

Reconstruction d'Images basée sur la Décomposition Harmonique Circulaire pour une Nouvelle modalité de la Tomographie Compton

Gaël RIGAUD et Maï K. NGUYEN

ETIS - ENSEA/Université de Cergy-Pontoise/CNRS
6, avenue du Ponceau, 95000 Cergy-Pontoise, France

gael.rigaud@ensea.fr, mai.nguyen-verger@u-cergy.fr

Résumé – Nous proposons une méthode de reconstruction d'images basée sur la décomposition harmonique circulaire appliquée à une nouvelle modalité de tomographie Compton. Les reconstructions obtenues, et notamment la précision de reconstruction, prouvent la faisabilité d'une telle approche et son intérêt dans le domaine de l'imagerie médicale et du contrôle non destructif en proposant une alternative aux modalités de tomographie conventionnelle.

Abstract – We work out a novel image reconstruction algorithm based on the circular harmonic decomposition applied on a new modality of Compton scattering tomography. Numerical results and their accuracy of reconstruction prove the feasibility and the interest of this approach in the medical imaging field and the nondestructive testing while proposing an alternative to those of conventional tomography.

1 Introduction

Depuis plus de cinquante ans, les rayonnements ionisants sont utilisés pour sonder les parties cachées de la matière via la tomographie conventionnelle. Cette dernière offre un large champ d'applications tel que l'imagerie médicale, le contrôle non-destructif industriel ou encore la surveillance de l'environnement. La tomodensitométrie par rayons X permet de reconstituer la carte d'atténuation au travers du rayonnement primaire en considérant les rayonnements diffusés comme un bruit dégradant la qualité de l'image. Contrairement à ce concept, la tomographie Compton (CST) cherche à reconstruire la densité électronique en utilisant précisément le rayonnement diffusé ce qui présente une alternative intéressante par rapport aux modalités actuelles. Il existe plusieurs modalités de cette tomographie Compton dont la plus connue est celle proposée par S.J. Norton [1]. Récemment une nouvelle modalité de tomographie Compton a été proposée [2]. Ce travail s'appuie sur cette découverte pour proposer une méthode de reconstruction d'images basée sur la décomposition harmonique circulaire.

2 Formation d'images et Procédure d'inversion

Le principe de la tomographie Compton consiste à éclairer un objet avec une source mono-énergétique de rayonnement ionisant (généralement de type γ) avec des caractéristiques connues et de détecter le rayonnement diffusé selon différentes énergies à l'aide d'un détecteur à haute sensibilité multiénergétique.

Considérons un objet bidimensionnel représenté par sa densité électronique $n_e(\mathbf{M})$ supposée continue positive à support

borné sur \mathbb{R}^2 . La figure 1 présente le principe de fonctionnement de cette nouvelle modalité pour la tomographie Compton du diffusé. La source ponctuelle \mathbf{S} (de coordonnées polaires $(p, \varphi + \pi/2)$) est opposée au détecteur \mathbf{D} (de coordonnées polaires $(p, \varphi - \pi/2)$) de façon à ce que le rayonnement diffusé ne provienne que d'un seul demi-espace. Selon le principe de diffusion Compton, des photons vont alors être diffusés selon un angle ω par les électrons du milieu étudié. Les photons, ainsi diffusés, vont alors bénéficier d'une énergie E_ω (formule de Compton) et le détecteur va collecter une partie de ces photons et les "trier" selon leur énergie. Par rotation du couple \mathbf{S}/\mathbf{D} , nous obtenons une série de mesures dépendantes de la position angulaire de ce couple et de l'angle de diffusion. Mais comment exploiter ces mesures pour retrouver la fonction originale de l'objet sous étude ? Si l'on souhaite traiter ce problème comme un processus intégral alors nous devons extraire une géométrie de ce système.

En effet si nous fixons ponctuellement le couple \mathbf{S}/\mathbf{D} , et donc l'angle φ , et que nous nommons \mathbf{M} un site de diffusion d'angle ω alors l'angle $\widehat{\mathbf{SMD}}$ est constant et vaut $(\pi - \omega)$. Dès lors cet ensemble de points \mathbf{M} formera un arc de cercle de centre Ω (de coordonnées $(0, \frac{p}{\tan \omega})$ dans le repère tournant d'angle φ) et de rayon $\frac{p}{\sin \omega}$. Ainsi pour chaque couple (φ, ω) , nous pourrions associer une mesure $I(\varphi, \omega)$ correspondant à l'ensemble des contributions des sites de diffusion appartenant à l'arc de cercle $C(\omega, \varphi)$ d'équation polaire :

$$r = p(\sqrt{1 + \tau^2 \cos^2 \gamma} - \tau \cos \gamma), \quad (1)$$

où $\tau = \cot \omega$ et $\gamma = \theta - \varphi$ avec $\omega \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. Intéressons-nous maintenant à l'interprétation des flux de

photons traversant ce milieu diffusant. Nous savons que la densité de flux de photons issus de la source d'activité f_0 atteignant un site de diffusion \mathbf{M} s'écrit

$$\frac{f_0}{4\pi} \frac{\exp\left(-\int_{(x,y)\in\overline{\mathbf{SM}}}\mu(x,y)dl\right)}{\overline{\mathbf{SM}}^2},$$

avec $\mu(.,.)$ la carte d'atténuation du milieu étudié. La non-linéarité engendrée par l'exponentielle ne permet pas l'inversion que nous proposons, c'est pourquoi nous négligeons ce facteur. Sa prise en compte pourrait constituer un suite logique pour nos travaux futurs.

Le flux de photons issus du rayonnement primaire va ensuite subir des diffusions Compton. Alors le flux de photons diffusés selon un angle ω (d'énergie E_ω) et détectés par \mathbf{D} va pouvoir s'écrire comme :

$$\frac{f_0}{4\pi} \frac{1}{\overline{\mathbf{SM}}^2} n_e(\mathbf{M}) r_e^2 P(\omega) p_x \cos \alpha \frac{dV_{\mathbf{M}}}{\overline{\mathbf{MD}}^2},$$

où $n_e(\mathbf{M})$ est la densité électronique du volume $dV_{\mathbf{M}}$ qui définit le site de diffusion \mathbf{M} , p_x représente la largeur de la surface de détection du détecteur, r_e est le rayon de l'électron et $P(\omega)$ est la probabilité de Klein-Nishina. Le terme $\cos \alpha$ donne quant à lui la quantité de flux de photons détectés en fonction de leur angle d'arrivée sur le détecteur. Néanmoins nous ne pouvons prendre en compte ce terme car comme pour l'atténuation, il génère une non-séparabilité des paramètres qui empêche le raisonnement qui va suivre. Pour limiter cette approximation, nous pourrions imaginer une géométrie sphérique pour le détecteur ce qui limiterait fortement les angles d'arrivée et donc justifierait une telle approximation.

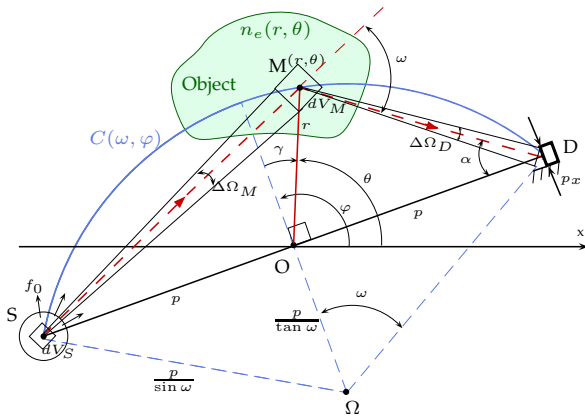


FIG. 1: Principe de la nouvelle CST basée sur la TRAC

Finalement la somme des contributions de chaque site de diffusion nous permet d'écrire les mesures comme :

$$I(\varphi, \omega) = \frac{p_x f_0 r_e^2 P(\omega)}{4\pi} \int_{\mathbf{M}_\omega \in C(\omega, \varphi)} \frac{n_e(\mathbf{M}_\omega) \cos \alpha}{\overline{\mathbf{S}\mathbf{M}_\omega}^2 \overline{\mathbf{M}_\omega \mathbf{D}}^2} dV_{\mathbf{M}_\omega}.$$

De plus nous pouvons montrer que

$$\overline{\mathbf{SM}}^2 \overline{\mathbf{MD}}^2 = (p^2 - r^2)^2 (1 + \tau^{-2}).$$

On peut ainsi réécrire les mesures $I(\varphi, \omega)$ comme l'intégrale de la densité électronique n_e sur les arcs de cercle considérés. Nous obtenons donc la généralisation de la transformée de Radon sur les arcs de cercle considérés (pour plus de concision nous appellerons cette transformée la TRAC) :

$$\mathcal{C}n_e(\varphi, \tau) = \frac{p_x r_e^2 f_0}{4\pi} \frac{P(\tan^{-1}(\frac{1}{\tau}))}{(1 + \tau^{-2})} \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{n_e(r(\gamma), \varphi - \gamma) \cos \alpha}{(p^2 - r(\gamma)^2)^2} \frac{r(\gamma) \sqrt{1 + \tau^2}}{\sqrt{1 + \tau^2 \cos^2(\gamma)}} d\gamma. \quad (2)$$

Pour démontrer l'inversion de la TRAC, il faut, dans un premier temps, passer dans l'espace des fréquences. Pour cela nous posons les composantes harmoniques circulaires de Fourier des fonctions n_e et $\mathcal{C}n_e$ [2] :

$$\begin{cases} n_{el}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n_e(r, \theta) e^{-il\theta} d\theta \\ \text{et} \\ \mathcal{C}n_{el}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{C}n_e(\varphi, \tau) e^{-il\varphi} d\varphi. \end{cases} \quad (3)$$

En appliquant la procédure de Cormack [3, 4], nous obtenons la formule inverse suivante :

$$n_{el}(r) = (-) \frac{8p(p^2 + r^2)}{p_x r_e^2 f_0} \times \left[\int_t^\infty \frac{\cosh(l \cosh^{-1}(\frac{q}{t}))}{\sqrt{q^2 - t^2}} \frac{d}{dq} \left(\frac{\mathcal{C}n_{el}(\frac{1}{q}) \sqrt{1 + q^2}}{P(\tan^{-1}(q))} \right) dq \right]_{t=\frac{2pr}{p^2-r^2}}, \quad (4)$$

où $q = 1/\tau$. Finalement $n_e(r, \theta)$ est reconstruit en repassant ses composantes harmoniques circulaires $n_{el}(r)$ dans le domaine spatial.

3 Reconstruction d'images basée sur la décomposition harmonique circulaire

Pour pouvoir développer un algorithme de reconstruction d'images, nous nous appuyons sur une analogie entre la TRAC et la transformée de Radon classique [3, 4, 5]. En effet nous pouvons passer de l'une à l'autre par les changements d'espace suivants :

$$\begin{cases} F_l \left(t = \frac{2pr}{p^2-r^2} \right) &= \frac{p_x r_e^2 f_0}{8p(p^2+r^2)} \times n_{el}(r) \\ G_l(q) &= \frac{\mathcal{C}n_{el}(\frac{1}{q}) \sqrt{1+q^2}}{P(\tan^{-1}(q))}. \end{cases} \quad (5)$$

Nous pouvons ainsi nous ramener au cas de la transformée de Radon classique traité par Cormack[3, 4] :

$$F_l(t) = (-) \frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{\cosh(|l| \cosh^{-1}(\frac{q}{t}))}{\sqrt{q^2 - t^2}} \frac{dG_l(q)}{dq} dq. \quad (6)$$

La formule inverse (équation (6)) présente de nombreuses difficultés pour l'implémentation numérique puisqu'en

étudiant le comportement de son intégrande lorsque q tend vers l , nous pouvons démontrer une divergence apparente rendant impossible son calcul.

Cormack [3, 4] a pu traiter cette singularité en exploitant une propriété d'orthogonalité des composantes harmoniques circulaires des projections,

$$\int_0^\infty dq G_l'(q) q^{\beta l} = 0 \quad \text{avec} \quad \beta l = (|l|-1), (|l|-3), \dots > 0,$$

et une identité des polynômes de Tchebychev de première et deuxième espèce (T_l et U_l),

$$\frac{T_{|l|}(x)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x - \sqrt{x^2-1})^{|l|}}{\sqrt{x^2-1}} + U_{|l|-1}(x),$$

obtenant ainsi une forme régularisée de la transformée de Radon inverse

$$F_l(t) = \frac{1}{\pi t} \int_0^t dq G_l'(q) U_{|l|-1}\left(\frac{q}{t}\right) - \frac{1}{\pi t} \int_t^\infty dq G_l'(q) \frac{\left((q/t) - \sqrt{(q/t)^2 - 1}\right)^{|l|}}{\sqrt{(q/t)^2 - 1}}. \quad (7)$$

Pour implémenter numériquement une telle formule nous nous inspirons de l'approche de Chapman et Cary [6] qui avaient proposés une méthode numérique basée sur la décomposition harmonique circulaire adaptée à la transformée de Radon définie sur les droites. Ainsi en posant F_{lj} et G_{lk} les formes discrétisées de F_l et G_l ,

$$G_{lk} = G_l(k\Delta t) \quad \text{et} \quad F_{lj} = F_l(j\Delta t),$$

avec Δt le pas d'échantillonnage des paramètres q et t que nous fixons, nous pouvons établir la transformée inverse sous forme discrétisée :

$$F_{lj} = \frac{1}{|l|\pi} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{G_{l(k+1)} - G_{lk}}{\Delta t} I_{lj} + \frac{1}{|l|\pi} \sum_{k=j}^{K-1} \frac{G_{l(k+1)} - G_{lk}}{\Delta t} J_{lj}, \quad (8)$$

avec

$$I_{lj} = \cos\left(|l| \cos^{-1}\left(\frac{k+1}{j}\right)\right) - \cos\left(|l| \cos^{-1}\left(\frac{k}{j}\right)\right)$$

et

$$J_{lj} = \exp\left(-|l| \cosh^{-1}\left(\frac{k+1}{j}\right)\right) - \exp\left(-|l| \cosh^{-1}\left(\frac{k}{j}\right)\right)$$

$$\text{où } K = \frac{\tan(\max\{\omega\})}{\Delta t}.$$

Nous reconstruisons ainsi les composantes théorique $F_l(t)$, puis en repassant dans l'espace initiale nous retrouvons les composantes d'origine $n_{el}(r)$ et enfin la densité électronique du milieu $n_e(r, \theta)$.

4 Résultats de simulations

Afin d'illustrer la faisabilité de notre nouvelle tomographie Compton et notre algorithme de reconstruction d'images, nous avons réalisé des simulations numériques sur le fantôme médical de Shepp-Logan (FIG.2). Nous discrétisons le milieu diffusant en considérant $N \times N$ unités de longueur (pixels) et considérons le nombre de rotations N_φ et le nombre d'angles de diffusion N_ω . Dans le but d'avoir un problème bien conditionné, nous devons avoir $N_\varphi \times N_\omega \geq N^2$. Nous prendrons le cas limite $N_\varphi = N_\omega = N = 256$ ainsi que $p = N$ et $\min\{\omega\} = \frac{\pi}{2N_\omega}$.

Pour mesurer la qualité de la reconstruction obtenue, nous définissons l'erreur absolue et quadratique normalisées (NMAE et NMSE) entre l'image d'origine I_o et la reconstruction I_r :

$$NMAE = 100 \times \frac{\|I_r - I_o\|_1}{N^2}, \quad NMSE = 100 \times \frac{\|I_r - I_o\|_2^2}{N^2}.$$

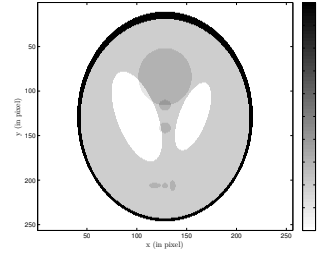


FIG. 2: Fantôme original de Shepp-Logan

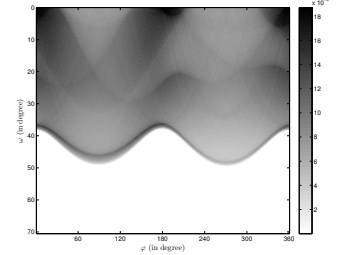


FIG. 3: Données TRAC du fantôme (FIG.2)

En tomographie Compton, la principale dégradation de la qualité d'image est le bruit poissonnien du processus d'émission photonique. Ainsi chaque mesure y_i devient

$$\tilde{y}_i \sim \mathcal{P}(y_i).$$

Pour illustrer la robustesse de notre algorithme au bruit, nous proposons de la comparer à la méthode analytique standard en tomographie conventionnelle : la "Filtered Backprojection" appliquée à la transformée de Radon classique (FBP-TR), dans un cas non bruité puis dans le cas d'un rapport signal à bruit (RSB) de 20 dB. Les figures 4(a) à 4(d) nous donnent les reconstructions obtenues par l'algorithme d'inversion de la TRAC que nous proposons (CHD-TRAC) et par FBP-TR et les erreurs sont données dans le tableau 1. Notre algorithme donne des résultats sensiblement meilleurs que ceux obtenus par la FBP-TR ce qui est très encourageant si l'on se place dans le cadre d'applications réelles. De plus il existe de nombreuses techniques de débruitage efficaces du bruit poissonnien [7] que l'on peut adapter à notre cas.

Pour caractériser le comportement de notre algorithme vis-à-vis du bruit et de la résolution de notre détecteur (N_ω), nous évaluons le NMAE et le NMSE en fonction de ces paramètres sans considérer de traitement particulier au bruit (FIG.5(a) et 5(b)). Dans un premier temps nous pouvons voir que la qualité

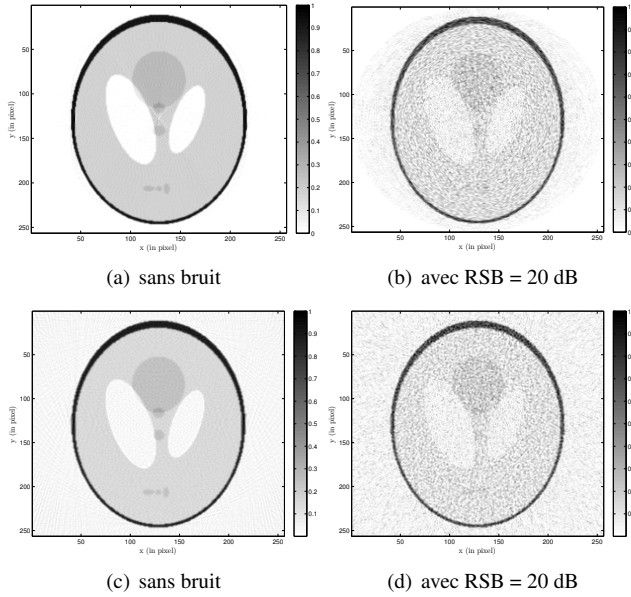


FIG. 4: Reconstructions du fantôme par CHD-TRAC (à partir des données de la FIG.3) (a)-(b) et par FBP-TR (c)-(d)

d'image reconstruite demeure très sensible au bruit en terme de NMAE et NMSE. En effet pour des niveaux de bruit importants ($RSB < 10$), l'erreur est trop élevée, il faut donc descendre à des niveaux de bruits beaucoup plus faibles ($RSB \geq 20$) pour pouvoir retrouver l'image originale. Étant donné que notre méthode de reconstruction analytique n'inclut pas intrinsèquement le traitement du bruit, un débruitage préalable sera utile avant d'appliquer notre algorithme.

Quant à l'évolution de notre erreur en fonction de la résolution du détecteur, elle devient trop importante lorsque l'on dispose de moins de données ($N_\omega \times N_\varphi$) que d'inconnues à reconstruire (N^2). Ce phénomène apparaît clairement pour $N_\omega < 100$. Il est intéressant de voir que lorsque le niveau de bruit augmente, la sensibilité au bruit est d'autant plus importante que la résolution énergétique est élevée. Ceci est cohérent avec le phénomène physique, puisque plus on augmente la résolution énergétique plus on diminue le nombre de photons détectés par niveaux d'énergie.

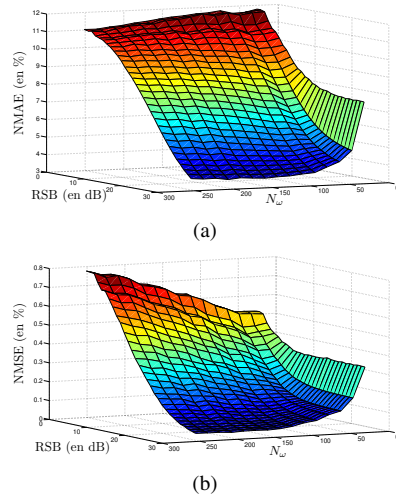


FIG. 5: NMAE (a) et NMSE (b) en fonction du RSB et de N_ω

TAB. 1: "Erreurs des reconstructions du fantôme FIG.2 par FBP-TR et par CHD-TRAC pour différents RSB"

		Sans Bruit	20 dB	10 dB	1 dB
NMAE	FBP-TR	5%	8.5%	12.7%	16%
	CHD-TRAC	2.4%	6.6%	10%	11.6%
NMSE	FBP-TR	0.11%	0.26%	0.5%	0.7%
	CHD-TRAC	0.036%	0.17%	0.4%	0.7%

5 Conclusion et Perspectives

Dans ce papier nous avons proposé un nouvel algorithme de reconstruction basé sur la décomposition harmonique circulaire et adapté à une nouvelle modalité de tomographie Compton. La régularisation opérée dans l'espace des composantes harmoniques circulaires présentent l'avantage de reconstruire une image consistante avec les données contrairement à l'algorithme de "Filtered Backprojection" utilisé dans les méthodes de tomographie conventionnelle. De plus nous avons pu voir que cet algorithme proposait une reconstruction comparable à ce dernier tout en proposant les avantages de cette tomographie :

- utilisation du rayonnement diffusé (et donc suppression du bruit généré par ce rayonnement dans les méthodes conventionnelles),
- restitution de la densité électronique moins sensible au vieillissement de la matière que la carte d'atténuation,
- reconstruction 2D à partir d'un seul détecteur "ponctuel",
- possibilité d'une modalité de tomographie bimodale.

Étant donné que cette modalité de tomographie impose une étude du milieu sur 360° , elle s'adapte parfaitement à l'étude des petites structures allant d'une barre métallique en contrôle non destructif à un être humain en imagerie médicale.

Références

- [1] S. J. Norton, "Compton scattering tomography," *Jour. Appl. Phys.*, vol. 76, pp. 2007–2015, 1994.
- [2] M. K. Nguyen and T. T. Truong, "Inversion of a new circular-arc Radon transform for Compton tomography," *Inverse Problems*, vol. 26, 065005 (13pp), 2010.
- [3] A. M. Cormack, "The Radon transform on a family of curves in the plane," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 83, pp. 325–330, October 1981.
- [4] A. M. Cormack, "Radon's problem - old and new," *SIAM-AMS Proceedings*, vol. 14, pp. 33–39, 1984.
- [5] G. Rigaud, M. K. Nguyen and A. K. Louis, "Circular Harmonic Decomposition Approach for Numerical Inversion of Circular Radon Transforms," *New Computational Methods for Inverse Problems*, Cachan, France, Mai 2011.
- [6] C. H. Chapman and P. W. Cary, "The circular harmonic Radon transform," *Inverse Problems*, vol. 2, pp. 23–49, 1986.
- [7] F.-X. Dupé, M.J. Fadili and J.-L. Starck, "A proximal iteration for deconvolving poisson noisy images using sparse representations," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 18, no. 12, pp. 310–321, 2009.