

# Spiked models et détection de sources dans les grands réseaux d'antennes

Pascal VALLET, Philippe LOUBATON

IGM LabInfo, UMR-CNRS 8049, Université Paris-Est  
5, Boulevard Descartes, Champs-sur-Marne  
77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France  
{vallet,loubaton}@univ-mlv.fr

**Résumé** – Le présent article traite du problème de la détection de sources dans les grands réseaux d'antennes, lorsque le nombre d'échantillons disponibles du signal observé est du même ordre de grandeur que le nombre d'antennes du réseau. Nous nous plaçons dans une situation où le nombre de sources à détecter est petit devant les dimensions du système, et nous considérons les signaux sources comme déterministes et inconnus, ce qui nous permet de traiter d'une manière unifiée différentes hypothèses possibles. Nous proposons une approche basée sur des travaux récents concernant la localisation des plus grandes valeurs singulières d'une matrice aléatoire i.i.d perturbée par une autre matrice déterministe de petit rang. Ces modèles sont habituellement appelés "spiked models" dans la littérature. Après un résumé des principales propriétés concernant les "spiked models", nous appliquons ces résultats au problème de la détection de sources. Nous en déduisons immédiatement un seuil de détectabilité, dans le cas où le nombre d'antennes du réseau et le nombre d'échantillons tendent vers l'infini au même rythme, et le nombre de sources émettrices reste constant.

**Abstract** – This paper deals with the problem of source detection in large sensor networks, in a context where the number of available snapshots of the observed signal is of the same order of magnitude than the number of antennas. We make the hypothesis that the number of sources is small compared to the dimensions of the system, and the source signals are assumed unknown deterministic. The proposed approach is based on recent results concerning the localization of the largest singular values of an i.i.d random matrix additively perturbed by a low rank deterministic matrix. This matrix model is referred in the literature to "spiked model". After a summary of the main properties of the spiked models, we address the detection problem of deterministic sources corrupted by a white Gaussian noise. We deduce from the "spiked models" theory a detection threshold when the number of antennas and the number of snapshots tend to infinity at the same rate, while the number of sources remains constant.

## 1 Introduction

L'estimation du nombre de sources dans un signal dégradé par du bruit est un problème fondamental en traitement du signal comme dans de nombreux autres domaines comme la géophysique, la finance ou le biomédical. Dans le cadre du traitement d'antennes, la détection du nombre de sources est une première étape cruciale pour pouvoir obtenir dans un second temps des informations plus précises sur la localisation des sources (directions d'arrivée), ainsi que les niveaux de puissances émis. De nombreuses méthodes ont été proposées, certaines basées sur des tests statistiques de rang (voir par exemple Anderson [1]), d'autres basées sur des critères de théorie de l'information (voir notamment Stoica-Selen [11] pour un résumé). Ces méthodes sont le plus souvent basées sur une estimée empirique de la matrice de covariance des signaux. Elles s'avèrent en général relativement performantes, lorsque le nombre d'échantillons disponibles est suffisant et bien plus grand que la dimension du signal observé.

Malheureusement, lorsque le nombre d'échantillons disponibles est limité, et du même ordre de grandeur que le nombre

d'antennes du système, ces estimateurs affichent de très mauvais résultats, notamment car l'estimateur standard de la matrice de covariance des signaux n'est plus consistant dans le régime considéré. Dès lors, il est naturel de se demander s'il est possible d'améliorer les méthodes existantes ou de trouver de nouveaux estimateurs consistants dans le régime où le nombre d'échantillons disponibles et le nombre d'antennes du système (ou dimension des observations) tendent vers l'infini au même rythme. La théorie des matrices aléatoires permet de répondre à ces questions. Les récents travaux de Baik-Silverstein [2] ont permis d'apporter une caractérisation assez fine du comportement asymptotique des plus grandes valeurs propres de matrices aléatoires du type  $\Sigma_N \Sigma_N^*$ , avec  $\Sigma_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma^{1/2} \mathbf{W}_N$  où  $\mathbf{W}_N$  est une matrice aléatoire de taille  $M \times N$  dont les entrées sont complexes i.i.d, centrés, de variance unité, dont le moment d'ordre 4 existe, et  $\Gamma$  une matrice de covariance dont les valeurs propres sont toutes égales sauf un petit nombre d'entre elles. Ce modèle de matrice aléatoire est référencé dans la littérature sous le nom de "spiked models". Baik et Silverstein ont notamment montré que si  $K$  valeurs propres de  $\Gamma$  sont plus grandes qu'une certaine valeur seuil, alors exactement  $K$  va-

leurs propres de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$  se détacheront des autres, quand  $M$  et  $N$  tendent vers l'infini au même rythme. Ce travail a été suivi d'un certain nombre de papiers en traitement du signal, appliquant ces résultats au problème de la détection de sources dans du bruit, et de nouveaux estimateurs et tests statistiques du nombre de sources, bien adaptés au régime asymptotique où les nombres d'échantillons et d'antennes tendent vers l'infini au même rythme, ont été proposés (voir par exemple Kritchman-Nadler [7], Nadakuditi-Silverstein [10], Bianchi et al [4]). Il faut cependant noter que les résultats précédents ne peuvent s'appliquer qu'au cas où les signaux sources sont gaussiens i.i.d, centrés et indépendants entre eux, car il faut pouvoir se ramener au modèle multiplicatif  $\Sigma_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma^{1/2} \mathbf{W}_N$ .

Dans ce papier, nous mettons en évidence un seuil de détectabilité basé sur les valeurs propres de la matrice de covariance empirique, et proposons un estimateur du nombre de sources, dans le cas où les signaux sources sont vus comme déterministes inconnus. Notre approche permet en particulier de considérer aussi bien le cas de signaux i.i.d ou le cas de signaux corrélés temporellement. Nous nous basons sur nos précédents travaux [8] et ceux de Benaych et Nadakuditi [3], où les résultats sur les "spiked models" centrés ont été étendus, par deux approches différentes, au cas de matrices gaussiennes non centrées du type  $\Sigma_N = \mathbf{B}_N + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N$ , où  $\mathbf{W}_N$  est une matrice  $M \times N$  dont les entrées sont i.i.d gaussiennes complexes standards, et  $\mathbf{B}_N$  une matrice déterministe de rang  $K$ , avec  $K$  indépendant de  $M, N$ .

Le présent papier est organisé comme suit. En section 2, nous proposons un résumé des principaux résultats concernant les "spiked models" gaussiens non centrés. En section 3, nous appliquons ces résultats au problème de la détection de sources. La section 4 est dédiée à quelques exemples numériques illustrant les résultats précédents.

## 2 Spiked models gaussiens non centrés

Dans cette section, nous résumons les principaux résultats sur les "spiked models" gaussiens non centrés obtenus de deux manières différentes dans [8] et [3]. Nous exposons ici l'approche utilisée dans [8]. Soient donc  $M, N, K \in \mathbb{N}^*$  tels que  $M = M(N) < N$ ,  $0 < K = K(N) < M$  et  $c_N = M/N \rightarrow c \in ]0, 1[$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Nous considérons le modèle de matrices aléatoires

$$\Sigma_N = \mathbf{B}_N + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N, \quad (1)$$

avec  $\mathbf{B}_N$  une matrice complexe déterministe  $M \times N$  de rang  $K$ , telle que  $\sup_N \|\mathbf{B}_N\| < \infty$ , et  $\mathbf{W}_N$  une matrice dont les entrées sont des variables gaussiennes complexes i.i.d standards. Par la suite,  $\lambda_{1,N}, \dots, \lambda_{M,N}$  et  $\hat{\lambda}_{1,N}, \dots, \hat{\lambda}_{M,N}$  désigneront les valeurs propres des matrices  $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$  et  $\Sigma_N \Sigma_N^*$  respectivement, classées par ordre décroissant. Nous allons commencer par rappeler quelques résultats (th. 1 à 3) concernant le comportement asymptotique de la loi empirique des valeurs propres de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$ , définie comme la mesure de probabilité

aléatoire  $\hat{\mu}_N = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \delta_{\hat{\lambda}_{k,N}}$ . Les résultats sont valides dès que  $K < M$ , et ne supposent pas nécessairement que  $K$  soit indépendant de  $N$ . Pour montrer la convergence de la loi  $\hat{\mu}_N$ , il est équivalent de montrer la convergence simple de sa transformée de Stieltjes (T.S.)  $\hat{m}_N$ , définie par

$$\hat{m}_N(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\hat{\mu}_N(\lambda)}{\lambda - z} = \frac{1}{M} \text{Tr} (\Sigma_N \Sigma_N^* - z \mathbf{I}_M)^{-1},$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ . Le théorème qui suit exprime le fait que  $\hat{\mu}_N$  est proche d'une certaine mesure de probabilité déterministe pour  $N$  grand. Il est dû à Dozier-Silverstein [6].

**Théorème 1.** *Il existe une suite de mesures de probabilité déterministes absolument continues ( $\mu_N$ ) telle que presque sûrement (p.s.),  $\hat{\mu}_N - \mu_N \rightarrow 0$  étroitement quand  $N \rightarrow \infty$ . De manière équivalente, la T.S.  $m_N$  de  $\mu_N$  vérifie  $\hat{m}_N(z) - m_N(z) \rightarrow_N 0$  p.s. pour tout  $z \in \mathbb{C}^+$ . De plus, en posant  $w_N(z) = z(1 + \sigma^2 c_N m_N(z))^2 - \sigma^2(1 - c_N)(1 + \sigma^2 c_N m_N(z))$ ,  $m_N(z)$  est l'unique solution de l'équation*

$$m_N(z) = (1 + \sigma^2 c_N m_N(z)) \frac{1}{M} \text{Tr} (\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^* - w_N(z))^{-1}, \quad (2)$$

telle que  $\text{Im}(z m_N(z)) > 0$  pour  $z \in \mathbb{C}^+$ .

Il est facile de voir que  $w_N(z)$  vérifie  $\phi_N(w_N(z)) = z$ , avec  $\phi_N(w) = w(1 - \sigma^2 c_N f_N(w))^2 + \sigma^2(1 - c_N)(1 - \sigma^2 c_N f_N(w))$ , et  $f_N(w) = \frac{1}{M} \text{Tr} (\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^* - w \mathbf{I}_M)^{-1}$  la T.S. de la distribution spectrale de  $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$ . Pour caractériser la densité associée à  $\mu_N$ , on utilise le resultat suivant (Dozier-Silverstein [5]). On note  $\text{supp}(\mu_N)$  le support de  $\mu_N$ .

**Théorème 2.** *Pour  $x \in \mathbb{R}$ , la limite  $m_N(x + iy)$  quand  $y \downarrow 0$  existe et est notée  $m_N(x)$ . La fonction  $x \mapsto m_N(x)$  ainsi définie est continue sur  $\mathbb{R}$ , et vérifie l'équation (2) pour  $z = x \in \mathbb{R} \setminus \partial \text{supp}(\mu_N)$ . De plus, la densité  $f_{\mu_N}$  de  $\mu_N$  est donnée par  $f_{\mu_N}(x) = \pi^{-1} \text{Im}(m_N(x))$ .*

La fonction  $w_N$  introduite dans le théorème précédent est fondamentale pour caractériser la support de  $\mu_N$ . En effet, en notant  $w_N(x) = \lim_{y \downarrow 0} w_N(x + iy)$ , on vérifie que

$$\begin{aligned} \text{Int}(\text{supp}(\mu_N)) &= \{x \in \mathbb{R}^+ : \text{Im}(m_N(x)) > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^+ : \text{Im}(w_N(x)) > 0\}, \end{aligned}$$

et  $\phi_N(w_N(x)) = x$  pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \partial \text{supp}(\mu_N)$ . De plus, pour  $x \notin \text{supp}(\mu_N)$ ,  $m_N(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_N(\lambda)}{\lambda - x}$  (T.S. de  $\mu_N$ ) et donc la fonction  $w_N$  est réelle sur  $\mathbb{R} \setminus \text{supp}(\mu_N)$ . On peut montrer ([12]) que  $\phi_N$  admet  $2Q$  ( $1 \leq Q \leq K + 1$ ) extrema locaux positifs notés  $x_{q,N}^-, x_{q,N}^+$ ,  $q = 1, \dots, Q$  (dans l'ordre croissant) et que  $\text{supp}(\mu_N) = \bigcup_{q=1}^Q [x_{q,N}^-, x_{q,N}^+]$ . Le support de  $\mu_N$  peut donc être déterminé en examinant les extremas locaux positifs de  $\phi_N$ . Il existe un lien étroit entre la position des valeurs propres de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$  et le support de  $\mu_N$ , qui est donné dans le résultat suivant.

**Théorème 3.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$  tels que

$$]a - \epsilon, b + \epsilon[ \cap \text{supp}(\mu_N) = \emptyset,$$

pour tout  $N$  suffisamment grand. Alors avec probabilité 1 pour  $N$  suffisamment grand, aucune valeur propre de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$  n'appartient à  $[a, b]$  et

$$\text{card}\{k : \hat{\lambda}_{k,N} < a\} = \text{card}\{k : \lambda_{k,N} < w_N(a)\},$$

$$\text{card}\{k : \hat{\lambda}_{k,N} > b\} = \text{card}\{k : \lambda_{k,N} > w_N(b)\}.$$

Rappelons que les théorèmes 1 à 3 ne supposent aucune hypothèse particulière sur le rang  $K$  de  $\mathbf{B}_N$ , qui peut croître avec  $N$ . En supposant  $K$  constant, il est possible d'obtenir des résultats plus fins. Pour le reste du papier, nous nous placerons donc dans le contexte des "spiked models", i.e  $K$  indépendant de  $N$ . On supposera de plus que les valeurs propres de  $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$  convergent vers des limites différentes, i.e, pour tout  $k = 1, \dots, K$ ,  $\lambda_{k,N} \rightarrow_N \lambda_k$ , et  $\lambda_k \neq \lambda_l$  pour  $k \neq l$ . Avant de présenter les principaux résultats liés à ce modèle, donnons quelques remarques liées à ces nouvelles hypothèses. Puisque  $K$  reste fixe quand  $M$  et  $N$  tendent vers l'infini, il est raisonnable de penser que la très grande majorité des plus petites valeurs propres de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$  vont se comporter comme celles de la matrice  $\sigma^2 \frac{\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^*}{N}$ . La distribution empirique des valeurs propres de cette dernière matrice a le même comportement asymptotique que la distribution dite de Marcenko-Pastur ([9]) définie par le loi de probabilité  $\check{\mu}_N$  donnée par  $d\check{\mu}_N(x) = \check{g}_N(x) dx$  où

$$\check{g}_N(x) = \frac{\sqrt{(x - x_N^-)(x_N^+ - x)}}{2\sigma^2 c_N \pi x} \mathbb{1}_{[x_N^-, x_N^+]}(x).$$

avec  $x_N^- = \sigma^2(1 - \sqrt{c_N})^2$  et  $x_N^+ = \sigma^2(1 + \sqrt{c_N})^2$ . Le support de la loi de Marcenko-Pastur  $\check{\mu}_N$  est donc l'intervalle  $[\sigma^2(1 - \sqrt{c_N})^2, \sigma^2(1 + \sqrt{c_N})^2]$ , et le théorème 3, appliqué à la matrice  $\sigma^2 \frac{\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^*}{N}$ , implique que pour  $N$  suffisamment grand, toutes les valeurs propres de cette matrice sont comprises entre  $[\sigma^2(1 - \sqrt{c_N})^2, \sigma^2(1 + \sqrt{c_N})^2]$ . Afin d'étudier le comportement des valeurs propres de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$ , nous allons dans un premier temps préciser la structure du support de  $\mu_N$  définie au théorème 1. Pour la suite, on note  $K_s = \text{card}\{k = 1, \dots, K : \lambda_k > \sigma^2 \sqrt{c}\}$ , i.e. le nombre de valeurs propres de  $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$ , dont la limite est supérieure à la valeur seuil  $\sigma^2 \sqrt{c}$ . Les discussions précédentes montrent que les extrema locaux positifs de  $\phi_N$  correspondent aux  $x_{q,N}^-, x_{q,N}^+$ , les points frontière du support de  $\mu_N$ . Une analyse des zéros de  $\phi'_N$  permet d'obtenir le résultat suivant ([8]).

**Théorème 4.** Le support de  $\mu_N$  est donné par  $\text{supp}(\mu_N) = \bigcup_{k=1}^{K_s+1} [x_{k,N}^-, x_{k,N}^+]$ , avec  $x_{k,N}^- > x_{k+1,N}^+$  et

$$[x_{K_s+1,N}^-, x_{K_s+1,N}^+] = [\sigma^2(1 + \sqrt{c})^2 - \mathcal{O}(N^{-1}), \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2 + \mathcal{O}(N^{-1})],$$

et pour  $k = 1, \dots, K_s$ ,

$$[x_{k,N}^-, x_{k,N}^+] = [\psi(\lambda_{k,N}, c_N) - \mathcal{O}(N^{-1/2}), \psi(\lambda_{k,N}, c_N) + \mathcal{O}(N^{-1/2})],$$

avec  $\psi(\lambda, c) = \frac{(\lambda + \sigma^2 c)(\lambda + \sigma^2)}{\lambda}$ , et où  $\mathcal{O}(N^{-1})$  et  $\mathcal{O}(N^{-1/2})$  désignent ici des termes strictement positifs. De plus,

$$w_N(x_{k,N}^-) > w_N(x_{k,N}^+) > w_N(x_{k+1,N}^-),$$

et  $\lambda_{k,N} \in ]w_N(x_{k,N}^-), w_N(x_{k,N}^+)[$  pour  $k = 1, \dots, K_s$ , ainsi que  $\lambda_{K_s+1,N}, \dots, \lambda_{M,N} \in ]w_N(x_{K_s+1,N}^-), w_N(x_{K_s+1,N}^+)[$ .

Ce résultat montre que si  $K_s$  valeurs propres de  $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$  sont suffisamment "significatives" (i.e  $> \sigma^2 \sqrt{c}$ ) à partir d'un certain rang, alors le support de  $\mu_N$ , la mesure approximante de  $\hat{\mu}_N$ , sera composé d'un "bulk"  $[x_{K_s+1,N}^-, x_{K_s+1,N}^+]$  et de  $K_s$  composantes disjointes  $[x_{k,N}^-, x_{k,N}^+]$  de largeur  $\mathcal{O}(N^{-1/2})$ , centrées autour de  $\psi(\lambda_{k,N}, c_N)$ , ce qui constitue une différence notable avec la distribution de Marcenko-Pastur. De plus, les  $\lambda_{k,N}$  pour  $k \leq K_s$  sont associés aux  $K_s$  composantes disjointes  $[x_{k,N}^-, x_{k,N}^+]$  au sens où  $\lambda_{k,N} \in ]w_N(x_{k,N}^-), w_N(x_{k,N}^+)[$ .

Cette analyse nous permet de déduire la position des valeurs propres de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$ . En effet, une application du théorème 3 montre que  $\forall \epsilon > 0$ , p.s. pour  $N$  suffisamment grand,  $\hat{\lambda}_{k,N} \in ]x_{k,N}^- - \epsilon, x_{k,N}^+ + \epsilon[$  pour  $k = 1, \dots, K_s$ , et  $\hat{\lambda}_{k,N} \in ]x_{K_s+1,N}^- - \epsilon, x_{K_s+1,N}^+ + \epsilon[$  pour  $k = K_s + 1, \dots, K$ . On peut donc déduire le résultat fondamental suivant ([8], [3]).

**Théorème 5.** Avec probabilité 1,

$$\hat{\lambda}_{k,N} \xrightarrow{N} \begin{cases} \psi(\lambda_k, c) & \text{pour } k \in \{1, \dots, K_s\} \\ \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2 & \text{pour } k \in \{K_s + 1, \dots, K\}. \end{cases}$$

Pour  $N$  grand, on a donc exactement  $K_s$  valeurs propres de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$  s'échappant du "bulk"  $[\sigma^2(1 - \sqrt{c})^2, \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2]$  et convergeant vers les limites  $\psi(\lambda_k, c)$  pour  $k \in \{1, \dots, K_s\}$ . Les valeurs propres  $\hat{\lambda}_{K_s+1,N}, \dots, \hat{\lambda}_{K,N}$  resteront quant à elles associées au "bulk", car les valeurs propres limites correspondantes de  $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$ , i.e  $\lambda_{K_s+1}, \dots, \lambda_K$  sont inférieures au seuil  $\sigma^2 \sqrt{c}$ .

### 3 Application à la détection de sources

Dans cette partie, nous allons appliquer les résultats vus précédemment au cas de la détection de sources dans les grands réseaux d'antennes. Considérons un réseau composé de  $M$  antennes, recevant  $K$  signaux sources à bande étroite (avec  $K < M$ ). A l'instant discret  $n$ , le signal observé  $\mathbf{y}_n \in \mathbb{C}^M$  est donné par

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{A} \mathbf{s}_n + \sigma \mathbf{w}_n, \quad (3)$$

avec  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$  la matrice des vecteurs directionnels linéairement indépendants, associés aux  $K$  signaux sources  $\mathbf{s}_n = [s_{1,n}, \dots, s_{K,n}]^T$ , et  $\mathbf{w}_n$  un bruit blanc gaussien complexe de matrice de covariance  $\mathbf{I}_M$ . La variance du bruit  $\sigma$  sera supposée connue pour la suite. En supposant que l'on collecte  $N$  échantillons indépendants  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$  (avec  $N > M$ ), (3) est équivalent à

$$\Sigma_N = \frac{\mathbf{A} \mathbf{S}_N}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N, \quad (4)$$

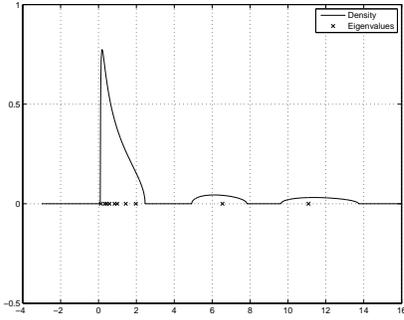


FIGURE 1 – Densité de  $\mu_N$  et valeurs propres de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$  pour  $N = 20$

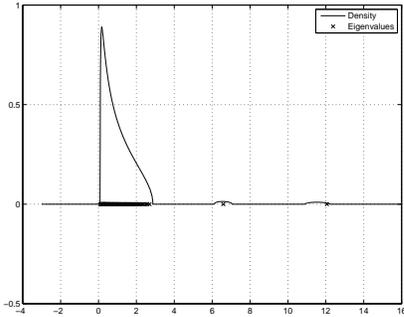


FIGURE 2 – Densité de  $\mu_N$  et valeurs propres de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$  pour  $N = 200$

avec  $\Sigma_N = \frac{1}{\sqrt{N}}[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N]$ ,  $\mathbf{S}_N = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N]$  et  $\mathbf{W}_N = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N]$ . (4) est donc exactement le modèle (1) considéré dans la section précédente, en posant  $\mathbf{B}_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{A}\mathbf{S}_N$ . Si la matrice  $\mathbf{S}_N$  est de rang plein, alors la matrice  $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$  est de rang  $K$  et nous pouvons donc appliquer les résultats précédents pour évaluer le nombre de sources détectables. Il est naturel de proposer comme estimateur la quantité  $\hat{K}_{s,\alpha}$  définie par

$$\hat{K}_{s,\alpha} = \max\{k : \hat{\lambda}_{k,N} > \sigma^2(1 + \sqrt{c_N})^2 + \alpha\}.$$

Si  $c_N \rightarrow c$  et si les valeurs propres non nulles  $\lambda_{1,N}, \dots, \lambda_{K,N}$  de  $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$  convergent vers  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$  quand  $N \rightarrow \infty$ , alors pour  $\alpha > 0$  suffisamment petit,  $\hat{K}_{s,\alpha}$  est un estimateur consistant du nombre de sources détectables  $K_s = \max\{k : \lambda_k > \sigma^2 \sqrt{c}\}$ . Il convient de remarquer que nous ne réglons pas le problème du choix de  $\alpha$ , qui nécessite des résultats plus approfondis (voir [4] dans le cas d'une source i.i.d gaussienne).

## 4 Quelques illustrations numériques

Dans cette section, nous donnons un exemple illustrant les différents phénomènes décrits en section 2. On se place dans le cas où  $c_N = c = 0.5$ ,  $\sigma = 1$  et  $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$  est diagonale de valeurs propres 0 (multiplicité  $M - 2$ ), 5 et 10 (multiplicité 1). Les figures 1 et 2 montrent l'évolution de la densité de  $\mu_N$  pour  $N = 20, 200$ , ainsi que la position des valeurs propres de  $\Sigma_N \Sigma_N^*$  (modélisées par des croix). Comme les valeurs propres 5 et 10 sont supérieures au seuil  $\sigma^2 \sqrt{c}$ , les résultats

précédents montrent que le support de  $\mu_N$  contient 3 composantes disjointes  $[x_{q,N}^-, x_{q,N}^+]$  pour  $q = 1, 2, 3$  (théorème 4), ce que l'on peut vérifier pratiquement sur les 2 figures. De plus, les composantes du support associées aux valeurs propres 5, 10 ont une longueur qui décroît avec  $N$ . Les valeurs propres  $\hat{\lambda}_{1,N}$  et  $\hat{\lambda}_{2,N}$  sont contenues dans  $[x_{2,N}^-, x_{2,N}^+]$  et  $[x_{3,N}^-, x_{3,N}^+]$  respectivement (théorème 3) et comme  $x_{q,N}^+ - x_{q,N}^- \rightarrow_N 0$  pour  $q = 2, 3$ , on voit clairement apparaître les limites des valeurs propres spiked  $\hat{\lambda}_{1,N}$  et  $\hat{\lambda}_{2,N}$  (théorème 5).

## Références

- [1] T.W Anderson. *An introduction to multivariate statistical analysis*, volume 374. Wiley New York, 1958.
- [2] J. Baik and J.W. Silverstein. Eigenvalues of large sample covariance matrices of spiked population models. *Journal of Multivariate Analysis*, 97(6) :1382–1408, 2006.
- [3] F. Benaych-Georges and R.R. Nadakuditi. The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices. *to appear in Advances of Mathematics*, 2009. arXiv : 0910.2120.
- [4] P. Bianchi, M. Debbah, M. Maida, and J. Najim. Performance of statistical tests for single-source detection using random matrix theory. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 57(4) :2400–2419, 2011.
- [5] R.B. Dozier and J.W. Silverstein. Analysis of the limiting spectral distribution of large dimensional information-plus-noise type matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 98(6) :1099–1122, 2007.
- [6] R.B. Dozier and J.W. Silverstein. On the empirical distribution of eigenvalues of large dimensional information-plus-noise-type matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 98(4) :678–694, 2007.
- [7] S. Kritchman and B. Nadler. Non-parametric detection of the number of signals : hypothesis testing and random matrix theory. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(10) :3930–3941, 2009.
- [8] P. Loubaton and P. Vallet. Almost sure localization of the eigenvalues in a gaussian information plus noise model. Application to the spiked models. *submitted*, 2010. arXiv : 1009.5807.
- [9] VA Marcenko and LA Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1 :457, 1967.
- [10] R.R. Nadakuditi and J.W. Silverstein. Fundamental limit of sample generalized eigenvalue based detection of signals in noise using relatively few signal-bearing and noise-only samples. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 4(3) :468–480, 2010.
- [11] P. Stoica and Y. Selen. Model-order selection : a review of information criterion rules. *IEEE Signal Processing Magazine*, 21(4) :36–47, 2004.
- [12] P. Vallet, P. Loubaton, and X. Mestre. Improved Subspace Estimation for Multivariate Observations of High Dimension : The Deterministic Signal Case. *submitted*, 2010. arXiv : 1002.3234.