

Détection des Extremums Locaux sur les images couleurs en utilisant le formalisme des Quaternions

NABILA BENKABLIA¹

¹ Division Observation de la Terre – Centre des Techniques Spatiales
1 avenue de la Palestine, BP 13, 31200 Arzew, Algérie

¹Benkabilia@gmail.com,

Résumé - Les nombres hypercomplexes ou les quaternions ont été un sujet de recherche en mathématiques, en physique et en ingénierie pendant des décennies. Cependant leur utilisation pour représenter les images couleurs est été récemment proposée et étudiée. Dans cet article, nous proposons une approche pour détecter les extremums locaux en se basant sur la forme polaire des différences des quaternions par lesquels sont représentés un voisinage de pixels des images couleurs, avec des seuils suivant le module et les angles de phase. L'interprétation visuelle des résultats obtenus laisse apparaître une meilleure délimitation des contours et le rejet des points dans les zones homogènes.

Abstract - The hypercomplex numbers or quaternions have been a subject for research in mathematics, physics and engineering for decades. Their use to represent color images, however, has recently been proposed and studied. In this paper, we propose an approach to detect local extrema based on the polar form of quaternions differences in which a neighborhood of pixels for color images are represented, with thresholds relative to the modulus and phase angles. The results visually interpreted shows better demarcation of contours and rejecting points in homogeneous areas.

1 Introduction

Depuis quelques années, l'utilisation des nombres hypercomplexes (les quaternions en particulier) pour la modélisation des images numériques couleur a permis le développement d'outils d'analyse et de traitement spécifiquement dédiés à ces images vectorielles (terminologie employée pour les images dont les pixels sont des vecteur) [1, 2, 3].

En effet, la majorité des travaux en traitement d'images, utilisent la transformation de l'image couleur en niveaux de gris ou bien de traiter les bandes couleurs séparément, ce qui mène à une perte de l'information des données. Afin de pallier cette carence, nous adoptons le formalisme des quaternions qui consiste à représenter le vecteur couleur associé à un pixel par un quaternion pur. Mentionnons que les quaternions ont été associés avec succès avec des opérateurs relevant du traitement de signal et le traitement d'images comme les opérateurs de filtrage [4], FFT [5, 6, 7], segmentation d'images couleurs [8] ou encore la détection des changements sur des images satellitaires [9].

La suite de l'article s'articulera de la manière suivante : en section 2, nous présentons le formalisme des quaternions et son application sur les images couleurs. Nous détaillerons l'approche proposée pour la détection des extremums locaux en section 3. Nous poursuivons, en section 4, par présenter les résultats expérimentaux obtenus sur des images synthétiques et des images à très haute résolution spatiales. Enfin, en section 5, nous terminons par une brève conclusion.

2 Algèbre des Quaternions

Dans cette section, nous présentons brièvement la théorie des quaternions et comment les employer pour représenter une image couleur.

2.1 Les quaternions

Introduits par Sir W.R. Hamilton en 1843, les quaternions sont des nombres hypercomplexes présentant une extension des nombres complexes aux espaces à quatre dimensions [10, 11]. Soit \mathbb{H} l'ensemble des quaternions, un quaternion $q \in \mathbb{H}$ est représenté sous sa forme cartésienne par l'équation suivante :

$$q = w + xi + yj + zk \quad (1)$$

où $w, x, y, z \in \mathbb{R}$ et i, j, k sont des nombres imaginaires vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 \\ ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \end{cases} \quad (2)$$

Le conjugué et le module (norme) du quaternion q sont données par :

$$q^* = w - xi - yj - zk \quad (3)$$

$$|q| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (4)$$

Un quaternion est dit pur, si est seulement si sa partie réelle est nulle ($w = 0$).

Un quaternion unitaire, est un quaternion dont le module est égal à un ($|q| = 1$).

2.2 Quaternions et images couleurs

S.J. Sangwine et S.C. Pei [11] ont proposé d'utiliser la représentation cartésienne des quaternions pour coder

les pixels couleur des images. Ainsi une image couleur de dimension $M \times N$ sera représentée par une matrice de quaternions purs de dimension $M \times N$. une couleur ne contenant que trois composantes dans l'espace RVB, il a été proposé de décrire l'information couleur sur la partie imaginaire des quaternions. Le pixel d'une image f aux coordonnées (m, n) sera donc codé comme suit :

$$f[m, n] = f_R[m, n] i + f_V[m, n] j + f_B[m, n] k \quad (5)$$

avec $f_R[m, n]$, $f_V[m, n]$ et $f_B[m, n]$ respectivement les composantes rouge, verte et bleue du pixel de coordonnées (m, n) .

2.3 Représentation polaire

Bülow montre le calcul permettant d'exprimer un quaternion sous sa forme polaire. Cette représentation comprend le module $|q|$ et trois phases (angles) ϕ, θ et ψ . Tout quaternion peut ainsi être représenté de la manière suivante [12] :

$$q = |q| e^{i\phi} e^{k\psi} e^{j\theta} \quad (6)$$

avec $(\phi, \theta, \psi) \in [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Soit $q_u = a + i.b + j.c + k.d$ un quaternion unitaire ; alors le triplet (ϕ, θ, ψ) tel que $q_u = e^{i\phi} e^{k\psi} e^{j\theta}$, peut être estimé en suivant les calculs ci-dessous [11, 12] :

1. calculer $\alpha = 2(bc - ad)$;

2. si $|a| = 1$ alors
$$\begin{cases} \hat{\phi} = 0 \\ \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2(ac-bd)}{a^2-b^2-c^2+d^2} \\ \psi = -\alpha \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{sinon} \begin{cases} \hat{\phi} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2(ab+cd)}{a^2-b^2+c^2-d^2} \\ \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2(ac+bd)}{a^2+b^2-c^2-d^2} \\ \psi = \frac{1}{2} \arcsin \alpha \end{cases}$$

3. si $e^{i\phi} e^{k\psi} e^{j\theta} = -q_u$ alors

$$\begin{cases} \text{si } \hat{\phi} \geq 0 \text{ alors } \phi = \hat{\phi} - \pi \\ \text{si } \hat{\phi} < 0 \text{ alors } \phi = \hat{\phi} + \pi \end{cases}$$

sinon $\phi = \hat{\phi}$.

3 Détection des extremums locaux

Notre approche consiste à détecter les extremums locaux sur une image quaternionique (couleur représentée par la forme cartésienne de quaternions pour coder l'ensemble des pixels (voir l'équation 5)). Et pour chaque pixel potentiel, on calcule sa distance avec la moyenne de ses huit voisins qui est, elle-même ; un quaternion. On transforme cette distance dans la forme polaire (module et trois angles de phase), et on retient les points dont la forme polaire vérifie les seuils modulaire et angulaire définis par l'utilisateur.

Notre méthodologie suit les étapes suivantes :

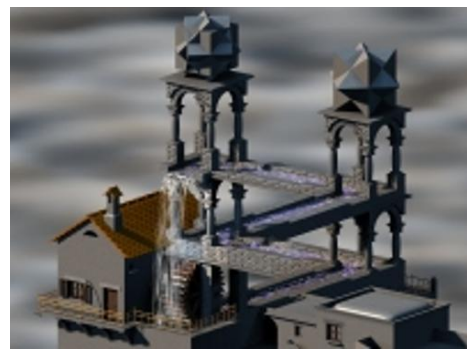
- Vérifier pour chaque pixel de l'image si son module $|f[m, n]|$ est un élément minimum ou maximum sur une fenêtre de 3×3 .
- Pour chaque extremum $f_E[m, n]$ calculer la moyenne des quaternions le voisinant $f_m[m, n]$.
- Retenir les extremums qui vérifient $(f_d = |f_E[m, n]| - |f_m[m, n]|) < S$, (S : seuil modulaire). Et calculer la forme polaire de $f_d = |f_d| e^{i\phi_d} e^{k\psi_d} e^{j\theta_d}$.
- Retenir les extremums qui vérifient $(\phi_d, \theta_d, \psi_d) \cong (S_\phi, S_\theta, S_\psi)$ avec S_ϕ, S_θ, S_ψ respectivement les seuils angulaires suivant les vecteurs i, j et k .

4 Résultats et discussion

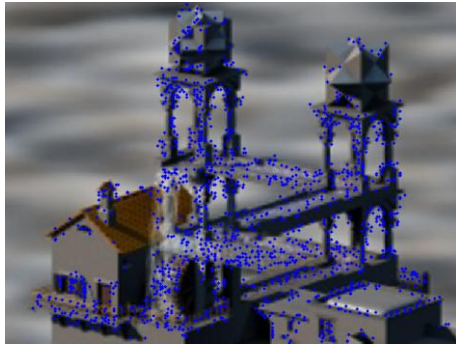
L'idée de cette étude est d'extraire toute l'information issue des trois composantes rouge, verte et bleue et d'étudier les angles les reliant. Ce choix est justifié par l'emploi des couleurs RVB sans alourdir notre approche par l'algèbre géométrique (de Clifford) qui décrit l'espace tridimensionnel par trois vecteurs, trois bivecteurs et un trivecteur [13, 14]. Nous avons appliqué l'algorithme de détection des extremums sur une image synthétique (Figure1.a), nous avons fixé le seuil modulaire S à 20, et les seuils angulaires $(S_\phi, S_\theta, S_\psi) = (1.0172, 1.0172, -0.3649)$. Le choix de ce seuil s'est porté suivant sa correspondance avec un écart égal pour chaque composante du quaternion f_d (voir §3.c) :

$$\begin{cases} f_d = E_R + E_V + E_B \cong S e^{S_\phi} e^{S_\psi} e^{S_\theta} \\ E_R \cong E_V \cong E_B \end{cases} \quad (7)$$

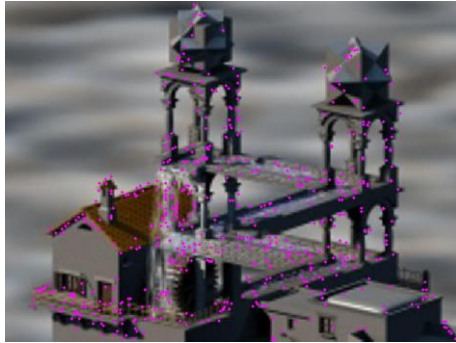
On remarque que les points détectés sur la figure1.b épousent fidèlement les contours, que celle sur la figure1.c. La seconde expérimentation est réalisée sur des données à très haute résolution spatiale (0.6 m) acquise par le satellite QuickBird (Figure2.a) avec des seuils fixés comme suit : $S = 50$ et $(S_\phi, S_\theta, S_\psi) = (1.0172, 1.0172, -0.3649)$.



(a)



(b)



(c)

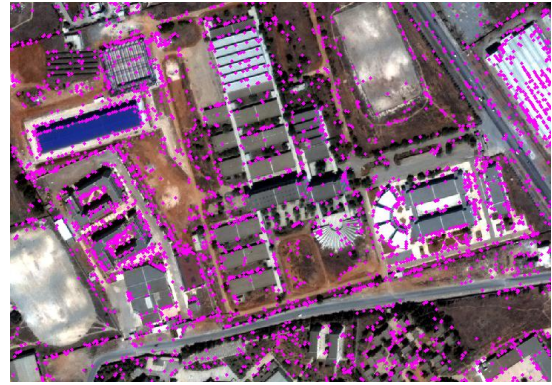
Figure1 : (a) image originale, (b) Extremums locaux détectés avec $S=20$, $S_\phi=S_\theta=1.0172$, $S_\psi=-0.3649$, (c) Extremums non retenus



(a)



(b)



(c)

Figure2 : (a) image QuickBird, (b) Extremums locaux détectés avec $S=50$, $S_\phi=S_\theta=1.0172$, $S_\psi=-0.3649$, (c) Extremums non retenus

Dans la figure2.b, les formes géométriques (Bâties et routes) sont bien délimitées et contournées par les points détectés. Dans les figures 1.c et 2.c, on remarque que les points rejetés sont localisés dans les régions de couleurs homogènes.

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons proposé une nouvelle approche d'extraction des extremums locaux sur une image en exploitant les trois composantes couleurs (rouge, verte et bleue) en utilisant le formalisme des quaternions. Les résultats obtenus montrent la relation liant les angles de phase du quaternion et la nature du point détecté. Cette étude laisse espérer de vastes applications en traitement d'images, notamment pour la détection des points d'intérêts.

Références

- [1] I.L. Kantor et A.S. Solodovnikov. Hypercomplex numbers, an elementary introduction to algebras. *Springer-Verlag*, NewYork 1989.
- [2] W.R. Hamilton. On quaternion. *Proceeding of the royal Irish academy*, 1843.
- [3] W.R. Hamilton. Researches respecting quaternions. *Trans. Royal Irish Academy*, pages XXI :199-296, 1843.
- [4] F.S. Al-Qunaieer et L. Ghouti. Color Iris Recognition Using Hypercomplex Gabor Wavelets. *Symposium on Bio-inspired Learning and Intelligent Systems For Security*, pages 18-19, Edinburgh, UK, 2009.
- [5] P. Bas, N. Le Bihan et J.M. Chassery. Color Images watermarking using Quaternion Fourier Transform. *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 3. pages III :521-524, 2003.
- [6] S.J. Sangwine. The Problem Of Defining The Fourier Transform Of A Colour Image. *International Conference on Image Processing*,

1. pages 171-175, Chicago, 1998.
- [7] T.A. Ell et S.J. Sangwine. Hypercomplex Fourier Transforms of Color Images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(1): 22-35, 2007.
 - [8] M. Sujaritha et S. Annadurai. Color Texture Segmentation using Quaternion-Wavelet Filters and SOM. *Second International conference on Computing, Communication and Networking Technologies*, India, 2010.
 - [9] W. Luo et H. Li. PCA Based Unsupervised Change Detection for Color Satellite Images Under the Quaternion Model. *International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems*, pages 1-4, China, 2010.
 - [10] N. Le Bihan et S.J. Sangwine. Quaternion Principal Component Analysis of Color Images. *International Conference on image processing*, vol. 1, pages. I-809-812, 2003.
 - [11] P. Denis. Quaternions et Algèbres géométriques, de nouveaux outils pour les images numériques couleur. Thèse de doctorat de l'université de Poitiers, 2006.
 - [12] T. Bülow. Hypercomplex Spectral Signal representations for the Processing and Analysis of Images. *vol. 9903 de Bericht, Institut für Informatik und Praktische Mathematik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel*, 1999.
 - [13] P. Carré, P. Denis, et C. Fernandez-Maloigne. Spatial color image processing using Clifford algebras : application to color active contour. *Signal, Image and Video Processing*, vol.6, pages 1-16, 2012.
 - [14] D. Lundholm, L. Svensson. Clifford algebra, geometric algebra, and applications. Department of Mathematics, arXiv : 0907.5356v1, mathematical physics, 2009.