

Résolution limite angulaire : Approches basées sur la théorie de l'information et sur la théorie de la détection

Dinh Thang VU, Mohammed Nabil EL KORSO, Rémy BOYER, Alexandre RENAUX, Sylvie MARCOS

Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S)
Université Paris-Sud XI, CNRS, SUPELEC
Gif-Sur-Yvette, France

{Vu,Elkorsor,Remy.Boyer,Renaux,Marcos}@lss.supelec.fr

Résumé – Dans cet article, on étudie la Résolution Limite Angulaire (RLA) pour deux signaux sources. La RLA représente l'angle minimal entre deux sources proches permettant de les résoudre. Nous proposons deux approches pour le calcul de la RLA: une approche basée sur la théorie de l'information et une approche basée sur la théorie de la détection (dans le contexte Bayésien qui est moins étudié dans la littérature). Les approches proposées sont ensuite comparées avec d'autres approches connues dans la littérature. Les simulations montrent que la performance des approches théoriques et empiriques sont proches.

Abstract – The Angular Resolution Limit (ARL) to resolve two closely spaced sources is considered in this paper. The proposed methods are based on the information theory and on the detection theory (in the Bayesian context). To evaluate our approaches, we compare it with other existing approaches: the Bayesian approach, called the Theoretical resolution limit (TRL), and the numerical approach: the Akaike information criterion (AIC).

1 Introduction

La résolution limite angulaire (RLA) caractérise la séparation minimale entre les paramètres d'intérêt qui permet de déterminer le nombre exact de sources. L'application de la RLA concerne plusieurs domaines : traitement d'image, les systèmes radar, l'astronomie, etc.

Dans la littérature, il y a trois approches principales pour obtenir la RLA. (i) La première approche se base sur la précision de l'estimation. Dans [1], Smith a proposé le critère suivant basé sur la Borne de Cramér-Rao (BCR) : deux sources peuvent être résolues si leur séparation (en terme de directions d'arrivées (DDA)) est supérieure à l'écart-type de l'estimation de cette séparation. Par conséquent, la RLA selon le critère de Smith est donnée par la séparation des paramètres d'intérêt qui est égale à cet écart-type et donc égale à la valeur de la BCR de cette séparation. En outre, dans [2], l'extension de la RLA pour le cas de plusieurs signaux ayant plusieurs paramètres d'intérêt par signal est présentée. (ii) La deuxième approche est basée sur le concept de la moyenne de la valeur du pseudo-spectre [3]. Cette approche est intuitive mais elle n'est pertinente que pour des algorithmes à haute résolution. (iii) La troisième approche se base sur la théorie de la détection. Dans [4], la RLA basée sur le concept de la probabilité d'erreur minimale pour des signaux déterministes est considérée. Les auteurs ont utilisé le développement en série de Taylor de la probabilité d'erreur pour obtenir la RLA. Alors que dans [5], Lui et Nehorai ont défini la RLA en utilisant le test du rapport de vraisemblance généralisé (TRVG). Dans [6], Sharman et Milanfard ont ob-

tenu la RLA dans le calcul de l'analyse spectrale en utilisant également le TRVG. Récemment, dans [7], la RLA basée sur la distance de Kullback-Leibler (DKL) pour le cas de l'estimation de la DDA de sources polarisées utilisant les réseaux des vecteurs de capteurs a été étudiée.

En traitement d'antenne, nous distinguons deux modèles de paramètres : le modèle déterministe où les paramètres sont supposés déterministes inconnus et le modèle Bayésien où les paramètres sont supposés aléatoires avec un certain *prior* sur leur distribution. L'approche déterministe fournit la RLA en fonction des valeurs des paramètres, c'est à dire, elle considère la RLA localement en fonction du paramètre d'intérêt, tandis que l'approche Bayésienne considère la RLA sur l'ensemble des valeurs des paramètres. Ce dernier modèle est moins étudié dans la littérature. Nous nous sommes alors intéressés à l'approche de la RLA dans le contexte Bayésien. Par conséquent, les paramètres des sources sont supposés aléatoires avec des distributions *a priori* connues. Afin de simplifier les calculs et sans perte de généralité, nous supposons que les deux sources sont proches. Ainsi, nous pouvons considérer le paramètre d'intérêt central (c'est à dire, la valeur moyenne des deux paramètres) comme étant aléatoire. A noter que cette hypothèse est aussi présentée dans [4].

Dans cette contribution, on considère l'approche de la RLA dans le contexte Bayésien basé sur la théorie de l'information et de la détection. En particulier, on se basera sur le lemme de Stein [8] et sur le critère de décision de Neyman-Pearson. Le lemme de Stein relie la probabilité de fausse alarme (P_{fa}), qui

est elle même reliée au critère de décision de Neyman-Pearson, à l'entropie relative. Nous avons introduit le modèle des observations linéarisé basé sur le critère de probabilité d'erreur minimale (PEM). Les résultats obtenus sont ensuite comparés avec une autre approche Bayésienne présentée dans [4] dite résolution limite théorique (RLT) mais aussi avec une approche numérique dite du critère d'information de Akaike (CIA) [9].

2 Formulation du problème

On considère le problème du seuil statistique de résolution limite basé sur un test d'hypothèses binaire. Sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 , le récepteur détecte seulement une seule source qui est la combinaison de deux sources, et sous l'hypothèse \mathcal{H}_1 , les deux sources sont résolues. Ce test d'hypothèses peut s'écrire comme suit [4] :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{z}(t) = \mathbf{b}(\hat{\theta}(t))\hat{s}(t) + \mathbf{n}(t), \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{z}(t) = \mathbf{b}(\theta_1)s_1(t) + \mathbf{b}(\theta_2)s_2(t) + \mathbf{n}(t), \end{cases} \quad (1)$$

où $t = 1 \dots T$, avec T représentant le nombre des observations. $\mathbf{z}(t)$ représente le vecteur des observations. $\mathbf{b}(\theta)$ représente le vecteur directionnel de taille $N \times 1$, et sans perte de généralité, on suppose que $\|\mathbf{a}(\theta)\|^2 = N$. θ_i représente le paramètre d'intérêt de la $i^{\text{ième}}$ source tel que l'angle d'arrivée, la fréquence, etc. $s_i(t)$ représente l'amplitude du signal de la $i^{\text{ième}}$ source sous l'hypothèse \mathcal{H}_1 . $\hat{s}(t)$ et $\hat{\theta}(t)$ représentent l'amplitude du signal et le paramètre d'intérêt sous \mathcal{H}_0 , qui sont des combinaison des amplitudes des signaux et des paramètres d'intérêt sous \mathcal{H}_1 . Les signaux sources sont supposés déterministes et connus par le récepteur. Le vecteur \mathbf{n} représente un bruit Gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance $\sigma^2\mathbf{I}$.

2.1 Principe des tests d'hypothèses à PEM

La probabilité d'erreur P_e est donnée par $P_e = p(\mathcal{H}_0)P_{fa} + p(\mathcal{H}_1)P_{nd} = 1 - \eta$, où P_{fa} , P_{nd} , $p(\mathcal{H}_0)$, $p(\mathcal{H}_1)$ et η représentent la probabilité de fausse alarme, la probabilité de non-détection, la probabilité *a priori* sous \mathcal{H}_0 , la probabilité *a priori* sous \mathcal{H}_1 et le taux de succès, respectivement. Sans perte la généralité, on suppose que $p(\mathcal{H}_0) = p(\mathcal{H}_1) = 1/2$. On définit $\theta_c = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. La RLA est donnée par $\delta = \theta_2 - \theta_1$. On suppose que θ_c est aléatoire avec une certaine distribution *a priori* notée $p(\theta_c)$. Les valeurs de $\hat{\theta}(t)$, et $\hat{s}(t)$ qui vérifient le principe de probabilité d'erreur minimale (PEM) sont données par [4] :

$$\hat{\theta}(t) = \theta_c + \gamma(t)\delta, \quad (2)$$

et

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{N} \mathbf{b}^H(\hat{\theta}(t)) \left(\mathbf{b}(\theta_c - \frac{\delta}{2})s_1(t) + \mathbf{b}(\theta_c + \frac{\delta}{2})s_2(t) \right), \quad (3)$$

où on a défini

$$\gamma(t) = \frac{|s_2(t)|^2 - |s_1(t)|^2}{2 \left(|s_2(t)|^2 + |s_1(t)|^2 + 2\Re\{s_1^*(t)s_2(t)\} \right)}. \quad (4)$$

Ainsi, les observations suivent une loi $\mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}_i(t), \sigma^2\mathbf{I})$ avec

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\mu}_0(t) = \mathbf{b}(\hat{\theta}(t))\hat{s}(t), \\ \mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\mu}_1(t) = \sum_{k=1}^2 \mathbf{b}(\theta_k)s_k(t). \end{cases} \quad (5)$$

Par conséquent, les fonctions de distribution de probabilité sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 sont données par :

$$p(\mathbf{z}; \mathcal{H}_0, \theta_c) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{NT}} \exp \left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{z}(t) - \boldsymbol{\mu}_0(t)\|^2 \right) \quad (6)$$

$$p(\mathbf{z}; \mathcal{H}_1, \theta_c) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{NT}} \exp \left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{z}(t) - \boldsymbol{\mu}_1(t)\|^2 \right) \quad (7)$$

où $\mathbf{z} = [\mathbf{z}(1)^T \dots \mathbf{z}(T)^T]^T$.

2.2 Formulation du test d'hypothèses

Le développement en série Taylor des vecteurs directionnels au voisinage du point θ_c est donné par :

$$\mathbf{b}(\theta_1) = \mathbf{b}(\theta_c) - \frac{\delta}{2} \dot{\mathbf{b}}(\theta_c) \quad \text{avec } \theta_1 = \theta_c - \frac{\delta}{2},$$

$$\mathbf{b}(\theta_2) = \mathbf{b}(\theta_c) + \frac{\delta}{2} \dot{\mathbf{b}}(\theta_c) \quad \text{avec } \theta_2 = \theta_c + \frac{\delta}{2},$$

$$\mathbf{b}(\hat{\theta}(t)) = \mathbf{b}(\theta_c) + \gamma(t)\delta \dot{\mathbf{b}}(\theta_c) \quad \text{avec } \hat{\theta}(t) = \theta_c + \gamma(t)\delta,$$

où la dérivation du premier ordre en fonction de θ_c du vecteur $\mathbf{b}(\theta_c)$ est donnée par $\dot{\mathbf{b}}(\theta_c)$. Ainsi, on utilisant (2) on obtient

$$\hat{s}(t) \cong p(t) + \frac{\delta}{2N} \kappa_c m(t), \quad (8)$$

où

$$p(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad (9)$$

$$\kappa_c = \mathbf{b}^H(\theta_c) \dot{\mathbf{b}}(\theta_c), \quad (10)$$

$$\mathbf{m} = [m(1) \dots m(T)]^T = \mathbf{V}^T \mathbf{s}, \quad (11)$$

et où

$$\mathbf{s} = [s_1(1) \ s_2(1) \ \dots \ s_1(T) \ s_2(T)]^T$$

et

$$\mathbf{V} = \text{Bdiag}\{\mathbf{v}(1), \dots, \mathbf{v}(T)\}$$

avec $\mathbf{v}(t) = [\gamma(t) + \frac{1}{2} \ \gamma(t) - \frac{1}{2}]^T$. On trouve que la valeur optimale du signal source $\hat{s}(t)$ est une approximation par une combinaison des sources $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Par conséquent, en utilisant les expressions ci-dessus, le développement en série Taylor des moyennes sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 sont données par

$$\boldsymbol{\mu}_0(t) = \mathbf{b}(\hat{\theta}(t))\hat{s}(t) \cong \delta \boldsymbol{\nu}_0(t), \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\mu}_1(t) = \sum_{k=1}^2 \mathbf{b}(\theta_k)s_k(t) \cong \delta \boldsymbol{\nu}_1(t), \quad (13)$$

où

$$\boldsymbol{\nu}_0(t) = p(t)\gamma(t)\dot{\mathbf{b}}(\theta_c) + \left(\frac{\kappa_c m(t)}{2N} \right) \mathbf{b}(\theta_c), \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\nu}_1(t) = \frac{q(t)}{2} \dot{\mathbf{b}}(\theta_c), \quad (15)$$

avec $q(t) = s_2(t) - s_1(t)$. Donc, le test d'hypothèses linéarisé est donné par

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{z} \cong \delta \boldsymbol{\nu}_0 + \mathbf{n}, \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{z} \cong \delta \boldsymbol{\nu}_1 + \mathbf{n}, \end{cases} \quad (16)$$

où $\mathbf{n} = [\mathbf{n}(1)^T \dots \mathbf{n}(T)^T]^T$, $\boldsymbol{\nu}_0 = [\nu_0^T(1) \dots \nu_0^T(T)]^T$ et $\boldsymbol{\nu}_1 = [\nu_1^T(1) \dots \nu_1^T(T)]^T$.

3 RLA basée sur la théorie de l'information

Le lemme de Stein [8] stipule que pour une P_d maximisée et pour une $P_{fa} \leq \epsilon$ avec ϵ tendant lentement vers zéro, on a

$$\lim_{TN \rightarrow \infty} \ln P_{fa} = -\mathcal{D}(p(\mathbf{z}, \theta_c; \mathcal{H}_1) \| p(\mathbf{z}, \theta_c; \mathcal{H}_0)), \quad (17)$$

où $\mathcal{D}(p(\mathbf{z}, \theta_c; \mathcal{H}_1) \| p(\mathbf{z}, \theta_c; \mathcal{H}_0))$ désigne l'entropie relative entre deux distributions Gaussiennes à moyennes paramétrées, donnée par

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}(p(\mathbf{z}, \theta_c; \mathcal{H}_1) \| p(\mathbf{z}, \theta_c; \mathcal{H}_0)) = \\ & = \int_{\Theta} \int_{\Omega} p(\mathbf{z}, \theta_c; \mathcal{H}_1) \ln \left(\frac{p(\mathbf{z}, \theta_c; \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{z}, \theta_c; \mathcal{H}_0)} \right) d\mathbf{z} d\theta_c \\ & = \int_{\Theta} \frac{\delta^2}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T \|\boldsymbol{\nu}_0(t) - \boldsymbol{\nu}_1(t)\|^2 p(\theta_c) d\theta_c \\ & = \mathbb{E} \left\{ \frac{\delta^2 \|\mathbf{m}\|^2}{\sigma^2} \left\| \frac{\kappa_c}{N} \mathbf{b}(\theta_c) - \dot{\mathbf{b}}(\theta_c) \right\|^2 \right\} \\ & = \mathbb{E} \left\{ \frac{\delta^2 \|\mathbf{m}\|^2 \|\mathbf{d}\|^2}{\sigma^2} \cos^2(\Upsilon) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

où Θ et Ω représentent l'espace des paramètres et l'espace des observations et \mathbb{E} représente l'opérateur d'espérance en fonction du paramètre θ_c . Υ représente l'angle canonique maximal entre $\mathbf{b}(\theta_c)$ et $\dot{\mathbf{b}}(\theta_c)$. Il est important de noter que l'entropie relative peut être approximée par une expression quadratique en δ . De plus, l'entropie relative est une fonction de la forme d'onde des signaux sources, de la distribution du réseau, de la variance du bruit et de la quantité géométrique que représente l'angle entre le vecteur directionnel et sa dérivée au premier ordre.

Pour une P_d maximale, $P_{fa} \approx 2P_e = 2(1 - \eta)$, et donc, l'expression analytique de la RLA est donnée par

$$\delta \cong \frac{-\sigma \sqrt{\log(2) + \log(1 - \eta)}}{\mathbb{E} \{ \mu \|\mathbf{d}\| \cos(\Upsilon) \}} \quad (19)$$

où $\eta > 1/2$, $\mu = \sqrt{\mathbf{s}^H \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{s}}$, $\mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{B} \text{diag}\{\mathbf{G}(1) \dots \mathbf{G}(T)\}$

$$\text{et } \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} (\gamma(t) + \frac{1}{2})^2 & \gamma^2(t) + \frac{1}{4} \\ \gamma^2(t) + \frac{1}{4} & (\gamma(t) - \frac{1}{2})^2 \end{bmatrix}.$$

4 RLA basée sur la théorie de la détection

Dans cette partie, on calcule la RLA basée sur la théorie de la détection, en particulier, basée sur le critère de Neyman-

Pearson qui minimise la probabilité d'erreur P_e dans le contexte Bayésien (BNP).

On pose

$$\mathbf{z}' = \frac{\mathbf{z}}{\delta} - \boldsymbol{\nu}_0. \quad (20)$$

Par conséquent, en substituant (20) dans (16), on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{z}' \cong \mathbf{n}', \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{z}' \cong \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{n}', \end{cases} \quad (21)$$

où $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\nu}_1 - \boldsymbol{\nu}_0$ et $\mathbf{n}' \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \frac{\sigma^2}{\delta^2} \mathbf{I})$. Par conséquent, on a

$$G_{NP}(\mathbf{z}') = \frac{p(\mathbf{z}'; \mathcal{H}_1, \theta_c)}{p(\mathbf{z}'; \mathcal{H}_0, \theta_c)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \tau' = \frac{p(\mathcal{H}_0)}{p(\mathcal{H}_1)}, \quad (22)$$

posant $T_{NP}(\mathbf{z}') = \ln(G_{NP}(\mathbf{z}'))$ et $\tau = \ln(\tau')$, le test statistique est alors donné par

$$\begin{aligned} T_{NP}(\mathbf{z}') &= \ln \left(\frac{p(\mathbf{z}'; \mathcal{H}_1, \theta_c)}{p(\mathbf{z}'; \mathcal{H}_0, \theta_c)} \right) = \frac{\delta^2}{\sigma^2} \left(\|\mathbf{z}' - \boldsymbol{\zeta}\|^2 - \|\mathbf{z}'\|^2 \right) \\ &= \frac{\delta^2}{\sigma^2} \left(\|\boldsymbol{\zeta}\|^2 - 2\Re \{ \mathbf{b}^H \mathbf{z}' \} \right) \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Puisqu'on a supposé que $p(\mathcal{H}_0) = p(\mathcal{H}_1) = 1/2$, on déduit

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : T_{NP}(\mathbf{z}') > 0, \\ \mathcal{H}_1 : T_{NP}(\mathbf{z}') < 0. \end{cases} \quad (24)$$

En posant $L(\mathbf{z}') = \Re \{ \boldsymbol{\zeta}^H \mathbf{z}' \}$, on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : L(\mathbf{z}') \sim \mathcal{N}(0, \varrho^2), \\ \mathcal{H}_1 : L(\mathbf{z}') \sim \mathcal{N}(\|\boldsymbol{\zeta}\|^2, \varrho^2), \end{cases} \quad (25)$$

où

$$\varrho^2 = \frac{\sigma^2 \|\boldsymbol{\zeta}\|^2}{2\delta^2}.$$

Donc, la probabilité d'erreur conditionnelle est donnée par [10] :

$$P_e(\delta; \theta_c) = \frac{1}{2} \left(\left(1 - Q \left(\frac{-\|\boldsymbol{\zeta}\|^2}{2\sqrt{\varrho^2}} \right) \right) + Q \left(\frac{\|\boldsymbol{\zeta}\|^2}{2\sqrt{\varrho^2}} \right) \right), \quad (26)$$

où $Q(\cdot)$ représente la surface de la queue de distribution à droite de la loi normale de moyenne nulle et de variance unité. Puisque

$$Q \left(\frac{-\|\boldsymbol{\zeta}\|^2}{2\sqrt{\varrho^2}} \right) = 1 - Q \left(\frac{\|\boldsymbol{\zeta}\|^2}{2\sqrt{\varrho^2}} \right), \text{ donc, on aura}$$

$$P_e(\delta; \theta_c) = Q \left(\frac{\|\boldsymbol{\zeta}\|^2}{\sqrt{4\varrho^2}} \right). \quad (27)$$

Puisque la probabilité d'erreur marginale est :

$$P_e(\delta) = \int_{\Theta} P_e(\delta; \theta_c) p(\theta_c) d\theta_c = \mathbb{E} \{ P_e(\delta; \theta_c) \}, \quad (28)$$

par conséquent, la RLA basée sur le critère NP est donnée par :

$$\delta \cong \frac{\sigma \sqrt{2} Q^{-1}(1 - \eta)}{\mathbb{E} \{ \mu \|\mathbf{d}\| \cos(\Upsilon) \}} \quad (29)$$

où $Q^{-1}(\cdot)$ représente la fonction Q inverse.

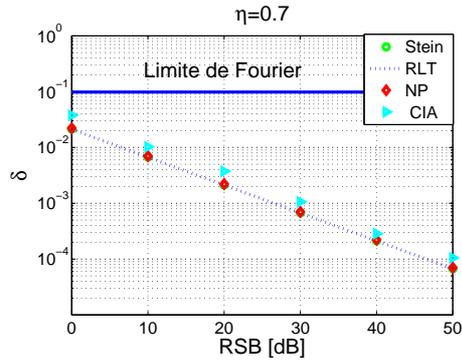


FIG. 1 – RLA en fonction de RSB pour $\eta = 0.7$.

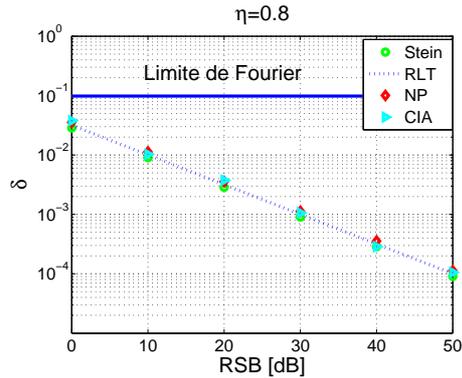


FIG. 2 – RLA en fonction de RSB pour $\eta = 0.8$.

5 Simulations

On considère le contexte d'analyse spectrale avec $T = 1$. Le vecteur $\mathbf{b}(\theta)$ a pour forme :

$$\mathbf{b}(\theta) = \left[1, e^{j\theta}, \dots, e^{j(N-1)\theta} \right]^T,$$

où $N = 64$. Le rapport signal à bruit RSB est donné par $RSB = \frac{\sum_{k=1}^2 \|\mathbf{s}_k\|^2}{(2T\sigma^2)}$. La valeur du taux de succès η est prise dans l'intervalle $(0.5; 1]$. La valeur normalisée de la moyenne de la fréquence centrale θ_c est supposée uniforme aléatoire dans l'intervalle $[0; 1]$. On compare les deux méthodes présentées précédemment avec le méthode Bayésienne RLT [4] et avec la méthode numérique CIA [9]. L'approche CIA est obtenue avec 200 tirages Monte Carlo et il faut noter que cette approche numérique est indépendante du taux de succès. Les Fig. (1), (2) et (3) montrent la RLA des approches en fonction du RSB pour des valeurs différentes de η . La limite de Fourier est donnée par la séparation $\delta_F = 2\pi/(TN)$, en dessous de laquelle, les méthodes de faible résolution telles que le périodogramme ne peuvent pas résoudre les sources. On peut remarquer que les RLA en fonction du RSB au sens du lemme de Stein (Section 3), du NP (Section 4), d'Amar et Weiss [4] et même du CIA [9] empirique sont très proches.

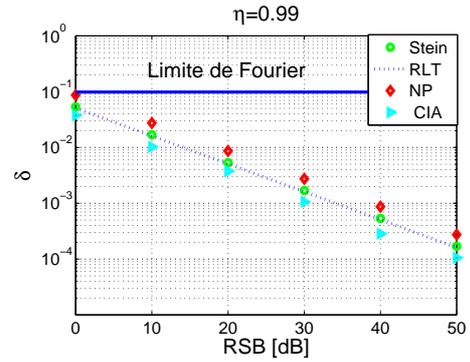


FIG. 3 – RLA en fonction de RSB pour $\eta = 0.99$.

6 Conclusion

Dans cette contribution, nous avons introduit deux approches pour la RLA dans le contexte Bayésien basées sur la théorie de l'information et de la détection. La comparaison des approches Bayésiennes a montré que les performances des méthodes théoriques et numériques sont très proches.

Références

- [1] S. T. Smith, "Statistical resolution limits and the complexified Cramér-Rao bound," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1597–1609, May 2005.
- [2] N. M. E. Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos, "Statistical resolution limit for the multidimensional harmonic retrieval model : Hypothesis test and Cramér-Rao bound approaches," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2011.
- [3] K. Sharman and T. Durrani, "Resolving power of signal subspace methods for finite data lengths," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Florida, USA, 1985, pp. 1501–1504.
- [4] A. Amar and A. J. Weiss, "Fundamental limitations on the resolution of deterministic signals," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 56, no. 11, pp. 5309–5318, Nov. 2008.
- [5] Z. Liu and A. Nehorai, "Statistical angular resolution limit for point sources," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 55, no. 11, pp. 5521–5527, Nov. 2007.
- [6] M. Shahram and P. Milanfar, "Imaging below the diffraction limit : A statistical analysis," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 13, no. 5, pp. 677–689, May 2004.
- [7] D. T. Vu, M. N. E. Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos, "Angular resolution limit for vector-sensor arrays : detection and information theory approaches," in *Proc. IEEE Work. on Statistical Signal Processing, (invited paper)*, Nice, France, Jun. 2011.
- [8] T. Cover and J. A. Thomas, *Elements of information theory*. New York : Wiley, 1991.
- [9] P. Stoica, V. Simonite, and T. Soderstrom, "On the resolution performance of spectral analysis," *Elsevier Signal Processing*, vol. 44, no. 2, pp. 153–161, Jan. 1995.
- [10] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing*. NJ : Prentice Hall, 1998, vol. 2.