

Construction d'une base de type POD à partir d'une séquence d'images

Véronique SOUCHAUD, Cédric HERZET, Étienne MÉMIN

INRIA, Rennes Bretagne Atlantique, FLUMINANCE,
Campus Universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

veronique.souchaud@inria.fr, cedric.herzet@inria.fr, etienne.memin@inria.fr
<http://www.irisa.fr/fluminance>

Résumé – L'estimation de mouvement à partir de séquences d'images d'un phénomène fluide constitue un problème inverse difficile dans le sens où il faut extraire les mesures à partir des seules variations spatiales et temporelles de la fonction luminance. Malgré l'extrême complexité de ces écoulements, les principes gouvernant la construction de modèles réduits peuvent être appliqués pour en représenter les principales caractéristiques comme la somme de fonctions spatiales de bases orthonormales pondérées par des coefficients temporels. Une des approches repose sur la décomposition de Karhunen-Loeve (cf. "proper orthogonal decomposition" – POD). Dans cet article, nous nous concentrons sur la manière de construire cette base directement à partir d'une séquence d'images.

Abstract – Motion estimation about images sequences of a fluid phenomenon constitute an inverse problem, in the sense that measurements are extract from luminance spatial and temporal variations. Instead of high complexity of the fluid flow, principles governing reduces models can be applied to represent its main features in a sum of K-spatial functions orthonormal bases weighted by temporal coefficients. One of these approaches rely on the Karhunen-Loeve (cf. "proper orthogonal decomposition" – POD). In this article, we focus on how to build this base directly from an images sequence.

1 Introduction

Les écoulements géophysiques étudiés en sciences environnementales (océanographie, météorologie ou climatologie par exemple) sont le résultat de différentes interactions physiques complexes qui rendent difficile toutes représentations complètes par un modèle mathématique simple. Dans de nombreuses applications, le but est de s'appropriier et de représenter les caractéristiques *principales* de l'écoulement du fluide étudié. Par conséquent, on cherche à utiliser des systèmes dynamiques d'ordre réduit. Une technique bien connue pour construire des modèles réduits est la décomposition en valeur propre (POD), connue également sous le nom de la décomposition de Karhunen-Loève, l'analyse en composante principale ou encore la décomposition en valeurs singulières [4]. Cette méthode fournit une représentation de ces écoulements en terme de moyenne et de combinaisons linéaires de fonctions de bases, ou modes, ordonnées de manière décroissante selon leur énergie cinétique et ce sans aucune hypothèse *a priori* sur l'écoulement. La base réduite permet de capter généralement la quasi-totalité de l'énergie du système étudié avec très peu de vecteurs. Il est ensuite usuel de construire un système dynamique d'ordre réduit par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les premiers vecteurs de cette base.

La méthode POD consiste à rechercher les vecteurs propres d'un opérateur de corrélation spatiale du champ des vitesses. Or, la plupart du temps, ces champs ne sont pas directement

disponibles. On peut les obtenir soit grâce à des capteurs (ballon sonde, anémométrie fils chaud...) soit à partir de séquences d'images. Dans le cas des capteurs, les informations liées au phénomène observé sont directement disponibles. Cependant, les mesures effectuées *in situ* par des capteurs ponctuels ne procurent le plus souvent que des données éparées. Une autre alternative est l'utilisation des séquences d'images, pour l'étude des écoulements fluides [2], qui offrent une très grande quantité d'informations non intrusives. L'estimation de mouvement, ou flot optique, par des techniques de corrélation telles que la PIV (pour Particle Image Velocity) permettent d'estimer des champs de vitesses de l'écoulement à partir d'une séquence d'images. Les techniques classiques [5] calculant la POD d'un écoulement fluide à partir d'images procèdent par conséquent en deux étapes : premièrement, elles calculent une estimée des champs de vitesses à partir d'une séquence d'images ; deuxièmement, elles calculent la base réduite à partir de ces estimées du champ de vitesses.

Néanmoins, les modèles dynamiques réduits extraits de telles mesures s'appuient généralement sur des estimateurs qui reposent souvent sur une hypothèse de mouvement localement constant. Pour pallier à ce problème, dans ce papier, nous proposons une procédure d'estimation d'une base réduite descriptive de l'écoulement en une seule étape. Dans cet article, nous décrivons brièvement les principes généraux de la POD dans un premier temps. Nous détaillons ensuite la méthode proposée et

nous évaluons finalement la pertinence des méthodes proposées sur des séquences d'images d'écoulements turbulents 2D. Les résultats obtenus montrent la performance et l'efficacité de la méthode.

2 Contexte et contribution

Le calcul d'un écoulement nécessite la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) ce qui est lourd et coûteux. On construit alors un nouveau modèle dit *modèle réduit* représentant les structures principales de l'écoulement. Ces modèles réduits conservent les propriétés propres des phénomènes physiques étudiés. Les méthodes de réduction de modèle les plus performantes s'obtiennent par projection de Galerkin sur une base de l'écoulement. Parmi ces bases, celles obtenues par la POD parviennent généralement à capturer efficacement les caractéristiques principales de l'écoulement du fluide. Dans cette section, nous rappelons brièvement le principe de construction d'une base POD puis nous présentons les méthodes d'estimations de mouvements.

2.1 Décomposition Orthogonale Propre - POD

Dans la suite, on note T le nombre de mesures du champ de vitesse de l'écoulement pris sur une période τ . Soit un champ de vitesse $w(\underline{\mathbf{x}}, t) \in \mathbb{R}^2$ au temps $t \in \tau \subset \mathbb{N}$ où $\underline{\mathbf{x}} = (x, y) \in \Omega$ une variable d'espace avec $\Omega \subset \mathbb{N}^2$ le domaine physique. Soit $\mathbf{w}_t \triangleq [w(\underline{\mathbf{x}}_1, t), w(\underline{\mathbf{x}}_2, t), \dots, w(\underline{\mathbf{x}}_{N_p}, t)]^T \in \mathbb{R}^{N_p}$ le vecteur dont chaque élément correspond au champ des vitesses en chaque point de la grille Ω , i.e., ce sont les coordonnées spatiales des points auxquels on prend les mesures avec N_p le nombre de points de la grille Ω . On cherche alors une base tronquée $\Phi \in \mathbb{R}^{N_p \times K}$ telle que le champ estimé $\Phi \Phi^T \mathbf{w}_t$ projeté sur les vecteurs de cette base Φ soit le plus proche possible du champ réel \mathbf{w}_t . Formellement, on résout le problème suivant :

$$\hat{\Phi} = \arg \min_{\Phi} \sum_{t \in \tau} \|\mathbf{w}_t - \Phi \Phi^T \mathbf{w}_t\|^2 \quad \text{avec} \quad \Phi^T \Phi = \mathbf{I}_K, \quad (1)$$

Avec K le nombre de vecteurs de la base et $\mathbf{I}_K \in \mathbb{R}^{K \times K}$ la matrice identité de dimension K . La solution de ce problème est la solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\sum_{t \in \tau} \mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^T \Phi_k = \lambda_k \Phi_k, \quad (2)$$

où λ_k sont les valeurs propres de la matrice symétrique $\sum_{t \in \tau} \mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^T$ et Φ_k la $k^{ième}$ colonne de Φ . Ces problèmes aux valeurs propres peuvent être résolus par la méthode dite des "snapshots" proposée par Sirovitch [7], par SVD (pour Singular Value Decomposition) etc...

2.2 Le flot optique

La construction de la base POD nécessite la connaissance préalable des champs de vitesses. Or la plupart du temps, nous n'avons accès qu'à des observations partielles. Dans le cas où les données sur les champs de vitesses ne sont pas directement disponibles, les modes spatiaux Φ_k , sont extraits d'un problème aux valeurs propres provenant d'observations $\hat{\mathbf{w}}_t$. Elles sont obtenues au moyen d'un estimateur de mouvements (flot optique [1]). Ces méthodes s'appuient sur la conservation temporelle d'invariants géométriques ou photométriques. L'étude à partir des invariants photométriques a l'avantage de donner des mesures denses du mouvement. Le champ de déplacement visuel permet d'expliquer les variations dans une image animée en terme de déplacement de points images. A partir du flot optique, on utilise des méthodes dites de corrélations obtenues avec la PIV (pour Particle Image Velocity) ou la méthode de Lucas et Kanade [6] par exemple.

Les techniques classiques [4] calculant la POD d'un écoulement fluide à partir d'images procèdent par conséquent en deux étapes : premièrement, elles calculent une estimée des champs de vitesses à partir de séquence d'images ; deuxièmement, elles calculent la base réduite à partir de ces estimées du champ de vitesses. Dans la suite, nous proposons la construction d'une base réduite en une seule étape.

3 Vue d'ensemble de la procédure

Nous introduisons maintenant la méthode que nous détaillons dans cet article et qui repose sur une estimation directe des modes spatiaux et temporels à partir d'une séquence d'images. Pour caractériser le mouvement qui existe entre deux images, on s'appuie sur l'hypothèse de conservation de la luminance, notée I , et fonction de deux variables $\underline{\mathbf{x}}$ et t . Cette hypothèse consiste à dire que la luminosité apparente d'un point reste constante le long de son déplacement, ce qui conduit à la formulation de l'équation de contrainte du flot optique (OFCE) :

$$\forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial I}{\partial t}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \nabla I^T(\underline{\mathbf{x}}, t) w(\underline{\mathbf{x}}, t) = 0. \quad (3)$$

On considère (3) aux points $(\underline{\mathbf{x}}, t) \in \Omega \times T$. On obtient alors $N_p \times T$ contraintes qui s'écrivent sous forme matricielle :

$$\mathbf{y}_t - \mathbf{S}_t \mathbf{w}_t = \mathbf{0}_{N_p}, \quad (4)$$

avec $\mathbf{y}_t \triangleq \left[\frac{\partial I}{\partial t}(\underline{\mathbf{x}}_1, t), \frac{\partial I}{\partial t}(\underline{\mathbf{x}}_2, t), \dots, \frac{\partial I}{\partial t}(\underline{\mathbf{x}}_{N_p}, t) \right]^T$, $\mathbf{0}_{N_p}$ vecteur nul de dimension N_p ,

$$\text{et } \mathbf{S}_t \text{ défini par } (\mathbf{S}_t)_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x}(\underline{\mathbf{x}}_i, t) & \text{si } j = i, \\ \frac{\partial I}{\partial y}(\underline{\mathbf{x}}_i, t) & \text{si } j = i + N_p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On impose que \mathbf{w}_t appartienne à un sous-espace généré par les colonnes d'une matrice $\Phi \in \mathbb{R}^{N_p \times K}$. On peut donc écrire :

$$\mathbf{w}_t = \Phi \mathbf{a}_t, \quad (5)$$

où \mathbf{a}_t sont les coefficients qui pondèrent les colonnes de Φ . De plus, on impose que les colonnes de Φ soient orthogonales :

$$\Phi^T \Phi = \mathbf{I}_K, \quad (6)$$

On définit la matrice $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_T]^T$ contenant l'ensemble des coefficients temporels sur T . On cherche ensuite le meilleur sous-espace engendré par les colonnes de Φ au sens des moindres carrés :

$$(\tilde{\Phi}, \tilde{\mathbf{A}}) = \arg \min_{\Phi, \mathbf{A}} J(\Phi, \mathbf{A}) \quad \text{avec } \Phi^T \Phi = \mathbf{I}_K, \quad (7)$$

où

$$J(\Phi, \mathbf{A}) = \sum_t \|\mathbf{y}_t + \mathbf{S}_t \Phi \mathbf{a}_t\|^2. \quad (8)$$

Nous spécifions ci-après les expressions principales de la procédure proposée pour la résolution de (7).

3.1 Algorithme d'optimisation

On explique dans cette section les étapes de l'algorithme itératif de descente proposé. Chaque nouvelle valeur de Φ et \mathbf{A} diminue la fonctionnelle J définie en (8) sous la contrainte (6). Puis on fait diminuer la fonctionnelle J par rapport à \mathbf{a}_t . On réitère le processus jusqu'à convergence de la méthode.

3.1.1 Étape de descente par rapport à Φ et \mathbf{A}

On minimise la fonctionnelle J par rapport à Φ_k en relâchant d'abord la contrainte d'orthonormalité.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_k &= \arg \min_{\Phi_k} J(\Phi, \mathbf{A}) \\ &= \left(\sum_{t \in \tau} a_t^2(k) \mathbf{S}_t^T \mathbf{S}_t \right)^\dagger \times \\ &\quad \left(\sum_{t \in \tau} \mathbf{a}_t(k) \mathbf{S}_t^T \left(\mathbf{y}_t - \mathbf{S}_t \sum_{j \neq k} \Phi_j \mathbf{a}_t(j) \right) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

où la matrice \mathbf{X}^\dagger est la matrice pseudo-inverse de \mathbf{X} . La contrainte d'orthogonalité ayant été relâchée, $\tilde{\Phi}_k$ n'est pas nécessairement orthogonal à Φ_j . La matrice contenant le mode $\tilde{\Phi}_k$ est notée $\tilde{\Phi}$. On cherche alors un nouvel ensemble de valeurs Φ_k^{new} et \mathbf{A}^{new} pour lequel on gardera les valeurs de la fonctionnelle :

$$J(\Phi^{new}, \mathbf{A}^{new}) = J(\tilde{\Phi}, \mathbf{A}) \quad (11)$$

et satisfaisant la contrainte d'orthogonalité. On obtient alors l'équation suivante :

$$\mathbf{a}_t(k) \tilde{\Phi}_k + \sum_{j \neq k} \mathbf{a}_t(j) \Phi_j = \mathbf{a}_t^{new} \Phi_k^{new} + \sum_{j \neq k} \mathbf{a}_t^{new}(j) \Phi_j, \quad (12)$$

avec comme contraintes :

$$\Phi_j^T \Phi_k^{new} = 0, \quad \|\Phi_k^{new}\| = 1. \quad (13)$$

La résolution de (12) et (13) impliquent les égalités suivantes :

$$\mathbf{a}_t^{new}(j) = \mathbf{a}_t(j) + \mathbf{a}_t(k) \Phi_j^T \tilde{\Phi}_k, \quad (14)$$

$$\Phi_k^{new} = \frac{\tilde{\Phi}_k - \sum_{j \neq k} \text{proj}_{\Phi_j}(\tilde{\Phi}_k)}{\|\tilde{\Phi}_k - \sum_{j \neq k} \text{proj}_{\Phi_j}(\tilde{\Phi}_k)\|}, \quad (15)$$

$$\text{avec } \text{proj}_{\Phi_j}(\tilde{\Phi}_k) \triangleq (\tilde{\Phi}_k^T \Phi_j) \Phi_j.$$

$$\mathbf{a}_t^{new}(k) = \mathbf{a}_t(k) \|\tilde{\Phi}_k - \sum_{j \neq k} \text{proj}_{\Phi_j}(\tilde{\Phi}_k)\|. \quad (16)$$

3.1.2 Étape de descente par rapport \mathbf{a}_t

On détermine et optimise dans un second temps les modes temporels avec la formulation suivante. On minimise la fonctionnelle J par rapport à \mathbf{a}_t .

$$\tilde{\mathbf{a}}_t = \arg \min_{\mathbf{a}_t} J(\Phi, \mathbf{a}_t) \quad (17)$$

$$= (\Phi^T \mathbf{S}_t^T \mathbf{S}_t \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{S}_t^T \mathbf{y}_t \quad (18)$$

4 Résultats de simulation

Pour évaluer la performance de la méthode proposée, une séquence d'images synthétiques a été générée en se basant sur des turbulences forcées en deux dimensions obtenues directement à partir d'une simulation numérique (DNS) des équations de Navier-Stokes pour un nombre de Reynolds de 3000 ([3]). La méthode est testée sur deux types d'images : images de particules et images scalaires (fig. 1).

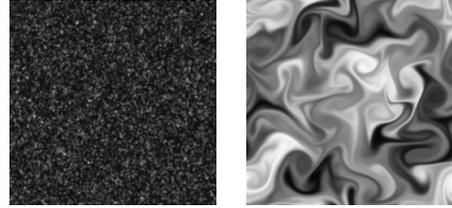


FIGURE 1 – Images de particules (gauche) et scalaire (droite)

Notre expérimentation porte sur des séquences de 20 et 100 images respectivement sur une base de 10 modes. L'erreur calculée correspond au champ réel projeté sur la base construite soustrait au champ réel :

$$e(i) = \frac{\sum_{t \in \tau} \|\mathbf{w}_t - \text{proj}_{\Phi}(\mathbf{w}_t)\|^2}{\sum_{t \in \tau} \|\mathbf{w}_t\|^2} \quad (19)$$

Les figures suivantes montrent l'erreur pour la POD calculée à partir des valeurs réelles du champs (en bleu), pour l'analyse en composante principale proposée dans cet article (en rouge BRP pour Base Réduite Proposée) et pour la POD calculée à partir d'un champ de vitesse estimé par corrélation PIV ([8], en noir identifié par PIV) en fonction du nombre de mode.

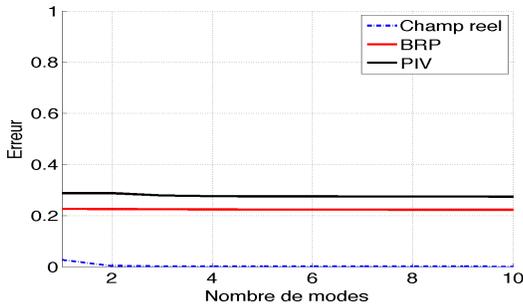


FIGURE 2 – Erreur pour 10 modes et 20 images de particules

Pour un petit nombre d’images de particules (fig. 2), la méthode proposée est comparable à la PIV en récupérant un peu plus d’informations sur les caractéristiques principales de l’écoulement du fluide. Pour une nombre plus important d’images de parti-

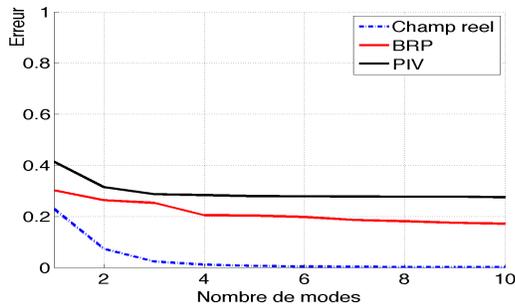


FIGURE 3 – Erreur pour 10 modes et 100 images de particules

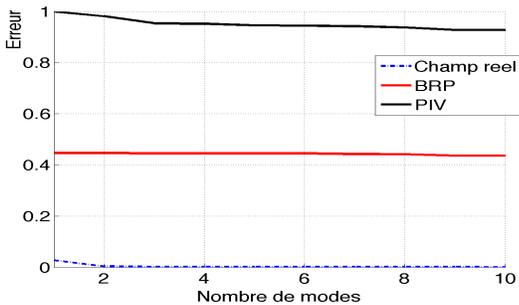


FIGURE 4 – Erreur pour 10 modes et 20 images scalaires

cules (fig. 3), il faut un nombre de mode plus important pour récupérer l’information. Cependant, l’erreur est diminuée davantage que pour 20 images de particules (fig. 2). Pour les images scalaires (fig. 4 et fig. 5), la méthode proposée récupère moins d’énergie que pour les images de particules (fig. 2 et fig. 3) mais porte bien plus d’informations que la méthode PIV.

5 Conclusion

Dans cet article, après avoir décrit brièvement les principes généraux de la POD, un nouvel algorithme de construction de

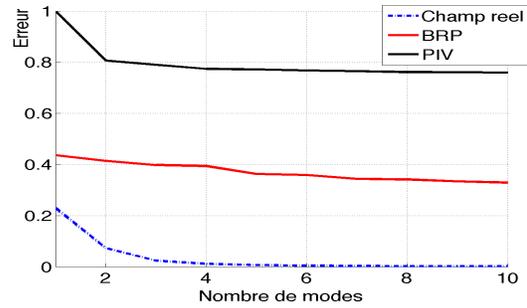


FIGURE 5 – Erreur pour 10 modes et 100 images scalaires

base réduite a été proposé et comparé aux techniques classiques calculant la POD d’un écoulement fluide à partir d’images. Contrairement aux autres approches, la construction proposée d’une base réduite s’effectue en une seule étape. Les résultats obtenus montrent la performance supérieure et l’efficacité de la méthode.

Remerciements

Les auteurs remercient pour leur support la région Bretagne et le projet GEO-FLUIDE de l’Agence Nationale de la Recherche (ANR-09-SYSC-005).

Références

- [1] Horn et Schunck, *Determining optical flow. Artificial Intelligence* vol 17, pages 185-203, 1981.
- [2] D. Heitz E. Mémin, C. Schnörr. *Variational fluid flow measurements from image sequences : synopsis and perspectives*. *Exp. Fluids*, 48(3) :369-393, 2010.
- [3] J. Carlier and B. Wieneke. *Report 1 on production and diffusion of fluid mechanics images and data.. Fluid project*, available at <http://www.fluid.irisa.fr>, 2005.
- [4] P. Holmes, J. L. Lumley and G. Berkooz. *Turbulence, coherence structures, dynamical systems and symmetry*. *Cambridge University Press*, page 682, 1996.
- [5] N. Papadakis *Assimilation de données images : application au suivi de courbes et de champs de vecteurs*. *PhD Thesis*, IFSIC, Université de Rennes1, 2007.
- [6] Lucas B.D. et Kanade T., *An iterative image registration technique with an application to stereo vision*. *Proceedings of Imaging understanding workshop*, pages 121-130, 1981.
- [7] L. Sirovich. *Turbulence and the dynamics of coherent structures part i-iii* *Quarterly of Appl. Math.*, page : 561-590, 1987
- [8] Gpiv : <http://libgpiv.sourceforge.net/>