

# Bancs de filtres et méthodes proximales pour la restauration d'images

Nelly PUSTELNIK<sup>1</sup>, Jean-Christophe PESQUET<sup>2</sup>, Caroline CHAUX<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire IMS – Université de Bordeaux – 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

<sup>2</sup>Université Paris-Est – Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge – 5 Bd Descartes, 77454 Marne la Vallée, France

nelly.pustelnik@ims-bordeaux.fr, jean-christophe.pesquet@univ-paris-est.fr  
caroline.chaux@univ-paris-est.fr

**Résumé** – Les algorithmes proximaux parallèles et les méthodes de directions alternées des multiplicateurs sont devenus populaires pour la résolution de problèmes inverses. En particulier, de nombreux travaux se sont intéressés à la résolution de problèmes de restauration dans un cadre variationnel convexe utilisant des trames. Jusqu'à présent, la plupart de ces méthodes nécessitaient une hypothèse de trames ajustées. Dans ce travail, nous relâchons cette contrainte en considérant des bancs de filtres à reconstruction parfaite non-nécessairement décimés de manière critique. Nous illustrons l'intérêt de telles trames sur un exemple de déconvolution en présence de bruit de Poisson.

**Abstract** – Parallel proximal algorithms and related alternating direction methods of multipliers have become popular optimization techniques to approximate iteratively the desired solution in frame-based convex variational formulations for solving signal deconvolution problems. Until now, in most of these methods, tight frame representations were assumed. In this paper, it is shown that it is possible to relax these assumptions by considering non necessarily maximally decimated filter banks with perfect reconstruction. In our simulations, this approach is applied to the deconvolution of data corrupted by a Poisson noise.

## 1 Introduction

De nombreux travaux en traitement du signal et des images ont été consacrés aux problèmes de restauration. Pour de tels problèmes 1D, les données originales  $\bar{y} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  sont dégradées par un opérateur de convolution  $T: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  et un bruit non-nécessairement additif<sup>1</sup>. Une façon de formuler le modèle direct de dégradation consiste à écrire :

$$z = \mathcal{D}_\alpha(T\bar{y}) \quad (1)$$

où  $\mathcal{D}_\alpha$  modélise l'effet du bruit et  $\alpha > 0$  est un paramètre lié à l'intensité du bruit ( $\alpha$  peut par exemple désigner la variance dans le cas d'un bruit gaussien ou le paramètre d'échelle dans le cas d'un bruit de Poisson). Dans ce contexte, notre objectif est de retrouver un signal  $\hat{y} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , le plus proche possible de  $\bar{y}$ , à partir d'un signal observé  $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$  et d'une information *a priori* sur les données (parcimonie, positivité, ...).

Dans [1, 2, 3, 4], les auteurs considèrent des techniques d'optimisation convexe pour résoudre simultanément les problèmes de débruitage et de déconvolution dans un cadre variationnel. Quand le bruit est gaussien, l'algorithme explicite-implicite (FB) [1, 5] et ses versions accélérées [6, 7] peuvent être employés aussi bien dans le contexte des bases d'ondelettes que dans celui plus général de trames [8]. Cet algorithme est aussi connu sous le nom de Landweber seuillé quand le terme de régularisation est une norme  $\ell_1$  [2, 3, 4]. Dans le contexte d'un bruit non-additif tel qu'un bruit de Poisson ou un bruit de Laplace, l'algorithme FB n'offre plus de garantie de convergence en

raison du caractère non-Lipschitz différentiable du terme d'attache aux données [9]. Néanmoins, d'autres algorithmes d'optimisation convexe peuvent être employés, comme l'algorithme de Douglas-Rachford (DR) [10], l'algorithme parallèle proximal (PPXA) [11] ou ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) [12, 13]. Ces algorithmes appartiennent à la classe des algorithmes proximaux pour lesquels les opérateurs proximaux invoqués ne prennent une forme explicite que dans le cas de trames ajustées [11, 12, 13]. Des algorithmes proximaux primaux-duaux sont aussi applicables pour ces problématiques [14, 15, 16].

Le but de cet article est de proposer une technique permettant de relâcher l'hypothèse de trame ajustée, dans les algorithmes de type PPXA, en considérant une classe particulière de représentations. Dans la suite, nous considérons un problème général d'optimisation convexe, dont la formulation à l'analyse (FA) s'exprime par :

$$\hat{y} \in \underset{y \in \ell^2(\mathbb{Z})}{\text{Argmin}} \sum_{i=1}^R f_i(L_i y) + \sum_{j=1}^S g_j(F_j y). \quad (2)$$

$F: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  correspond à l'opérateur d'analyse de trame (ses propriétés seront rappelées dans la section 2). Pour tout  $i \in \{1, \dots, R\}$ ,  $f_i: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est une fonction convexe, semi-continue inférieure (s.c.i.) et propre,  $L_i: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  est un opérateur de convolution stable, et pour tout  $j \in \{1, \dots, S\}$ ,  $g_j: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est une fonction convexe, s.c.i. et propre. La FA s'oppose à la formulation à la synthèse (FS) [17, 18, 19]. Cette dernière a jusqu'à présent souvent été préférée en raison d'une mise en œuvre plus aisée [2, 10].

1.  $\ell^2(\mathbb{Z})$  correspond à l'espace des signaux discrets à valeurs réelles définis sur  $\mathbb{Z}$  et d'énergie finie.

Les aspects théoriques et expérimentaux de ce travail s'articulent comme suit : dans la section 2, les propriétés des trames sont rappelées et une classe spécifique de trames non-nécessairement ajustées est introduite. La section 3 détaille l'algorithme PPXA+ [20] et met en avant l'intérêt de combiner cet algorithme avec les trames précédemment introduites. Des résultats numériques pour un problème de restauration en présence de bruit de Poisson sont présentés dans la section 4. Finalement, la section 5 soulève certains problèmes résiduels de la méthode proposée.

## 2 Cas particulier de trames (non-nécessairement ajustées)

Des propriétés telles que la parcimonie ou la régularité d'un signal cible  $\bar{y} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , sont aisément exploitables en terme de coefficients de trames  $\bar{x} = (\bar{x}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  tels que  $\bar{y} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{x}(k) e_k$  où  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est un dictionnaire de signaux de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Un tel dictionnaire constitue une trame s'il existe deux constantes  $\underline{\mu}$  et  $\bar{\mu}$  dans  $]0, +\infty[$  telles que

$$(\forall y \in \ell^2(\mathbb{Z})) \quad \underline{\mu} \|y\|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle y | e_k \rangle|^2 \leq \bar{\mu} \|y\|^2. \quad (3)$$

L'opérateur de trame associé est l'opérateur linéaire injectif défini par

$$(\forall y \in \ell^2(\mathbb{Z})) \quad Fy = (\langle y | e_k \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad (4)$$

l'adjoint de celui-ci est l'opérateur linéaire surjectif donné par

$$(\forall x = (x(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})) \quad F^*x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e_k. \quad (5)$$

Si  $F^{-1} = F^*$ , une base orthonormale est obtenue et si  $\underline{\mu} = \bar{\mu}$  on parle de trame ajustée [21].

Nous considérons un opérateur linéaire  $F$  qui correspond à un banc de filtres non-nécessairement décimés de manière critique. Rappelons qu'un banc de filtres à l'analyse peut être écrit sous forme polyphase en effectuant une décomposition polyphase  $\Pi_D$  suivi par un filtrage réel MIMO (multi-entrées multi-sorties), noté  $V$ . Plus précisément,

- la décomposition polyphase  $\Pi_D$  est un opérateur de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  vers  $(\ell^2(\mathbb{Z}))^D$  avec  $D \in \mathbb{N}^*$  tel quel, pour tout  $y = (y(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $\Pi_D y = (y^{(j)})_{1 \leq j \leq D}$  où  $y^{(j)} = (y(Dn - j + 1))_{n \in \mathbb{Z}}$  est la  $j$ -ème composante polyphase d'ordre  $D$  du signal  $y$ . L'opérateur adjoint de  $\Pi_D$  est donné par  $\Pi_D^* : (\ell^2(\mathbb{Z}))^D \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : (y^{(j)})_{1 \leq j \leq D} \mapsto u = (u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  où, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $j \in \{1, \dots, D\}$ ,  $u(Dn - j + 1) = y^{(j)}(n)$ . Par conséquent,  $\Pi_D^*$  nous permet de fusionner  $D$  suites de carré sommable en une seule.

- le filtre MIMO  $V$  est défini par

$$V = \begin{bmatrix} V_{1,1} & \dots & V_{1,D} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{N,1} & \dots & V_{N,D} \end{bmatrix} \quad (6)$$

où, pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$  et  $j \in \{1, \dots, D\}$ ,  $V_{i,j} : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  est un filtre stable SISO (mono-entrée mono-sortie). Par conséquent, la réponse impulsionnelle de ce filtre appartient à  $\ell^1(\mathbb{Z})$  et sa réponse fréquentielle  $\hat{v}_{i,j}$  est ainsi une fonction continue. De plus, on suppose que  $V$  est inversible à gauche. L'adjoint de l'opérateur  $V$  est un filtre MIMO de taille  $D \times N$  qui sera noté  $V^*$ .

**Proposition 2.1** *L'opérateur  $F = \Pi_N^* V \Pi_D$  est un opérateur de trame ayant pour constantes de trames*

$$\underline{\mu} = \inf_{\nu \in [-1/2, 1/2]} \sigma_{\min}(\nu) \quad \text{et} \quad \bar{\mu} = \sup_{\nu \in [-1/2, 1/2]} \sigma_{\max}(\nu),$$

où, pour tout  $\nu$ ,  $\sigma_{\min}(\nu) \in ]0, +\infty[$  et  $\sigma_{\max}(\nu) \in ]0, +\infty[$  sont les minimum et maximum des valeurs propres de  $\hat{v}(\nu)^H \hat{v}(\nu)$ . De plus, nous pouvons écrire :

$$F^* F = \Pi_D^* V^* V \Pi_D. \quad (7)$$

Les trames résultantes ne sont pas nécessairement ajustées. Cependant, la trame est ajustée lorsque  $(\forall \nu \in [-1/2, 1/2]) \hat{v}(\nu)^H \hat{v}(\nu) = I$ .

Les GenLOTS [22] ou les bancs de filtres propres [23, 24] sont typiquement des exemples de transformées populaires en traitement du signal qui appartiennent à la classe des représentations considérées. Dans la section suivante, nous montrons la pertinence du choix de la classe de trames présentée lorsqu'elle est combinée au formalisme de l'algorithme PPXA+ [20].

## 3 Algorithme PPXA+ pour la classe de trames considérée

Comme cela a été démontré dans [20], PPXA et SDMM sont des cas particuliers de l'algorithme PPXA+ dont les itérations sont données par l'algorithme 1. La convergence de la suite  $(y_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  générée par l'algorithme 1 a été démontrée dans [20] sous certaines hypothèses techniques telles que la coercivité des fonctionnelles impliquées.

Dans l'algorithme 1, la notation  $\text{prox}$  désigne l'opérateur proximal [25]. Rappelons que l'opérateur proximal d'une fonction  $\varphi \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ , où  $\mathcal{H}$  désigne un espace de Hilbert, est défini par

$$\text{prox}_\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : v \mapsto \arg \min_{u \in \mathcal{H}} \frac{1}{2} \|u - v\|^2 + \varphi(u). \quad (8)$$

Cet opérateur peut être vu comme la généralisation d'un projecteur sur un ensemble convexe fermé  $C$  de  $\mathcal{H}$  (cas particulier obtenu lorsque  $\varphi$  désigne la fonction indicatrice sur  $C$ ). Dans [1, 5, 11], de nombreuses formes explicites pour  $\text{prox}_\varphi$  sont données.

À l'initialisation et pour le calcul de la variable intermédiaire  $c_\ell$  à l'itération  $\ell$ , remarquons que des minimisations quadratiques sont requises. Ces minimisations requièrent l'inversion d'un opérateur linéaire de grande taille qui n'est pas explicitement calculable pour des trames quelconques. En revanche, en

Initialisation

$$\left[ \begin{array}{l} (\eta_i)_{1 \leq i \leq R} \in ]0, +\infty[^R, (\kappa_j)_{1 \leq j \leq S} \in ]0, +\infty[^S; (v_{i,0})_{1 \leq i \leq R} \in (\ell^2(\mathbb{Z}))^R, (w_{j,0})_{1 \leq j \leq S} \in (\ell^2(\mathbb{Z}))^S \\ y_0 = \arg \min_{u \in \ell^2(\mathbb{Z})} \sum_{i=1}^R \eta_i \|L_i u - v_{i,0}\|^2 + \sum_{j=1}^S \kappa_j \|F u - w_{j,0}\|^2 \end{array} \right.$$

Pour  $\ell = 0, 1, \dots$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{Pour } i = 1, \dots, R & p_{i,\ell} = \text{prox}_{f_i/\eta_i} v_{i,\ell} \\ \text{Pour } j = 1, \dots, S & r_{j,\ell} = \text{prox}_{g_j/\kappa_j} w_{j,\ell} \\ \lambda_\ell \in ]0, 2[ \\ c_\ell = \arg \min_{u \in \ell^2(\mathbb{Z})} \sum_{i=1}^R \eta_i \|L_i u - p_{i,\ell}\|^2 + \sum_{j=1}^S \kappa_j \|F u - r_{j,\ell}\|^2 \\ \text{Pour } i = 1, \dots, R & v_{i,\ell+1} = v_{i,\ell} + \lambda_\ell (L_i(2c_\ell - y_\ell) - p_{i,\ell}) \\ \text{Pour } j = 1, \dots, S & w_{j,\ell+1} = w_{j,\ell} + \lambda_\ell (F(2c_\ell - y_\ell) - r_{j,\ell}) \\ y_{\ell+1} = y_\ell + \lambda_\ell (c_\ell - y_\ell) \end{array} \right.$$

Algorithme 1: PPXA+

considérant un banc de filtres à reconstruction parfaite comme décrit précédemment et en combinant la propriété (7) avec le fait que, pour tout  $i \in \{1, \dots, R\}$ , l'opérateur de convolution  $L_i$  peut être mis sous forme polyphase, i.e  $L_i = W_i \Pi_D$  où  $W_i = [W_{i,1}, \dots, W_{i,D}]$  est un filtre MISO (multi-entrées mono-sortie), on peut montrer que :

$$\left( \sum_{i=1}^R \eta_i L_i^* L_i + \kappa F^* F \right)^{-1} = \Pi_D^* \left( \sum_{i=1}^R \eta_i W_i^* W_i + \kappa V^* V \right)^{-1} \Pi_D,$$

où  $\kappa = \sum_{j=1}^S \kappa_j$ . En raison, des propriétés vérifiées par les réponses fréquentielles de  $(W_i)_{1 \leq i \leq R}$  et  $V$ , l'inversion peut être implantée efficacement à l'aide de transformées de Fourier rapides.

## 4 Résultats expérimentaux

Nous considérons un problème de déconvolution 2D en présence de bruit de Poisson (bien que le formalisme précédent concerne le cas 1D, il s'étend de façon immédiate au cas 2D). L'image considérée est de taille  $m = 256 \times 256$ ,  $T$  est l'opérateur de convolution 2D (périodique) correspondant à un flou uniforme de taille  $5 \times 5$  et  $\alpha = 0.8$  est le facteur d'échelle du bruit de Poisson. Trois fonctionnelles composent le critère ( $R = 2$  et  $S = 1$ ) :  $f_1$  désigne le terme d'attache aux données lié à l'anti-log vraisemblance poissonnienne,  $f_2 = \iota_C$  est la fonction indicatrice du convexe  $C = [0, 255]^m$ ,  $g_1 = \tau \|\cdot\|_1$  (avec  $\tau > 0$ ) désigne le terme de régularisation favorisant la parcimonie de l'image reconstruite après transformation par  $F$ . Cet opérateur est successivement associé à une version des DTT complexes non ajustées [26, 27] et à des Bancs de Filtrés Propres (BFP) [23, 24]. Dans le cas où  $F$  représente une DTT complexe, on peut utiliser l'algorithme proposé dans [28]. Les deux types de transformées considérées conduisent à un même nombre de coefficients de trame. Les opérateurs linéaires sont  $L_1 = T$  et  $L_2 = I$ . Nous comparons également les résultats obtenus avec une régularisation par variation totale. Sur la figure 1, nous pouvons remarquer qu'en terme de SNR, les BFP conduisent à de meilleurs résultats. De plus, l'utilisation de BFP produit des artefacts visuels moins gênants sur les images reconstruites que l'utilisation de DTT. Notons que des

comparaisons menées sur cet exemple avec des algorithmes primaux-duaux ont montré la supériorité de l'approche proposée en terme de vitesse de convergence.

## 5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons montré que l'introduction d'une classe bien choisie de trames permet de sortir du cadre restrictif des trames ajustées lorsque des algorithmes proximaux primaux sont utilisés. La solution proposée permet de résoudre efficacement des problèmes de déconvolution périodique en présence de bruit non-nécessairement additif gaussien. Dans le cas où l'opérateur linéaire de dégradation n'est plus une convolution périodique, d'autres pistes doivent être explorées comme celles de trouver une autre base dans laquelle l'opérateur se diagonalise ou encore de recourir à des sous-itérations de gradient conjugué pour le calcul de  $c_\ell$  (notons cependant que pour assurer la robustesse aux erreurs dans le calcul de  $c_\ell$ , les itérations de PPXA+ doivent être légèrement modifiées et deviennent alors légèrement plus complexes [20]).

## Références

- [1] P. L. Combettes and V. R. Wajs. Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *Multiscale Modeling and Simulation*, 4(4) :1168–1200, Nov. 2005.
- [2] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Comm. Pure Applied Math.*, 57(11) :1413–1457, 2004.
- [3] M. A. T. Figueiredo and R. D. Nowak. An EM algorithm for wavelet-based image restoration. *IEEE Trans. Image Process.*, 12(8) :906–916, Aug. 2003.
- [4] J. Bect, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and A. Chambolle. A  $l^1$ -unified variational framework for image restoration. In T. Pajdla and J. Matas, editors, *Proc. European Conference on Computer Vision (ECCV)*, volume LNCS 3024, pages 1–13, Prague, Czech Republic, May 2004. Springer.
- [5] C. Chaux, P. L. Combettes, J.-C. Pesquet, and V. R. Wajs. A variational formulation for frame-based inverse problems. *Inverse Problems*, 23 :1495–1518, June 2007.
- [6] J. M. Bioucas-Dias and M. A. T. Figueiredo. A new TwIST : two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration. *IEEE Trans. Image Process.*, 16(12) :2992–3004, 2007.

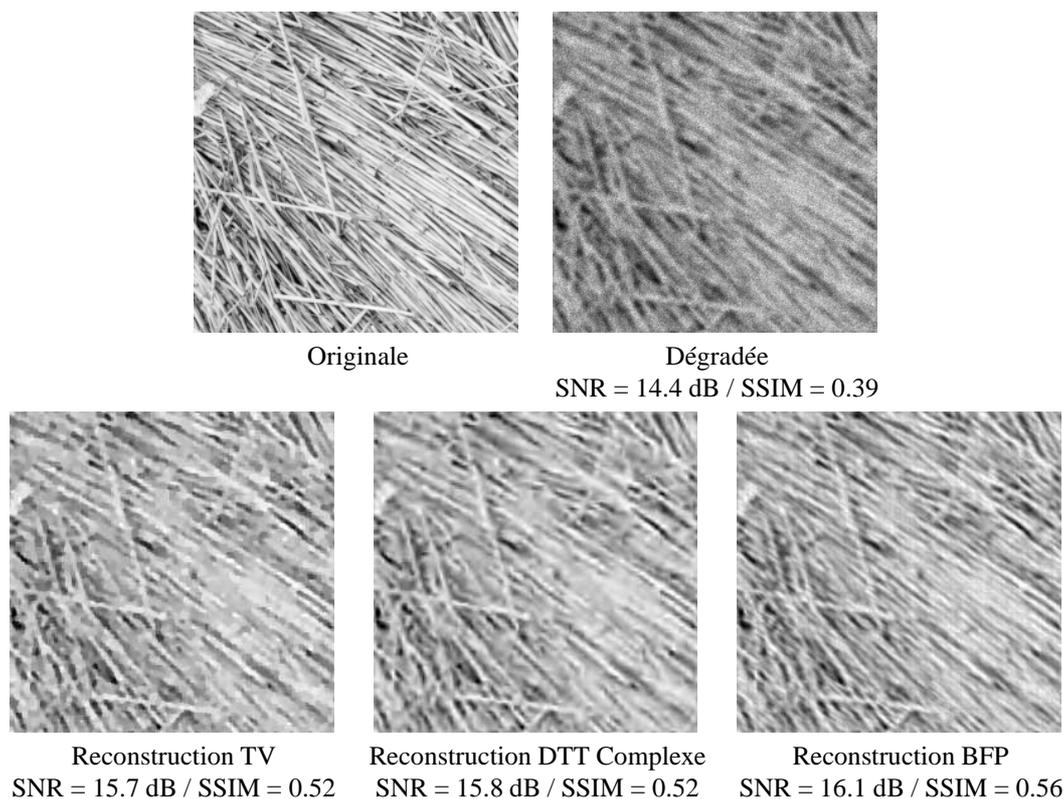


FIGURE 1 – Résultats de restauration en présence de bruit de Poisson.

- [7] A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2(1) :183–202, 2009.
- [8] L. Jacques, L. Duval, C. Chaux and G. Peyré. A Panorama on Multi-scale Geometric Representations, Intertwining Spatial, Directional and Frequency Selectivity. *Signal Processing - Special issue on Advances in Multirate Filter Bank Structures and Multiscale Representations*, 2010. To appear.
- [9] F.-X. Dupé, M. J. Fadili, and J.-L. Starck, “A proximal iteration for deconvolving Poisson noisy images using sparse representations,” *IEEE Trans. on Image Proc.*, 18(2) :310–321, Feb. 2009.
- [10] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet. A Douglas-Rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery. *IEEE J. Selected Topics Signal Process.*, 1(4) :564–574, Dec. 2007.
- [11] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet. A proximal decomposition method for solving convex variational inverse problems. *Inverse Problems*, 24(6) :x+27, Dec. 2008.
- [12] M. Afonso, J. Bioucas-Dias, and M. A. T. Figueiredo. An augmented Lagrangian approach to the constrained optimization formulation of imaging inverse problems. *IEEE Trans. Image Process.*, 20(3) :681–695, Sept. 2010.
- [13] S. Setzer, G. Steidl, and T. Teuber. Deblurring poissonian images by split Bregman techniques. *J. Vis. Comm. Image Repr.*, 21 :193–199, 2010.
- [14] G. Chen and M. Teboulle. A proximal-based decomposition method for convex minimization problems. *Mathematical Programming*, 64 :81–101, 1994.
- [15] P. L. Combettes, Dinh Dũng, and B. C. Vũ. Dualization of signal recovery problems. *Set-Valued and Variational Analysis*, 18 :373–404, 2010.
- [16] A. Chambolle and T. Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *J. Math. Imag. Vis.*, 40(1) :120–145, 2011.
- [17] M. Elad, P. Milanfar, and R. Ron. Analysis versus synthesis in signal priors. *Inverse Problems*, 23(3) :947–968, June 2007.
- [18] L. Chaâri, N. Pustelnik, C. Chaux, and J.-C. Pesquet. Solving inverse problems with overcomplete transforms and convex optimization techniques. In *SPIE*, 14 pages, San Diego, CA, Aug. 2–4 2009.
- [19] M. Carlván, P. Weiss, L. Blanc-Féraud, and J. Zerubia. Algorithme rapide pour la restauration d’image régularisée sur les coefficients d’ondelettes. In *Proc. GRETSI*, 4 pages, Dijon, Sept., 8–11 2009.
- [20] J.-C. Pesquet and N. Pustelnik. A parallel inertial proximal optimization method, 2011. Preprint. [http://www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2010/11/2825.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2010/11/2825.html)
- [21] D. Han and D. R. Larson. Frames, bases, and group representations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 147(697) :x+94, 2000.
- [22] J. Gauthier, L. Duval, and J. C. Pesquet. Optimization of synthesis over-sampled complex filter banks. *IEEE Trans. Signal Process.*, 57(10) :3827–3843, Oct. 2009.
- [23] B. D. Patil, P. G. Patwardhan, and V. M. Gadre. Eigenfilter approach to the design of one-dimensional and multidimensional two-channel linear-phase FIR perfect reconstruction filter banks. *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, 55(11) :3542–3551, Dec. 2008.
- [24] A. Tkacenko and P. P. Vaidyanathan. On the eigenfilter design method and its applications : a tutorial. *IEEE Trans. Circ. Syst. II*, 50(9) :497–517, Sep. 2003.
- [25] J. J. Moreau. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bull. Soc. Math. France*, 93 :273–299, 1965.
- [26] I. W. Selesnick, R. G. Baraniuk, and N. G. Kingsbury. The dual-tree complex wavelet transform. *IEEE Signal Process. Mag.*, 22(6) :123–151, Nov. 2005.
- [27] C. Chaux, L. Duval, and J.-C. Pesquet. Image analysis using a dual-tree  $M$ -band wavelet transform. *IEEE Trans. Image Process.*, 15(8) :2397–2412, Aug. 2006.
- [28] N. Pustelnik, J.-C. Pesquet, and C. Chaux. Proximal methods for image restoration using a class of non-tight frame representations In *Proc. EU-SIPCO*, 5 pages, Aalborg, Denmark, Aug. 23–27, 2010.