni les paramètres du bruit à cette résolution.

Le problème de l'ignorance des paramètres du bruit tombe rapidement puisque dans la mesure où nous créons cette observation de toutes pièces nous avons toute latitude pour les choisir. Pour des raisons de cohérence de modélisation il semble raisonnable de considérer que $\mu_{N-1}(\cdot) = \mu_N(\cdot)$ et par conséquent, si $u, t \in \mathcal{S}^N$ sont les fils de $s \in \mathcal{S}^{N-1}$, on aura

$$\sigma_{N-1}^2(\omega) = \text{Cov}(Y_t, Y_u | (X_t, X_u, X_s)) = (\omega, \omega, \omega) \quad (4)$$

Il est important de signaler qu'on n'utilise alors, pour la simulation de l'observation auxiliaire, que des paramètres estimables uniquement à partir de la « vraie » observation.

Pour ce qui est de la vérité terrain à la résolution $N-1$, il s'agit en fait d'un problème de segmentation. En effet, la connaissance de cette vérité terrain est une conséquence de la segmentation de l'image en pleine résolution. Il suffit donc de se donner une initialisation de la vérité terrain à la résolution $N-1$ pour pouvoir faire tourner un algorithme itératif d'estimation des paramètres réactualisant cette vérité. Pour cela on initialisera les paramètres par des méthodes classiques et la vérité terrain à la résolution $N-1$ sera initialisée, par exemple, à partir d'une segmentation par AMC.

Notons que les estimations $\widehat{\mu}_{N-1}(\cdot)$, $\widehat{\sigma}_{N-1}^2(\cdot)$, $\widehat{\mu}_N(\cdot)$ et $\widehat{\sigma}_N^2(\cdot)$ sont faites, en utilisant l'observation auxiliaire, comme si l'on bénéficiait d'une vraie observation à la résolution $N-1$ ce qui est important pour que les

estimations de $\mu_N(\cdot)$, $\sigma_N^2(\cdot)$ et de la covariance conditionnelle de (4) soient cohérentes avec le modèle. En revanche, lors de la simulation de l'observation auxiliaire, seules les estimations de ces derniers paramètres seront utilisées.

Nous avons testé les principales méthodes d'estimation des paramètres qui donnent des résultats sensiblement équivalents et nous avons retenu ICE qui est utilisable indépendamment de l'existence ou non d'un maximum de la vraisemblance et qui apparaît de surcroît légèrement plus performante qu'EM et SEM.

Rappelons qu'à l'instar d'EM et SEM, ICE produit une séquence $(\theta^{(q)})_{q \in \mathbb{N}}$ d'estimations des paramètres visant à minimiser l'erreur quadratique moyenne. Pour cela on choisit un estimateur $\hat{\theta}(X, Y)$ des données complètes et après une initialisation à $\theta^{(0)}$ de l'ensemble des paramètres, on réestime θ à chaque itération q par :

$$\theta^{(q+1)} = \mathbb{E}_{\theta^{(q)}} \left[\hat{\theta}(X, Y) | Y = y \right] \quad (5)$$

où $\mathbb{E}_{\theta^{(q)}}$ est l'espérance conditionnelle sous le paramétrage $\theta^{(q)}$.

Cette espérance conditionnelle peut ne pas être explicitement calculable pour certains éléments $\hat{\theta}_i$ de $\hat{\theta}$. Dans ce cas la réestimation des $\theta_i^{(q+1)}$ se fait par une méthode de Monte-Carlo. Pour cela on simule, suivant la loi de X a posteriori sous $\theta^{(q)}$, m réalisations de X , notées $x^{(q,1)}, \dots, x^{(q,m)}$ et l'on pose

$$\theta_i^{(q+1)} = \frac{\hat{\theta}_i(x^{(q,1)}, y) + \dots + \hat{\theta}_i(x^{(q,m)}, y)}{m}. \quad (6)$$

Dans le cadre de cet article, seules les probabilités de transition interéchelle et celle de la racine peuvent être réestimées de façon déterministe. Les paramètres caractérisant le bruit aux résolutions $N-1$ et N , ainsi que les covariances conditionnelles à la résolution N (utilisées pour la simulation de l'observation auxiliaire) seront donc réestimées, à partir des estimateurs empiriques, par une méthode de Monte Carlo (pour laquelle on peut choisir $m = 1$).

3.3 Expérimentations

Les résultats présentés Figure 3 à Figure 5 correspondent à des segmentations d'images de synthèse obtenues à partir de modèles de bruit différents. On constate que les performances des AMC Couple sont comparables avec celles des AMC-BI dans le cas du modèle de bruit classique et améliorent les performances de ces derniers pour un modèle de bruit plus complexe, qu'il soit dédié aux AMC Couple ou obtenu, plus généralement, par un bruit corrélé ou par placage d'une texture.

La segmentation présentée à la Figure 6 est celle d'une image réelle, pour laquelle on distingue trois

classes dont deux (la chaire de la peau, des lèvres et de la langue d'une part, le papier présent sur la langue et sur les bords de l'image d'autre part) sont texturées. Cette segmentation met nettement en évidence les limites des AMC-BI pour la prise en compte des textures puisqu'une classe entière disparaît lors de la segmentation en trois classes et souligne par ailleurs les très bonnes performances des AMCouple pour ce type d'images.

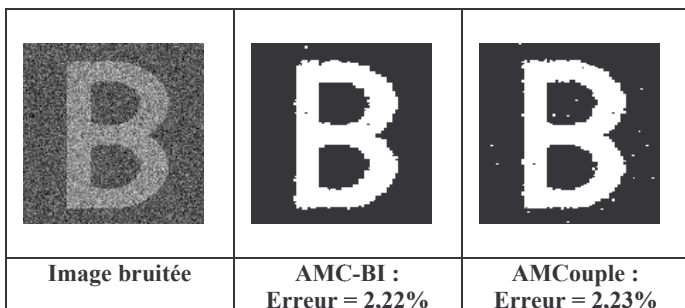


Figure 3 : Segmentation non supervisée d'une image dont le modèle de bruit est adapté aux AMC-BI.

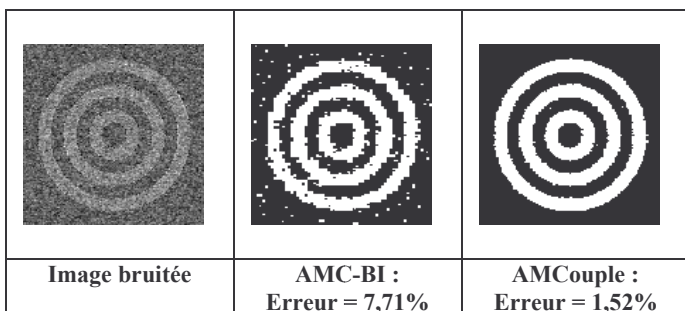


Figure 4 : Segmentation non supervisée d'une image dont le modèle de bruit est adapté aux AMCouple.

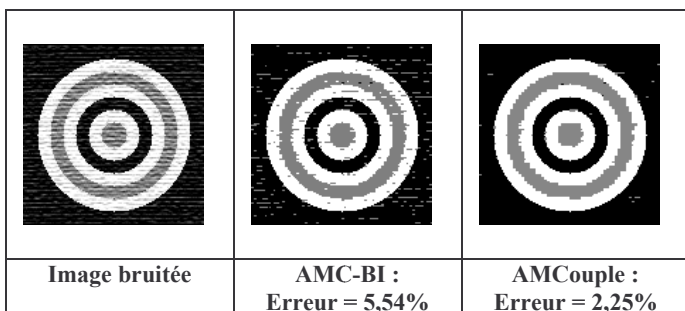


Figure 5 : Segmentation non supervisée d'une image obtenue par placage d'une texture.

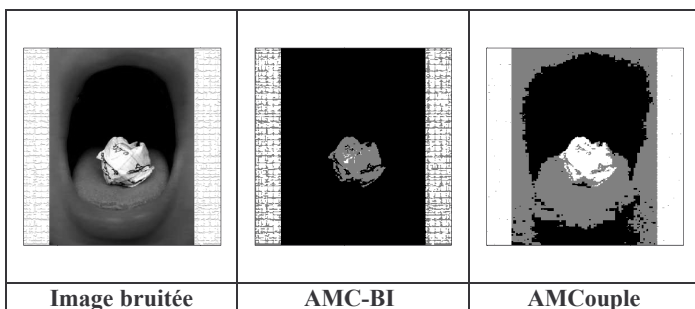


Figure 6 : Segmentation non supervisée d'une image réelle.

4 Conclusion

L'intérêt du cas très particulier d'AMCouple étudié ici est d'intégrer, à travers un affaiblissement des hypothèses sur la loi de (X, Y) , une généralisation du modèle de bruit utilisé dans les AMC-BI. La comparaison des résultats obtenus lors des segmentations avec les deux modèles fait écho, sur un plan pratique, aux attentes nées de l'extension de la modélisation et ce, malgré la nécessité de simuler une observation auxiliaire.

Les modèles présentés ici trouvent leur prolongement dans deux directions principales, la première étant l'extension à une version Arbre de Markov Triplet [9] permettant d'introduire des stationnarités différentes, tant au niveau du processus caché que du processus observé. La seconde direction d'intérêt est l'extension à des réseaux hiérarchiques plus complexes que les arbres [10].

5 Références

- [1] G. Celeux and J. Diebolt, *The SEM algorithm: a probabilistic teacher algorithm derived from the EM algorithm for the mixture problem*, Computational Statistics, Vol. 2, pp. 73-82, 1985.
- [2] J.P. Delmas, *An equivalence of the EM and ICE algorithm for exponential family*, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 45, No. 10, pp. 2613-2615, 1997.
- [3] S. Derrode and W. Pieczynski, *Signal and image segmentation using Pairwise Markov chains*, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 52, No. 9, pp. 2477-2489, 2004.
- [4] J.-M. Laferté, P. Pérez, and F. Heitz, *Discrete Markov image modeling and inference on the quadtree*, IEEE Trans. on Image Processing, Vol. 9, No 3, pp. 390-404, 2000.
- [5] P. Lanchantin, J. Lapuyade-Lahorgue and W. Pieczynski, *Unsupervised segmentation of randomly switching data hidden with non-Gaussian correlated noise*, Signal Processing, Vol. 91, No. 2, pp. 163-175, February 2011.
- [6] S. Le Cam, F. Salzenstein, Ch. Collet, *Fuzzy Pairwise Markov Chain to Segment Correlated Noisy Data*, Signal Processing, Elsevier North-Holland, Inc. Amsterdam, The Netherlands, 2008.
- [7] E. Monfrini *Identifiabilité et méthode des moments dans les mélanges généralisés de distributions du système de Pearson*. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, 2002.
- [8] W. Pieczynski, *Arbres de Markov Couple – Pairwise Markov Trees*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335, pp. 79-82, 2002.
- [9] W. Pieczynski, *Arbres de Markov Triplet et fusion de Dempster-Shafer* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336, No. 10, pp. 869-872, 2003.
- [10] C. Wolf and G. Gavin, *Inference and parameter estimation on hierarchical belief networks for image segmentation*, Neurocomputing 73(4-6):563-569, 2010.