

Restitution de phase par seuillage itératif en ondelettes

Valentina DAVIDOIU, Bruno SIXOU, Max LANGER, Françoise PEYRIN

CREATIS, INSERM U630, CNRS 5220 INSA-Lyon, France-69621, Villeurbanne Cedex, France

Valentina.Davidoiu@insa-lyon.fr, Bruno.Sixou@insa-lyon.fr

Langer@esrf.fr, fpeyrin@esrf.fr

Résumé – La technique d’imagerie par contraste de phase repose sur une mesure de l’intensité de Fresnel diffractée associée à un déphasage induit par l’objet. La restitution de cette phase est un problème inverse mal posé qui requiert une régularisation. Dans ce travail, nous étudions la résolution du problème inverse en coordonnées ondelettes et nous utilisons la méthode de type Landweber seuillé pour régulariser la solution. L’algorithme est évalué en utilisant des données simulées très bruitées. Nous montrons que cette approche permet d’améliorer les résultats obtenus avec des régularisations de type Tikhonov.

Abstract – The X-ray phase contrast imaging technique relies on the measurement of the Fresnel diffraction intensity patterns associated to a phase shift induced by the object. The phase retrieval problem is an ill-posed problem which requires some regularization. In this work, we investigate the resolution of the inverse problem in wavelet coordinates and we use an iterative thresholding Landweber type method to regularize the solution. The algorithm is evaluated using simulated noisy data. We show that this approach outperforms the Tikhonov like methods.

1 Introduction

L’imagerie par contraste de phase en rayons X est une technique très sensible aux nombreuses applications allant de la caractérisation de la structure osseuse, à l’imagerie du petit animal en passant par la science des matériaux [1, 2, 3]. Si la cohérence du faisceau de rayons X est suffisante, le contraste est obtenu en plaçant le détecteur après l’objet. Une relation non linéaire existe entre l’intensité de Fresnel diffractée à une certaine distance et le déphasage induit par l’objet. La linéarisation du problème direct conduit à une équation aux dérivées partielles reliant la phase et l’intensité [4, 5, 6, 7]. Cependant, ce problème inverse de la restitution de la phase est mal posé et il requiert une régularisation. Une approche utilisant une régularisation de Tikhonov a été étudiée en détail [2, 8, 9]. Elle donne de bons résultats pour des niveaux de bruit faibles mais elle s’avère insuffisante dans le cas de signaux très bruités. Afin d’obtenir une meilleure reconstruction, nous étudions ici une autre méthode de régularisation. Il est bien connu que la représentation parcimonieuse de signaux sur des bases de frames adaptées, associée à une régularisation l_1 , permet de reconstruire des signaux très bruités ou à partir de données incomplètes [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Notre travail constitue la première utilisation de ce type d’approche pour le problème de restitution de la phase. Nous présentons dans une première partie le problème direct de la formation de l’image et les approches de type Tikhonov utilisées dans les travaux précédents. Nous nous intéressons ensuite à la résolution du problème inverse en coordonnées ondelettes et nous

appliquons une méthode de type Landweber seuillé. L’algorithme est évalué sur des données simulées très bruitées. Nous montrons que cette approche permet d’améliorer notablement les résultats obtenus par les méthodes de régularisation utilisées auparavant.

2 Le problème direct et le problème inverse linéaire

2.1 Le problème direct de la formation de l’image

Un objet traversé par un faisceau de rayons X cohérent de longueur d’onde λ peut être décrit par un indice de réfraction complexe qu’on peut écrire sous la forme [18] :

$$n(x, y, z) = 1 - \delta_r(x, y, z) + i\beta(x, y, z) \quad (1)$$

En négligeant la diffraction à l’intérieur de l’objet, l’interaction des rayons X avec la matière peut être modélisée par une transmittance T fonction des coordonnées $X = (x, y)$ dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation z .

$$T(\mathbf{x}) = \exp[-B(\mathbf{x}) + i\varphi(\mathbf{x})] = a(\mathbf{x}) \exp[i\varphi(\mathbf{x})] \quad (2)$$

L’absorption $a(\mathbf{x})$ et la phase $\varphi(\mathbf{x})$ induite par l’objet peuvent être considérés respectivement comme les projections des parties réelles et imaginaires de l’indice de réfraction :

$$B(\mathbf{x}) = \frac{2\pi}{\lambda} \int \beta(x, y, z) dz \quad (3)$$

et

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{2\pi}{\lambda} \int \lambda(x, y, z) dz \quad (4)$$

L'intensité de Fresnel diffractée à la distance D est le carré du module de l'onde émergente :

$$\mathcal{I}_D(\mathbf{x}) = |T(\mathbf{x}) * P_D(\mathbf{x})|^2 \quad (5)$$

où $*$ est la convolution de la transmittance avec le propagateur de Fresnel à la distance D . Ce propagateur s'écrit pour une distance de propagation D :

$$P_D(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\lambda D} \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda D} |\mathbf{x}|^2\right) \quad (6)$$

Le produit de convolution peut être calculé en utilisant la transformée de Fourier définie dans la suite par :

$$\tilde{g}(\mathbf{f}) = F(g)(\mathbf{f}) = \int g(\mathbf{x}) \exp(-2i\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}) d\mathbf{x} \quad (7)$$

où $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ est la fréquence spatiale.

2.2 Le problème inverse linéaire

Plusieurs approches ont été étudiées pour ce problème qui sont basées sur une relation linéarisée entre la phase et l'intensité. Pour des distances de propagation faibles, la méthode TIE (Transport of Intensity Equation) est la plus utilisée [5, 7]. Pour une faible absorption et une phase variant lentement, la méthode CTF (Contrast Transfer Function) donne de bons résultats [8]. Une approche qui combine et améliore les deux méthodes précédentes a été proposée récemment [2, 9, 8]. Dans ce cadre, la transformée de Fourier de l'intensité peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_D(\mathbf{f}) &= \tilde{\mathcal{I}}_D^{\varphi=0}(\mathbf{f}) + 2 \sin(\pi\lambda D|\mathbf{f}|^2) \mathcal{F}\{\mathcal{I}_0\varphi\}(\mathbf{f}) \\ &+ \frac{\lambda D}{2\pi} \cos(\pi\lambda D|\mathbf{f}|^2) \mathcal{F}\{\nabla \cdot (\varphi \nabla \mathcal{I}_0)\}(\mathbf{f}) \end{aligned} \quad (8)$$

où $\tilde{\mathcal{I}}_D^{\varphi=0}(\mathbf{f})$ est l'intensité à la distance D si le déphasage est nul et \mathcal{I}_0 l'intensité pour $D = 0$. L'absorption $a(\mathbf{x})$ peut être obtenue expérimentalement en plaçant un détecteur en $D = 0$. Le problème de restitution de la phase peut donc être formalisé comme un problème inverse linéaire :

$$\mathcal{I} = \mathcal{A}\varphi + \varepsilon \quad (9)$$

où \mathcal{I} est l'ensemble de mesure bruitées, $\mathcal{I}_D - \mathcal{I}_D^{\varphi=0}$, ε un bruit additif gaussien, φ est la phase à reconstruire et \mathcal{A} un opérateur linéaire. Le problème considéré ici de la restitution de la phase est un problème inverse mal posé. En présence de bruit, des méthodes de régularisation sont requises. Une solution itérative basée sur une régularisation de type Tikhonov et incluant plusieurs distances a été étudiée en détail [2, 9]. Cette solution n'est pas optimale et conduit à une reconstruction peu satisfaisante notamment à basses fréquences et pour des niveaux de bruit élevés. Des techniques de débruitage ont permis d'améliorer quelque peu la solution obtenue [2, 9]. Dans ce travail,

nous appliquons un algorithme classique de reconstruction itératif de type Landweber associé à un seuillage des coefficients d'ondelette [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. La solution associée à la régularisation de type Tikhonov sert d'initialisation à la méthode utilisée ici. Les améliorations apportées par l'utilisation d'ondelettes et la régularisation de type l_1 seront donc bien mises en évidence.

3 Résolution du problème inverse par une méthode de type Landweber seuillé

Dans cette section, nous décrivons une approche de résolution du problème inverse basée sur une représentation en ondelettes orthogonales et un algorithme classique de type Landweber seuillé. On suppose que la phase φ admet une représentation parcimonieuse sur une base d'ondelettes orthogonales $\Psi = \{\psi_\lambda, \lambda \in I\}$, ce qui permet d'écrire $\varphi = \mathcal{W}^*\mathbf{x}$, où $\mathbf{x} \in l_2$ est un vecteur de coefficients d'ondelette, et \mathcal{W}^* l'opérateur de synthèse associé. La famille correspondante est indexée par les éléments λ d'un ensemble infini I , qui comprend le niveau de résolution $j = |\lambda|$, la position et le type d'ondelette. Le problème précédent peut se formuler comme un problème d'optimisation non contraint en les coefficients d'ondelettes avec un terme de régularisation l_1 pour les coefficients, associé à un paramètre α . Les coefficients d'ondelettes optimisés sont donc donnés par :

$$\min \left\{ \frac{\|\mathcal{I} - \mathcal{A}\mathcal{W}^*\mathbf{x}\|_2^2}{2} + \alpha \|\mathbf{x}\|_1, \mathbf{x} \in l_2 \right\} \quad (10)$$

où la norme l_p du vecteur \mathbf{x} est définie par :

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_i x_i^p \right)^{1/p} \quad (11)$$

En termes d'analyse convexe, le premier terme est convexe, propre, semi-continu inférieurement et différentiable avec un gradient continu β -Lipschitzien pour un coefficient $\beta > 0$ et le terme régularisant est semi-continu inférieurement et non différentiable. Ce problème d'optimisation a été très étudié et des algorithmes efficaces ont été proposés [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Nous avons retenu la méthode itérative suivante : étant donné $\mathbf{x}_0 \in l_2$, et $0 < \tau < 2/\beta$ et pour chaque $n \in N$, on construit la suite :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathcal{S}_{\alpha\tau}(\mathbf{x}_n - \tau\mathcal{W}\mathcal{A}^*(\mathcal{A}\mathcal{W}^*(\mathbf{x}_n) - \mathcal{I})) \quad (12)$$

où $\mathcal{S}_a(u) = \text{sign}(u) \max(|u| - a, 0)$ est l'opérateur de seuillage doux. Après convergence, la solution est obtenue à partir de l'itéré final \mathbf{x}_∞ par $\varphi_\infty = \mathcal{W}^*\mathbf{x}_\infty$.

Les itérations décrites par l'équation Eq. 12 sont implémentées avec une approche multi-résolution. L'opérateur \mathcal{A} est approximé dans la base d'ondelettes en calculant les éléments $\langle \psi_\lambda, \mathcal{A}\psi_\mu \rangle$ pour les différentes ondelettes orthogonales. L'opérateur adjoint est obtenu avec la

matrice adjointe de la matrice précédente. Les itérations de type Landweber seuillées sont imbriquées en prenant comme initialisation le niveau de résolution le plus faible. La solution obtenue lorsque le résidu stagne est prolongée au niveau de résolution supérieur par des zéros pour obtenir une initialisation appropriée, jusqu'au niveau de résolution le plus élevé. On obtient ainsi un raffinement progressif de la solution en coordonnées ondelettes.

4 Simulations et résultats

Le système de formation de l'image a été simulé en suivant la méthodologie décrite dans [2, 9] pour une énergie des rayons X de 24 keV ($\lambda = 0.5166\text{\AA}$). Deux fantômes sont définis, l'un pour l'absorption et l'autre pour la phase. La phase φ^* à reconstruire est représentée sur la Fig. 1.

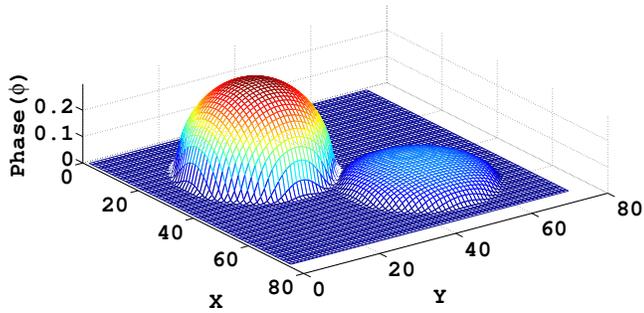


FIGURE 1 – Phase à reconstruire.

La propagation dans l'espace libre est simulée dans le domaine de Fourier en utilisant l'équation Eq. 5 pour une distance de propagation de $D = 0.6\text{m}$. L'intensité de Fresnel diffractée pour cette distance est représentée sur la figure 2.

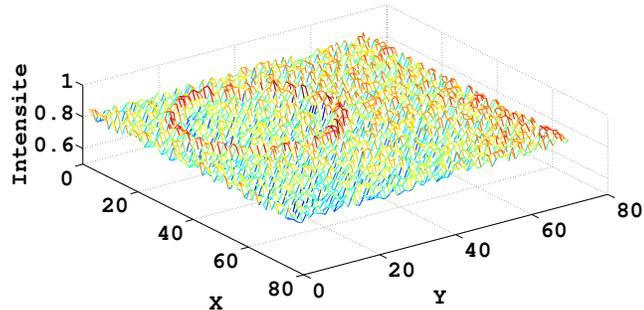


FIGURE 2 – Intensité de Fresnel diffractée pour la distance $D = 0.6\text{m}$.

Les valeurs d'intensité et de phase sont échantillonnées en 75×75 pixels. La méthode proposée a été appliquée à des données très bruitées avec un bruit blanc gaussien pour un rapport signal sur bruit de 15 dB pour lequel la régularisation de type Tikhonov ne donne pas de bons

résultats. Dans ce travail, les ondelettes orthonormales DB_1 de Daubechies implémentées sous Matlab ont été utilisées.

La partie convexe de la fonctionnelle à minimiser est différentiable avec gradient Lipschitzien de constante de Lipschitz $\beta = \|\mathcal{AW}^*\|^2$. Afin d'évaluer cette norme, nous avons suivi la démarche proposée dans [19] : étant donné \mathbf{x}_0 et $\mathcal{B} = \mathcal{AW}^*$, on construit une suite (\mathbf{x}_n) telle que $\mathbf{x}_n = \mathcal{B}^* \mathcal{B} \mathbf{x}_{n-1}$, et on calcule à chaque itération $\rho_n = \frac{\|\mathbf{x}_n\|}{\|\mathbf{x}_{n-1}\|}$. Après convergence, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho_\infty = \|\mathcal{AW}^*\|^2$.

Dans une première approche, le pas de descente et le paramètre de régularisation, α , sont maintenus constants pour un niveau de résolution donné. De bons résultats sont obtenus avec α de l'ordre de $0.1 \|\mathcal{A}^T \mathcal{I}\|_\infty$ [15]. Les phases obtenues avec une régularisation de Tikhonov et avec l'algorithme précédent sont représentées sur Fig. 3 et Fig. 4 respectivement.

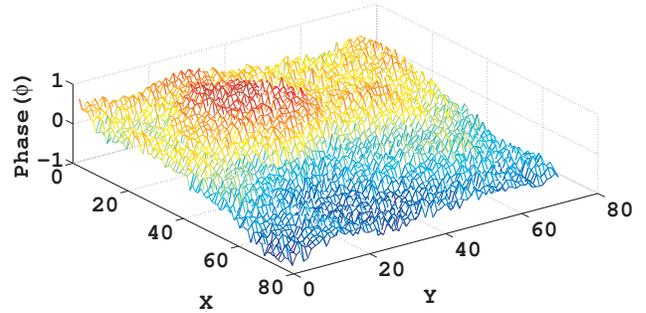


FIGURE 3 – Phase reconstruite avec une régularisation de type Tikhonov.

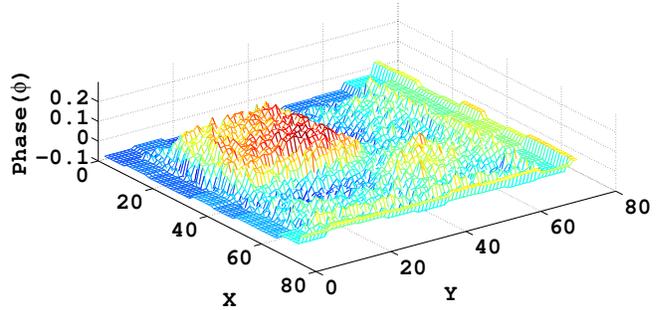


FIGURE 4 – Phase reconstruite avec l'algorithme Landweber seuillé et une régularisation l_1 .

Une régularisation de type Tikhonov donne de bons résultats pour des rapports signal/bruit supérieurs à 24 dB. Pour des niveaux de bruit plus élevés, la phase reconstruite reste très éloignée de vraie phase comme on peut le voir sur la Fig. 3. Afin d'évaluer la qualité de la reconstruction, les erreurs relatives $\|\varphi_\infty - \varphi^*\|_2 / \|\varphi^*\|_2$ ont été calculées. L'erreur relative passe de 1.1 pour la solution initiale correspondant à une régularisation de type Tikhonov

nov pour un rapport signal/bruit de 15 dB à une valeur de 0.48 à fin de l'algorithme Landweber seuillé.

L'approche adoptée dans ce travail est prometteuse puisqu'elle permet d'améliorer significativement la reconstruction de la phase de l'objet diffractant par rapport aux algorithmes existants comme le montre la Fig. 4. L'erreur de reconstruction est divisée par deux pour des niveaux de bruit élevés.

En conclusion, ce travail permet d'améliorer significativement les approches utilisées jusqu'à présent dans la reconstruction de phase en imagerie par contraste de phase en rayons X, qui s'appuient sur une régularisation de type Tikhonov. Le problème direct peut être linéarisé et inversé par un algorithme classique de type Landweber seuillé utilisant une base d'ondelettes orthogonales.

Les résultats obtenus restent cependant très bruités. La prise en compte de plusieurs distances de propagation et un traitement du problème inverse non linéaire généralisant ce travail permettrait sans doute de diminuer encore l'erreur de reconstruction. L'utilisation de représentations plus parcimonieuses devrait aussi permettre d'obtenir de meilleurs résultats, ainsi que la prise en compte de contraintes de positivité.

Références

- [1] P. Cloetens, R. Barrett, J. Baruchel, J.P. Guigay and M. Schlenker *Phase objects in synchrotron radiation hard x-ray imaging*. J.Phys.D 29, pp133-146, 1996.
- [2] M. Langer, M. Cloetens, J.P. Guigay and F. Peyrin *Quantitative comparison of direct phase retrieval algorithms in in-line phase tomography*. Med.Phys., vol.35, pp. 4556-4565, 2008.
- [3] M. Langer, M. Cloetens, and F. Peyrin *Regularization of Phase retrieval with Phase-Attenuation duality Prior for 3D Holotomography*. IEEE Trans.Image Process, vol.19, pp 2425-2436, 2010.
- [4] A.V. Bronnikov *Theory of quantitative phase-contrast computed tomography*. J.Opt.Soc.Am. A 19(3), pp472-480, 2002.
- [5] D.M.. Paganin *Coherent X-Ray Optics*. Oxford University Press, New York, 2006.
- [6] S.W. Wilkins, T.E. Gureyev, D. Gao, A. Pogany and A.W. Stevenson *Quantitative phase imaging using X-rays*. Phys.Rev.Lett., vol.77,pp.2961-2964, 1996.
- [7] T.E. Gureyev, K.A. Nugent *Phase retrieval with the transport of intensity equation.ii.Orthogonal series solution for non uniform illumination*. J.Opt.Soc.Am. A13, pp1670-1682, 1996.
- [8] J.P. Guigay, M. Langer, R. Boiste and, P. Cloetens *Mixed contrast transfer and transport of intensity approach for phase retrieval in the Fresnel region*. Optics Letters, vol.32, pp. 1617-1619, 2007.
- [9] M. Langer, M. Cloetens, and F. Peyrin *Fourier-wavelet regularization of phase retrieval in x-ray in line phase tomography*. J.Opt.Soc.Am.A, vol.28, pp.1877-1882, 2009.
- [10] E.J. Candes, J. Romberg and T. Tao *Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*. IEEE Trans. Inf. Theory , vol.52, pp 489-509, 2006.
- [11] D.L. Donoho *Compressed sensing*. IEEE Trans. Inf. Theory , vol.52, pp 1289-1306, 2006.
- [12] I. Daubechies, M. Defrise and C. De Mol *An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint*. Comm.Pure Applied Math., vol.57, pp 1413-1457, 2004.
- [13] I. Daubechies, M. Fornasier and C. De Mol *Accelerated projected gradient method for linear inverse problem with sparsity constraints*. J.Fourier Anal.Appl., vol.14, pp 764-792, 2008.
- [14] C. Chaux, P.L. Combettes, J.C. Pesquet and V.R. Wajs *A variational formulation for frame-based inverse problems*. Inverse Problems, vol.23, pp 1495-1518, 2007.
- [15] S.J. Wright, R.D. Nowak and M.A.T. Figueiredo *Sparse reconstruction by separable approximation*. IEEE Trans.Signal.Process. 57(7) 2479-2493, 2009.
- [16] F. Dupe, J.M. Fadili and J.L.Starck *A proximal iteration for deconvolving poisson noisy images using sparse representations*. IEEE Transactions on Image Processing, vol.18, pp 310-321, 2009.
- [17] P.L. Combettes and V.R. Wajs *Signal recovery by proximal forward-backward splitting*. Multiscale Model. Simul, vol.4, pp 1168-1200, 2005.
- [18] M. Born, E.Wolf *Principles of optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [19] L. Chaari, N. Pustelnik, C. Chaux and J.C. Pesquet *Solving inverse problems with overcomplete transforms and convex optimization techniques*. SPIE San Diego, Californie, USA Août 2009.