

# Transformée hyperbolique en ondelettes 2D pour la caractérisation d'images autosimilaires anisotropes

S.G. ROUX<sup>1</sup>, M. CLAUSEL<sup>2</sup>, B. VEDEL<sup>3</sup>, S. JAFFARD<sup>4</sup>, P. ABRY<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique, UMR 5672, CNRS, Ecole Normale Supérieure de Lyon.

<sup>2</sup>Université de Lyon, CNRS, INSA de Lyon, Institut Camille Jordan UMR 5208, Villeurbanne.

<sup>3</sup>LMAM, Université de Bretagne Sud, Université Européenne de Bretagne, Campus de Tohannic, Vannes.

<sup>4</sup>Département de Mathématiques, Université Paris XII, CNRS, UMR 8050, Créteil.

stephane.roux@ens-lyon.fr, marianne.clausel@insa-lyon.fr,  
beatrice.vedel@univ-ubs.fr, stephane.jaffard@u-pec.fr, patrice.abry@ens-lyon.fr

**Résumé** – Nous nous intéressons à la caractérisation de champs 2D possédant conjointement des propriétés spatiales d'autosimilarité et d'anisotropie. Il s'agit, d'une part, de mettre en évidence une éventuelle anisotropie ; d'autre part, d'estimer efficacement le paramètre d'autosimilarité, malgré la présence d'anisotropie. Pour étudier cette question, nous utilisons un modèle générique de processus bidimensionnels autosimilaires anisotropes gaussiens. Une procédure d'estimation du paramètre d'autosimilarité, qui prend explicitement en compte le caractère possiblement anisotrope du champ analysé, est proposée et étudiée théoriquement et numériquement. Le paramètre d'anisotropie est également estimé. L'originalité de cette contribution tient principalement dans la mise en évidence qu'une analyse pertinente de l'autosimilarité dans un contexte anisotrope requiert l'abandon de la transformée discrète en ondelettes 2D isotrope classique au profit de la transformée hyperbolique discrète en ondelettes 2D.

**Abstract** – Analyzing 2D random fields that are characterized jointly by self-similarity and anisotropy properties constitutes the core of the present contribution. It aims both at detecting a possibly existing anisotropy and at providing a reliable estimate of the self-similarity parameter despite anisotropy. To that end, generic 2D Gaussian anisotropic and self-similar processes are used. An estimation procedure for the self-similarity parameter, that explicitly accounts for the possibly existing anisotropy, is devised and analyzed both theoretically and numerically. The parameter defining anisotropy is also estimated. The originality of the present contribution consists in showing that a pertinent analysis of self-similarity in the presence of anisotropy requires the use of the hyperbolic 2D discrete wavelet transform instead of the classical isotropic 2D discrete wavelet transform.

## 1 Motivations et objectifs

Dans de nombreuses applications, l'information à caractériser consiste en une texture, bien modélisée par un champ gaussien (asymptotiquement) autosimilaire de paramètre  $H$ . L'autosimilarité, envisagée comme l'information pertinente à extraire, est cependant souvent compliquée par une propriété d'anisotropie (cf. e.g., [9]). Analyser conjointement ces deux propriétés pour caractériser les images et estimer correctement le paramètre d'autosimilarité constitue un enjeu difficile théoriquement et crucial pratiquement, au centre de la présente contribution.

Pour encadrer cette étude il sera fait usage ici d'un modèle générique de processus aléatoires gaussiens autosimilaires et anisotropes tels ceux définis et étudiés dans [3, 1], décrits en Section 2. L'originalité de cette contribution est d'illustrer que l'analyse d'un champ anisotrope implique l'abandon, parce qu'isotrope, de la transformée discrète en ondelettes 2D classique et son remplacement par une transformée discrète hyperbolique 2D, qui per-

met l'usage conjoint de deux facteurs de dilatation différents selon les axes horizontal et vertical (cf. Section 3.1). À partir des coefficients de cette transformée, une procédure d'estimation des paramètres d'anisotropie et d'autosimilarité est définie et étudiée théoriquement (cf. Section 3.2), en se reposant sur l'intuition née de la relation fondamentale reliant anisotropie et bases d'ondelettes de Triebel (cf. [10]). Les performances d'estimation effectivement observées en pratique (biais et variance) sur des images de tailles variables sont finalement étudiées en Section 4 au moyen de simulations numériques.

## 2 Processus aléatoires gaussiens auto-similaires et anisotropes

Les images analysées seront supposées appartenir au modèle générique des processus gaussiens bidimensionnels autosimilaires anisotropes, à accroissements stationnaires,

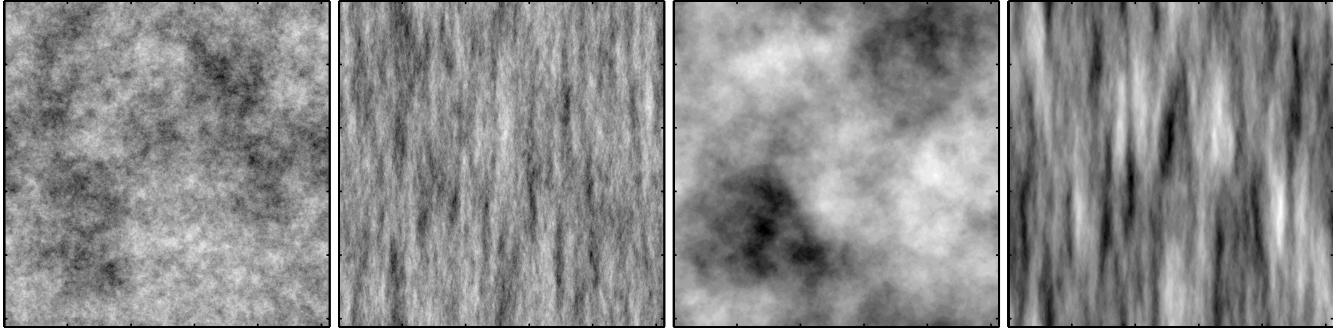


FIGURE 1 – **Champs autosimilaires gaussiens.** De gauche à droite :  $(\alpha, H) = (1, 0.2), (0.7, 0.2), (1, 0.7), (0.7, 0.7)$ .

définis dans [3, 1]. Plus précisément, on se concentrera sur la classe des processus,  $X_{\alpha, H}(\underline{x})$  caractérisés par deux paramètres  $(\alpha, H)$  quantifiant respectivement anisotropie et autosimilarité :

$$X_{\alpha, H}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i(\underline{x}, \underline{\xi})} - 1}{(|\xi_1|^{1/\alpha} + |\xi_2|^{1/(2-\alpha)})^{(H+1)}} d\widehat{W}(\underline{\xi})$$

avec  $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2-\alpha \end{pmatrix}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < H < \alpha$ ,  $\underline{x} = (x_1, x_2)$  et  $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ . L'autosimilarité prend alors la forme explicite,  $\forall a > 0$  et  $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$  :

$$\{X_{\alpha, H}(a^D \underline{x})\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{a^H X_{\alpha, H}(\underline{x})\}. \quad (1)$$

On appellera *angle d'anisotropie* le paramètre  $\gamma = (2 - \alpha)/\alpha \in (1, +\infty)$ . Notons que  $\alpha = \gamma = 1$  correspond à un champ isotrope, et que  $1 < \alpha < 2$  (ou  $\gamma \in (0, 1)$ ) revient à échanger les rôles des axes horizontal et vertical. Des routines MATLAB développées par nos soins permettent d'obtenir les exemples illustrés en figure 1.

### 3 Analyse et estimation

L'idée principale de cette contribution tient dans l'observation que la transformée discrète en ondelettes 2D classique (2D-DWT pour *Discrete Wavelet Transform*), parce qu'imposant un seul et même facteur de dilatation  $2^j$  dans les deux directions, ne peut mettre en évidence l'éventuelle anisotropie d'une image. La transformée hyperbolique en ondelettes (HWT, pour *Hyperbolic Wavelet Transform*, cf. e.g., [6]), elle, repose sur l'usage conjoint de deux facteurs de dilatation différents,  $2^{j_1}, 2^{j_2}$ , selon chacune des directions de l'image. Avec le choix  $j_2 = \gamma j_1$ , les coefficients de la HWT correspondent presque à ceux obtenus avec une base de Triebel de paramètre  $\gamma$  (cf. [10]), qui serait idéalement adaptée à l'anisotropie de l'image et en permettrait ainsi la meilleure analyse. Le reste de cette section formalise cette intuition, à partir des travaux théoriques développés dans [4, 5].

#### 3.1 Transformée hyperbolique

La transformée hyperbolique 2D en ondelettes est construite comme produit tensoriel d'une base d'ondelette, is-

sue d'une analyse multirésolution 1D avec elle-même (cf. e.g., [7]). On note  $\varphi, \psi$  respectivement la fonction d'échelle (ou ondelette-père) et l'ondelette mère (ici Daubechies 3). On définit alors pour tous  $\underline{j} = (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$  et  $\underline{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ , la collection :

$$\begin{aligned} \psi_{j_1, j_2, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= 2^{(j_1+j_2)/2} \psi(2^{j_1} x_1 - k_1) \psi(2^{j_2} x_2 - k_2), \\ \psi_{-1, j_2, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= 2^{j_2/2} \varphi(x_1 - k_1) \psi(2^{j_2} x_2 - k_2), \\ \psi_{j_1, -1, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= 2^{j_1/2} \psi(2^{j_1} x_1 - k_1) \varphi(x_2 - k_2), \\ \psi_{-1, -1, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= \varphi(x_1 - k_1) \varphi(x_2 - k_2), \end{aligned}$$

qui définit la base de  $L^2(\mathbb{R})$  sous-jacente à la HWT (cf. [6]). Les coefficients (en norme  $L_1$ ) de la HWT sont alors définis par :

$$d_X(\underline{j}, \underline{k}) = 2^{(j_1+j_2)/2} \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\underline{j}, \underline{k}}(x_1, x_2) X(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

Ces coefficients peuvent être calculés par un algorithme pyramidal récursif à temps discret, dont le pavage de l'espace correspondant aux deux premières itérations est illustré sur la figure 2. De manière pratique, une itération de la HWT d'une image de taille  $N \times N$  s'obtient en combinant une itération de l'algorithme 2D-DWT à  $N/2$  1D-DWT pour chaque ligne de la sous-bande LH et à  $N/2$  1D-DWT pour chaque colonne de la sous-bande HL.

Cette base d'ondelette hyperbolique entretient une relation étroite avec la base de Triebel d'indice  $\gamma$  (cf. [10]) qui fonde la procédure d'estimation décrite ci-après.

#### 3.2 Estimation

Soient les fonctions de structure :

$$S(q, j_1, j_2) = \left( \frac{1}{N_{j_1, j_2}} \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} |d_X(j_1, j_2, k_1, k_2)|^q \right),$$

où  $N_{j_1, j_2}$  désigne le nombre de coefficients disponibles aux échelles  $(j_1, j_2)$ . On définit alors, pour tout  $\lambda > 0$ , les quantités (où  $[j\lambda]$  dénote la partie entière de  $j\lambda$ ) :

$$\tau(q, \lambda) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{-2 \log_2(S(q, j, [j\lambda]))}{j(1 + \lambda)},$$

ainsi que les estimateurs :

$$\hat{\gamma}_q = \operatorname{argmin}_{\lambda} \tau(q, \lambda), \quad \hat{H}_q = \tau(q, \hat{\gamma})/q.$$



FIGURE 2 – **Transformée hyperbolique en ondelettes.** Gauche : une étape de la 2D-DWT ; Milieu : une étape de la HWT correspond a une étape de la DWT 2D plus l’ensemble des DWT 1D suivant les lignes pour (H,L) et suivant les colonnes pour (L,H). Droite : deux étapes successives de la HWT.

La convergence asymptotique de ces deux estimateurs sera prouvée de façon complète et détaillée dans [8] et repose sur les résultats déjà obtenus dans [4, 5]. En essence, elle repose sur les arguments suivants. La représentation des  $d_X(j_1, j_2, k_1, k_2)$  sous forme d’intégrales stochastiques permet de montrer que ceux-ci sont faiblement corrélés et que l’ordre de grandeur de leur variance s’écrit :

$$\mathbb{E}(|d_X(\underline{j}, \underline{k})|^2)^{1/2} \approx 2^{\frac{j_1+j_2}{2}} 2^{-(H+1) \max(\frac{j_1}{\alpha}, \frac{j_2}{2-\alpha})}.$$

Le caractère gaussien du processus justifie que ce comportement en fonction de  $j$  soit valable pour tous les ordres statistiques  $q > -2$ . De plus, la faible corrélation des coefficients de la HWT implique que  $S(q, j_1, j_2) \approx \mathbb{E}(|d_X(j, \underline{k})|^q)$ . Enfin, en choisissant des échelles  $j_1 = \alpha' j$  et  $j_2 = (2 - \alpha') j$  (i.e.,  $j_2 = \lambda j_1$ , en posant  $\lambda = (2 - \alpha')/\alpha'$ ), on obtient :

$$S(q, j, \lambda j) \approx 2^{j \frac{q(\lambda+1)}{2}} \left(1 - (H+1) \max\left(\frac{\alpha'}{\alpha}, \frac{2-\alpha'}{2-\alpha}\right)\right),$$

et donc :  $\tau(q, \lambda) = q(1 - (H+1) \max(\frac{\alpha'}{\alpha}, \frac{2-\alpha'}{2-\alpha}))$ . De manière évidente,  $\tau(q, \lambda)$  est extrémal quand  $\alpha' = \alpha$  (i.e.,  $\lambda = \gamma$ ) et devient, dans ce cas,  $\tau(q, \gamma) = qH$ . Ces arguments justifient la définition des estimateurs proposés et indiquent qualitativement leur convergence asymptotique.

## 4 Simulations numériques

Au-delà de l’argument de convergence évoqué ci-dessus, cette section étudie, au moyen de simulations numériques, les performances d’estimation de  $\hat{\gamma}_q$  et  $\hat{H}_q$ .

### 4.1 Illustration de l’estimation

La figure 3 illustre pour les processus autosimilaires anisotrope et isotrope représentés en figure 1 la surface  $\log_2(S(q = 2, j_1, j_2))$  pour  $(j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$ . Par interpolation de cette surface, on calcule  $S(q, j, \lambda j)$  pour tout  $\lambda$  reliant au moins deux points de coordonnées entières.

Les régressions linéaires de  $\log_2(S(q = 2, j, \lambda j))$  versus  $\log_2(2^j)$  (utilisant toutes les échelles disponibles) fournissent une estimation de  $\hat{\tau}(q = 2, \lambda)$ . Ces régressions linéaires sont illustrées sur les figures 3 (c) et (d) pour les

directions  $\lambda = \gamma$  (trait plein) et  $\lambda = 1$  (trait pointillé). Sur les figures 3 (a) et (b), le trait plein matérialise la ligne  $\hat{\tau}(q = 2, \hat{\gamma})$  pour laquelle  $\hat{\tau}(q = 2, \lambda)$  est maximale. Son écart à la diagonale rend compte clairement du caractère anisotrope (cf. Fig. 1 (a)) ou, au contraire, isotrope (cf. Fig. 1 (b)) de l’image et permet une estimation  $\hat{\gamma}$  du paramètre d’anisotropie  $\gamma$ . Enfin,  $\tau(2, \hat{\gamma})/2$  produit une estimation  $\hat{H}$  du paramètre d’autosimilarité  $H$ .

Sur la figure 3 (a), les lignes en trait pointillé matérialisent  $\hat{\tau}(q = 2, 1)$ , autrement dit, ce qui est accessible si l’on ne dispose que des coefficients de la 2D-DWT. La figure 3 (c) montre alors de façon non ambiguë que l’estimation de  $H$  obtenue par  $\hat{\tau}(q = 2, 1)/2$  serait fortement biaisée, indiquant clairement que la seule 2D-DWT ne permet pas d’estimer correctement  $H$  en présence d’anisotropie.

### 4.2 Performances d’estimation

Pour analyser les performances statistiques des estimateurs, on a généré un grand nombre (100) de réalisations de processus de paramètres  $(\alpha, H)$ , à chacune desquelles les procédures d’estimations de  $H$  et  $\gamma$  sont appliquées. En figure 4, moyennes et écart-types des estimées sont illustrés, pour une taille d’image fixée,  $1024 \times 1024$ , pour deux valeurs de  $H$ , en fonction de  $\gamma$ . Cette figure montre des performances d’estimation très satisfaisantes, quels que soient le jeu de paramètres choisis, avec un biais pour  $\hat{H}$  d’autant plus grand que l’écart à l’isotropie est fort. Ceci peut être expliqué par la résolution finie de l’image et l’usage d’échelle dyadique, qui limitent le nombre de rapports  $\lambda = j_1/j_2$ , et donc de directions disponibles à l’analyse pratique. Notons cependant, que cette limitation décroît lorsque la taille de l’image augmente.

Enfin, la figure 5 montre que le biais (relatif) de  $\hat{\gamma}$  varie faiblement en fonction de la taille des images, tandis que celui de  $\hat{H}$  peut dépendre fortement de  $N$ , pour les faibles valeurs de  $H$  (un résultat cohérent avec le cas univarié). On notera que le nombre d’échelles disponibles à l’analyse diminue avec la taille de l’image.

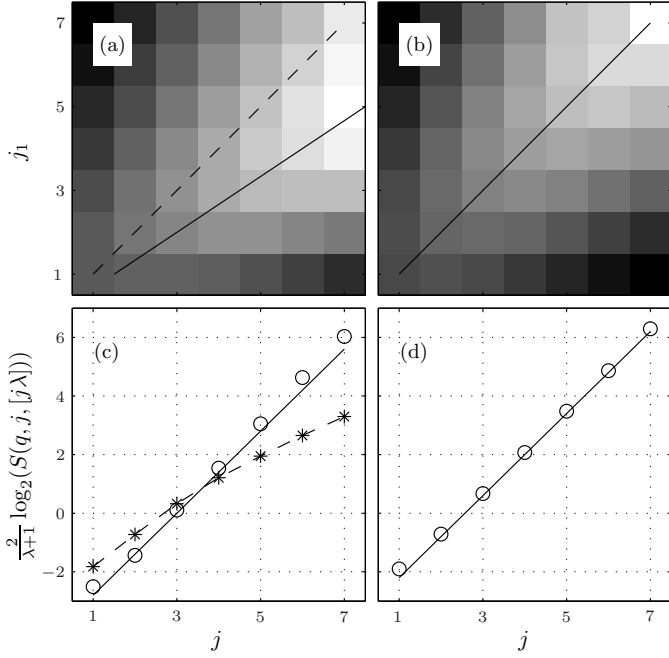


FIGURE 3 – **Analyse.** Fonctions  $S(q = 2, j_1, j_2)$  pour les champs anisotropes (a) et isotropes (b) d'exposant  $H = 0.7$  présentés sur la figure 1. Fig. (a) et (b) : Les lignes en trait plein correspondent à la direction  $\hat{\gamma}$ , le trait pointillé à  $\gamma = 1$  et donc aux coefficients de la 2D-DWT classique. Fig. (c) et (d) : Estimation de  $H$  par  $\tau(q = 2, \hat{\gamma})$ , selon la direction  $\lambda = \hat{\gamma}$  (○) obtenue pour les champs anisotropes (c) et isotropes (d). Les lignes continues correspondent à la courbe théorique  $2jH$ . Les étoiles dans (c) correspondent à l'estimation (fortement biaisée) de  $H$  par  $\tau(q = 2, \lambda = 1)$  et donc en n'utilisant que les seuls coefficients de la 2D-DWT classique.

## 5 Perspectives

Les résultats obtenus ici constituent de claires indications en faveur de l'usage de la transformée en ondelette hyperbolique pour l'analyse de textures gaussiennes auto-similaire anisotrope. La procédure proposée constitue une solution générale, simple, pratique et effective. Il sera envisagée dans le futur, l'extension et le développement de cette procédure i) à l'étude d'autres modèles d'anisotropie ; ii) à la création de tests d'hypothèse d'écart à l'isotropie, dans l'esprit des travaux conduits dans [2] ; iii) à des processus auto-similaires non gaussiens. Enfin, l'extension à l'analyse multifractale de l'étude de l'anisotropie constitue l'objectif ultime de ce travail. Celle-ci nécessitera une modification importante, actuellement à l'étude, des fonctions de structure à utiliser [8].

## Références

[1] H. Biermé, M.M. Meerschaert, and H.P. Scheffler, *Operator scaling stable random fields.*, Stoch. Proc. Appl. **117** (2009), no. 3, 312–332.

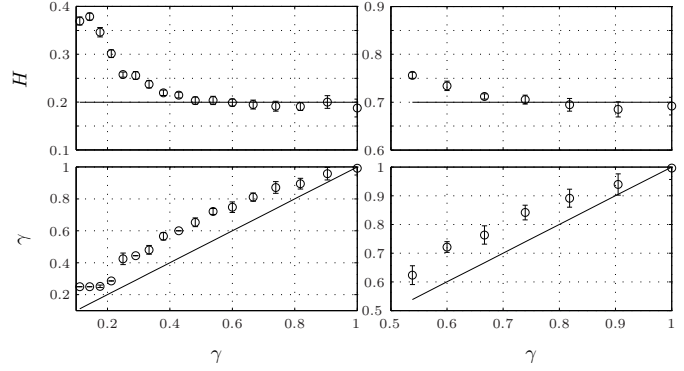


FIGURE 4 – Performances d'estimation de  $\hat{H}$  et  $\hat{\gamma}$  pour différents couples  $(\alpha, H)$  (lignes pleines : valeurs théoriques).

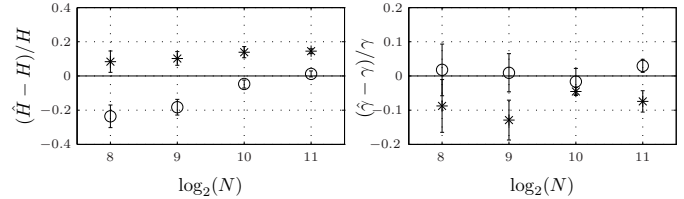


FIGURE 5 – Performances d'estimation de  $\hat{H}$  et  $\hat{\gamma}$  pour différentes tailles d'image  $(N \times N)$  et pour les processus  $(H, \gamma) = (0.2, 0.7)$  (○) et  $(0.6, 0.7)$  (★).

[2] H. Biermé and F. Richard, *Statistical test for anisotropy for fractional brownian textures. applications to full-field digital mamography*, J. Math. Imaging Vision **36** (2010), no. 3, 227–240.

[3] A. Bonami and A. Estrade, *Anisotropic analysis of some gaussian models*, The Journal of Fourier Analysis and Applications **9** (2003), no. 3, 215–236.

[4] M. Clausel and B. Vedel, *Explicit constructions of operator scaling self-similar random gaussian fields*, à paraître, Fractals (2010).

[5] M. Clausel and B. Vedel, *Two optimality results about sample path properties of operator scaling gaussian random fields*, preprint, Mathematische Nachrichten (2010).

[6] R. A. DeVore, S. V. Konyagin, and V. N. Temlyakov, *Hyperbolic wavelet approximation*, Constr. Approx. **14** (1998), 1–26.

[7] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, San Diego, CA, 1998.

[8] S. Roux, B. Vedel, M. Clausel, S. Jaffard, and P. Abry, *Hyperbolic wavelet transform for anisotropic scale invariant images*, preprint (2011).

[9] D. Schertzer and S. Lovejoy, *Physically based rain and cloud modeling by anisotropic, multiplicative turbulent cascades*, J. Geophys. Res. **92** (1987), 9693–9714.

[10] H. Triebel, *Theory of functions spaces III*, Birkhauser Verlag, 2006.