

Estimation de rotation par une approche basée sur les quaternions

Stéphane BONNET¹

¹CEA-LETI, Minatec Campus
17 rue des Martyrs, 38054 Grenoble Cedex 09, France
stephane.bonnet@cea.fr

Résumé – La problématique du papier est celle de la détermination de la rotation entre deux repères à partir de l’observation jointe de plusieurs vecteurs. L’apport de ces travaux est avant tout théorique avec la proposition d’un nouveau théorème et d’un nouvel algorithme d’estimation de rotation entre deux repères basé sur le formalisme des quaternions. L’approche proposée est illustrée sur un jeu de données simulées. La reconstruction étant exacte, la méthode peut s’appliquer dans de nombreux domaines.

Abstract – The problem of recovering the rotation between two frames from a set of vector observations is frequently encountered in many fields. Such problem is usually solved by minimizing a weighted least-squares criterion. The formulation depends on the chosen attitude representation: rotation matrix or quaternion. In this paper, we show that the optimal quaternion can be obtained as a minimum-norm solution and we derive an efficient algorithm for its estimation.

1 Introduction

L’estimation de la rotation entre deux repères est un problème récurrent en traitement du signal. On rencontre ainsi soit le cas où on dispose des coordonnées de plusieurs vecteurs (fixes) dans deux repères ayant subi une rotation entre eux, ou le cas similaire où le repère est fixe et ce sont les vecteurs qui ont subi une rotation identique. Cette problématique tout à fait générale se pose par exemple dans le cadre de la calibration de caméras [1], l’estimation de rotation entre deux images, la reconnaissance de protéines dans une base de données ou encore l’estimation d’orientation pour des capteurs de mouvement (accéléromètres et/ou magnétomètres) [2]. On note que de nombreuses solutions ont été apportées dans ces différents domaines applicatifs sans forcément faire le lien entre elles.

De plus, les algorithmes varient selon la représentation choisie pour décrire la rotation, avec l’emploi des matrices de rotation (9 inconnues, 6 contraintes), des angles d’Euler (3 inconnues) ou encore plus récemment des quaternions unitaires (4 inconnues, 1 contrainte) [3]. Les quaternions offrent ainsi une représentation d’attitude redondante de dimension minimale et évitent le calcul de fonctions trigonométriques.

Ce papier vise à proposer une nouvelle méthode d’estimation de la rotation entre deux repères en se basant sur ce formalisme. La formulation se base sur des considérations géométriques pour dériver une fonction de coût de norme minimale. Un nouveau théorème est proposé pour estimer le quaternion optimal au sens du critère de Wahba [4]. La méthode décrite dans le papier permet ainsi une estimation directe du quaternion optimal à partir duquel on déduit facilement la matrice de rotation. La méthode est testée sur des données simulées et ses performances sont comparées avec un algorithme de l’état de l’art.

2 Estimation du quaternion-rotation entre deux repères

2.1 Notations

Un quaternion q peut être considéré comme la combinaison d’un vecteur 3-D \mathbf{q}_v et d’un scalaire q_s [5]. On peut ainsi le représenter comme un vecteur colonne 4-D :

$$q \longleftrightarrow \mathbf{q} = (\mathbf{q}_v^T, q_s)^T$$

Le quaternion conjugué est donné par :

$$\bar{q} \longleftrightarrow \bar{\mathbf{q}} = (-\mathbf{q}_v^T, q_s)^T$$

Un quaternion unitaire satisfait la relation $\|\mathbf{q}\|_2^2 = \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1$, et vérifie la relation $q \otimes \bar{q} = 1$ avec \otimes l’opération de multiplication pour les quaternions. Un vecteur 3-D \mathbf{u} peut être associé à un quaternion pur \mathbf{u}_q avec la notation $\mathbf{u}_q \longleftrightarrow \mathbf{u}_q = (\mathbf{u}^T, 0)^T$.

La multiplication à gauche (resp. à droite) par un quaternion pur est obtenue par le produit matrice-vecteur 4-D :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = \mathbf{u}_q \otimes \mathbf{q} &\longleftrightarrow \mathbf{m} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_u & \mathbf{u} \\ -\mathbf{u}^T & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{m} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{u}_q &\longleftrightarrow \mathbf{m} = \mathbf{R}(\mathbf{u})\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -\mathbf{T}_u & \mathbf{u} \\ -\mathbf{u}^T & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (1)$$

avec \mathbf{T}_u la matrice antisymétrique 3×3 associée au produit vectoriel de sorte que $\mathbf{T}_u \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ et

$$\mathbf{T}_u = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

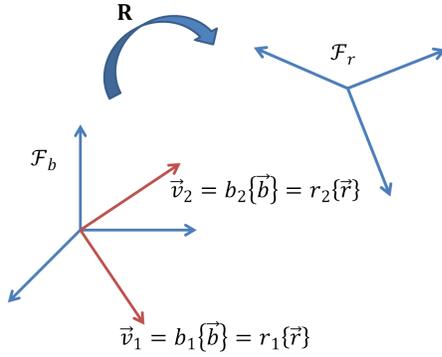


FIGURE 1 – Les champs \vec{v}_i sont invariants dans le temps. On dispose de leurs coordonnées dans 2 repères mobiles reliés par une rotation \mathbf{R} .

2.2 Formalisation du critère

Cas 1 paire de vecteurs

Supposons que l'on connaisse les composantes d'un même vecteur dans le repère \mathfrak{F}_b et le repère \mathfrak{F}_r , avec respectivement \mathbf{b}^0 et \mathbf{r} .

Il est connu que les composantes \mathbf{b}^0 et \mathbf{r} sont reliées par le quaternion unitaire \mathbf{q} [5] :

$$\mathbf{b}_q^0 = \bar{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{r}_q \otimes \mathbf{q}. \quad (3)$$

En pré-multipliant à gauche (3) par le quaternion unitaire \mathbf{q} et en utilisant les relations de (1), on obtient :

$$[\mathbf{R}(\mathbf{b}^0) - \mathbf{L}(\mathbf{r})] \mathbf{q} = \mathbf{H}(\mathbf{b}^0, \mathbf{r}) \mathbf{q} = \mathbf{0}_4 \quad (4)$$

avec

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{T}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} & \mathbf{u} - \mathbf{v} \\ -(\mathbf{u} - \mathbf{v})^T & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

L'équation (4), linéaire pour le quaternion, est le modèle de mesure en absence de bruit, avec la matrice d'observation \mathbf{H} qui est fonction de la somme et de la différence des composantes [6]. L'équation (4) indique également que \mathbf{q} appartient au noyau de l'application linéaire définie par la matrice $\mathbf{H}(\mathbf{b}^0, \mathbf{r})$.

Le sous-espace vectoriel, de dimension 2, associé au noyau de l'application est généré par les 2 vecteurs orthonormaux [7] :

$$\mathbf{q}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \mathbf{u}^T \mathbf{v})}} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \\ 1 + \mathbf{u}^T \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{q}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \mathbf{u}^T \mathbf{v})}} \begin{pmatrix} \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Ainsi pour une observation (sans bruit), le quaternion solution de (3) peut être paramétré par l'angle ψ selon :

$$\mathbf{q}(\psi) = \cos \psi \mathbf{q}_1(\mathbf{b}^0, \mathbf{r}) + \sin \psi \mathbf{q}_2(\mathbf{b}^0, \mathbf{r}) \quad (8)$$

Ce résultat est compréhensible en interprétant géométriquement la contribution de chaque quaternion unitaire. Pour $\psi = 0$, le quaternion traduit la rotation d'angle minimal qui met en correspondance les deux vecteurs \mathbf{b}^0 et \mathbf{r} . A l'opposé, pour $\psi = \pi/2$, le quaternion traduit la rotation d'angle maximal 180° . Cela définit au final une géodésique sur la 3-sphère plongée dans un espace 4-D.

Cas N paires de vecteurs

Si on dispose à présent d'un ensemble de $N > 1$ vecteurs observés à la fois dans les repères \mathfrak{F}_b et \mathfrak{F}_r , un problème courant en traitement du signal vise alors à estimer la matrice de rotation (ou de manière équivalente le quaternion) qui relie les deux repères, voir Fig.1. Ce problème est connu sous le nom de problème de Wahba [4].

Ce problème est en général écrit comme un problème de minimisation au sens des moindres carrés pondérés :

$$\hat{\mathbf{R}} = \underset{\mathbf{R}}{\operatorname{argmin}} J(\mathbf{R}) \text{ s.t. } \mathbf{R} \in \text{SO}(3)$$

$$J(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N w_n \|\mathbf{b}_n - \mathbf{R} \mathbf{r}_n\|_2^2 \quad (9)$$

avec $\text{SO}(3)$ le groupe spécial orthogonal des matrices 3×3 de déterminant égal à $+1$. La fonction de coût en (9) est la somme pondérée des erreurs quadratiques commises pour chaque vecteur. Chaque poids est strictement positif, $w_n > 0$ avec le choix non informatif $w_n = 1/N$ ou alors le choix $w_n = 1/\sigma_n^2$ avec σ_n^2 la variance du bruit associé au vecteur mesuré \mathbf{b}_n . Dans ce cas précis, le problème de Wahba est relié à l'estimation au sens du maximum de vraisemblance [8]. On note pour la suite $\lambda_0 = \sum_{n=1}^N w_n$.

Dans le cas de capteurs accéléromètres et/ou magnétomètres, ce poids peut refléter l'écart aux conditions respectivement statiques et non perturbées magnétiquement. Ainsi pour une situation fortement dynamique, le poids attribué au vecteur accélération de la pesanteur (mesure fournie par l'accéléromètre) doit être faible.

Différentes approches ont été proposées pour résoudre le problème de Wahba [8], [9]. Celles-ci diffèrent selon la représentation d'attitude utilisée. Ainsi, l'approche basée sur la matrice de rotation, est basée généralement sur la SVD (Décomposition en Valeurs Singulières) de la matrice 3×3 $\mathbf{C} = \sum_{n=1}^N w_n \mathbf{b}_n \mathbf{r}_n^T$, [8].

L'approche basée sur les quaternions [9] consiste à réécrire la fonction de coût comme :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N w_n \|(\mathbf{b}_n)_q - \bar{\mathbf{q}} \otimes (\mathbf{r}_n)_q \otimes \mathbf{q}\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N w_n \|\mathbf{q} \otimes (\mathbf{b}_n)_q - (\mathbf{r}_n)_q \otimes \mathbf{q}\|_2^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$= \lambda_0 - \sum_{n=1}^N w_n \mathbf{q}^T \mathbf{K}_n \mathbf{q} \quad (11)$$

avec la matrice orthogonale $\mathbf{K}_n = \mathbf{R}^T(\mathbf{b}_n) \mathbf{L}(\mathbf{r}_n)$. On a utilisé ici la propriété que la norme d'un quaternion reste inchangée si on le multiplie par un quaternion unitaire et que dans le cas d'un vecteur \mathbf{u} unitaire, les matrices $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ sont orthogonales et commutent.

La méthode usuelle repose alors sur la EVD (Décomposition en Valeurs Propres) de la matrice 4×4 $\mathbf{K} = \sum_{n=1}^N w_n \mathbf{K}_n$. L'EVD peut être soit complète ou soit partielle dans le cas de

l'algorithme QUEST [9]. On note que les éléments de la matrice \mathbf{K} se déduisent facilement de ceux de la matrice \mathbf{C} .

Une seconde approche, moins connue et moins décrite [2], vise à formuler (10) comme

$$J(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N w_n \|\mathbf{H}_n \mathbf{q}\|_2^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{H} \mathbf{q}\|_2^2 \quad (12)$$

où la matrice $\mathbf{H}_n \equiv \mathbf{H}(\mathbf{b}_n, \mathbf{r}_n)$ a été introduite en (5). La solution est alors donnée par la SVD de la matrice $4N \times 4$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ \sqrt{w_N} \mathbf{H}_N \end{pmatrix} \quad (13)$$

Cette méthode est très proche de la méthode originale proposée ci-dessous. Elle en partagera les avantages (calcul basé sur SVD plutôt que EVD) et les inconvénients (matrice à décomposer de plus grande dimension en nombre de lignes, $4N$ au lieu de 4).

2.3 Théorème

On a mis en évidence en (4), qu'en absence de bruit, le quaternion orientation $\hat{\mathbf{q}}$ se trouve à l'intersection de l'ensemble des noyaux $\mathbf{H}_n^0 \equiv \mathbf{H}(\mathbf{b}_n^0, \mathbf{r}_n)$. Comme les mesures réelles \mathbf{b} sont généralement entachées de bruit, une condition est de choisir $\hat{\mathbf{q}}$ comme étant aussi près que possible des sous-espaces vectoriels associés à chaque noyau. Cette observation conduit au théorème suivant, illustré à la Fig.2.

Théorème : *Le quaternion optimal qui fait correspondre les paires de composantes de N vecteurs, observés dans deux repères, est obtenu comme le quaternion unitaire qui minimise la fonction de coût :*

$$\hat{\mathbf{q}} = \underset{\mathbf{q}}{\operatorname{argmin}} J(\mathbf{q}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1.$$

$$J(\mathbf{q}) = 2 \sum_{n=1}^N w_n \|\mathbf{q} - \Pi_n \mathbf{q}\|_2^2 \quad (14)$$

avec Π_n le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel associé au noyau de $\mathbf{H}_n \equiv \mathbf{H}(\mathbf{b}_n, \mathbf{r}_n)$. Le projecteur est donné d'après la caractérisation du noyau de \mathbf{H}_n , cf. (6), par :

$$\Pi_n = \mathbf{q}_{1,n} \mathbf{q}_{1,n}^T + \mathbf{q}_{2,n} \mathbf{q}_{2,n}^T \quad (15)$$

avec $\mathbf{q}_{i,n} = \mathbf{q}_i(\mathbf{b}_n, \mathbf{r}_n)$.

La démonstration vient qu'une autre écriture du projecteur est donnée dans [8] comme : $\Pi_n = \frac{1}{2} (\mathbf{K}_n + \mathbf{I}_4)$. Ainsi, le critère formulé en (14) est équivalent à celui donné en (11). On a donc bien réalisé une factorisation de la matrice \mathbf{K} .

L'implication de ce théorème est la possibilité là encore de réécrire le critère sous la forme de celui d'une norme minimale

$$J(\mathbf{q}) = 2 \|\mathbf{G} \mathbf{q}\|_2^2 \quad (16)$$

où on a introduit la matrice \mathbf{G} de dimension $4N \times 4$:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} (\mathbf{I}_4 - \Pi_1) \\ \vdots \\ \sqrt{w_N} (\mathbf{I}_4 - \Pi_N) \end{pmatrix} \quad (17)$$

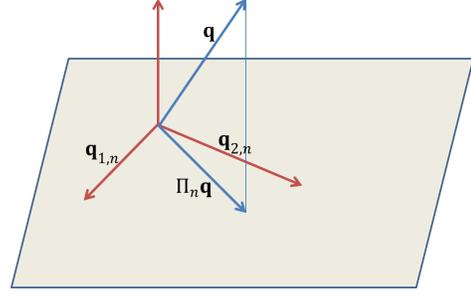


FIGURE 2 – Chaque paire de vecteurs observés définit un plan dans un espace 4-D. Le quaternion optimal réside à l'intersection de ces plans ou à défaut minimise la somme des distances, élevées au carré, à chaque plan.

2.4 Estimation du quaternion-rotation

On peut déduire de la formulation (16) différentes techniques pour estimer le quaternion optimal.

Le papier utilise une méthode basée sur la décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$. Il est en effet connu [10] que la solution au problème (16) est donnée par le vecteur singulier droit, de norme unitaire, associé à la plus faible des valeurs singulières $s = s_4 > 0$. On a ainsi : $\mathbf{G} \mathbf{v}_4 = s_4 \mathbf{u}_4$. La valeur singulière s_4^2 est la valeur minimale du critère. Notons que l'estimation du vecteur singulier de plus faible valeur singulière peut être réalisée sans calculer la décomposition complète de la matrice \mathbf{G} .

Une fois le quaternion optimal estimé, $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_4$, la matrice de rotation est facilement obtenue par la relation suivante :

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}) = (\hat{q}_s^2 - |\hat{\mathbf{q}}_v|^2) \mathbf{I}_3 + 2 \hat{\mathbf{q}}_v \hat{\mathbf{q}}_v^T - 2 \hat{q}_s \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{q}}_v} \quad (18)$$

3 Résultats

L'algorithme d'estimation d'attitude est validé sur un jeu de données synthétiques tel qu'aurait pu le fournir un capteur de mouvement basé sur un couple accéléromètre/magnétomètre.

Les composantes normalisées de l'accélération de la pesanteur et du champ magnétique terrestre dans le repère inertiel Nord-Est-Vertical Bas sont respectivement $\mathbf{g}_i = (0, 0, 1)^T$ et $\mathbf{h}_i = (\cos \kappa, 0, \sin \kappa)^T$, κ étant l'angle d'inclinaison du champ ($\approx 60^\circ$ en France). Le capteur dans une position statique retourne en général un couple de mesures bruitées \mathbf{g}_b et \mathbf{h}_b . Dans la simulation, la mesure magnétique est entachée d'un bruit de déviation standard 10^{-2} et on fait varier le niveau de bruit du capteur d'accélération entre 10^{-4} et 10. Les poids affectés aux vecteurs observés sont inversement proportionnels à la variance des mesures. On comparera l'algorithme proposé $Gsvd$ à l'algorithme de référence $Kevd$. Les deux algorithmes sont basés sur le formalisme quaternion et utilisent respectivement la SVD ou la EVD pour déterminer le quaternion optimal.

Dans l'exemple ci-dessous, on donne le résultat moyenné pour $N = 1000$ réalisations de la matrice de rotation \mathbf{R}_{bi} . Les vecteurs observés dans le repère mobile ont pour composantes :

$\mathbf{g}_b = \mathbf{R}_{b_i} \mathbf{g}_i + \mathbf{n}_g$ et $\mathbf{h}_b = \mathbf{R}_{b_i} \mathbf{h}_i + \mathbf{n}_h$. Pour chaque réalisation, on applique la SVD à la matrice \mathbf{G} construite selon (17) puis on détermine la matrice rotation équivalente via (18).

En l'absence de bruit, on donne la valeur moyenne et la déviation standard (exprimés en degré) pour l'échantillon obtenu : $1.33 \cdot 10^{-6}$ ($9.67 \cdot 10^{-7}$). Le critère de Wahba selon les différentes configurations de bruit est affiché à la Fig.3.

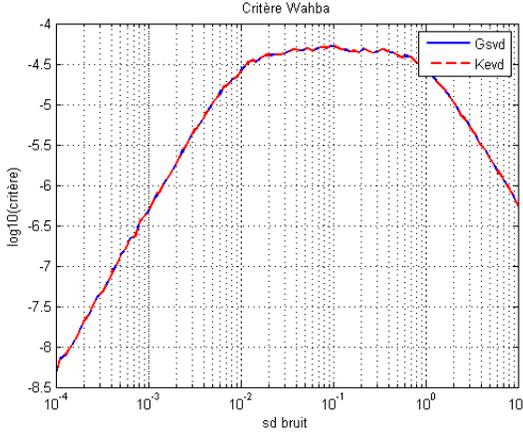


FIGURE 3 – Critère de Wahba calculé pour différentes configurations de bruit en comparaison avec l'algorithme de référence.

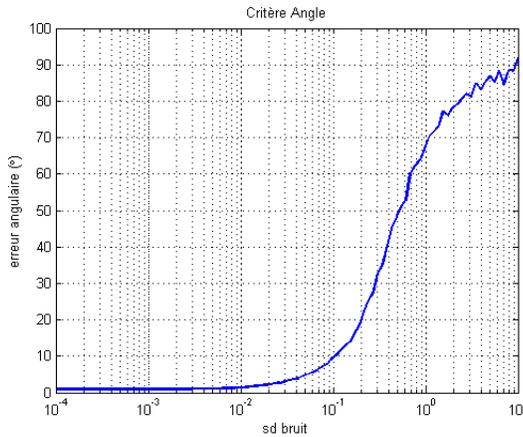


FIGURE 4 – Critère angulaire calculé pour différentes configurations de bruit.

La qualité de la rotation estimée est également estimée à travers le critère suivant :

$$\arccos \left[\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{R}_{b_i}^T \mathbf{R}_{b_i}(\hat{\mathbf{q}})) - 1 \right] \quad (19)$$

avec $\text{tr}(\mathbf{R})$ la trace de la matrice \mathbf{R} . Le critère (19) donne une mesure de l'angle nécessaire pour corriger la matrice de rotation estimée $\mathbf{R}_{b_i}(\hat{\mathbf{q}})$ pour correspondre à la matrice de rotation idéale aléatoire \mathbf{R}_{b_i} . Le critère angulaire selon les différentes configurations de bruit est affiché à la Fig.4.

Lorsque les mesures sont trop entachées de bruit, le critère de Wahba est minimisé en n'utilisant qu'une seule modalité

ce qui résulte en une mauvaise estimation de la matrice de rotation (et donc un angle d'erreur important). A l'inverse pour des mesures peu bruitées, l'estimation est bonne au niveau du critère de Wahba et au niveau angulaire (moins de 1° d'erreur pour la configuration de bruit choisie). La méthode proposée est aussi précise que celle basée sur l'EVD de la matrice \mathbf{K} . La méthode proposée reste néanmoins préférable d'un point de vue numérique par le meilleur comportement de la SVD par rapport à l'EVD quand les matrices sont mal conditionnées.

3.1 Conclusion

Ce papier a proposé un nouvel algorithme d'estimation d'attitude ainsi qu'une implémentation efficace de ce dernier par décomposition en valeurs singulières. La formulation proposée se prête bien à une implémentation récursive avec un facteur d'oubli sur les mesures les plus anciennes. Cette méthode peut être appliquée dans de nombreuses applications où on recherche la rotation qui peut exister entre deux repères en se basant sur des vecteurs invariants observés dans les deux repères.

Références

- [1] P.J. Besl and N.D. McKay, "A Method for Registration of 3-D Shapes", IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intel, Vol. 14(2), pp. 239-256, 1992.
- [2] M. Carmona et al., "An analytical solution for the complete sensor network attitude estimation problem", Signal Processing, Vol. 93(4), pp. 652-660, 2013.
- [3] M.D. Shuster, "A survey of attitude representations", Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 41(3), pp. 439-517, 1993.
- [4] G. Wahba, "Problem 65-1 : A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude", SIAM Review, Vol. 7(3), pp. 409, 1965.
- [5] J.B. Kuipers, "Quaternions and rotation sequences", 3rd edition, Princeton University Press, ISBN 0-691-05872-5, 371 p., 2002.
- [6] D. Choukroun, I.Y. Bar-Itzhack, Y. Oshman, "Novel Quaternion Kalman Filter", IEEE Trans. Aerospace Electronic Systems, Vol. 42(1), pp. 174-190, 2006.
- [7] J. Gross, G. Trenkler, S.-O. Troschke, "Quaternions : further contributions to a matrix oriented approach", Linear Algebra and its applications, Vol. 326, pp. 205-213.
- [8] F.L. Markley, D. Mortari, "Quaternion attitude estimation using vector observation", Journal of Astronautical Sciences, Vol. 48(2-3), pp. 359-380, 2000.
- [9] M.D. Shuster and S.D. Oh, "Three-axis attitude determination from vector observations", Journal of Guidance and Control, Vol. 4(1), pp. 70-77, 1981.
- [10] G.H. Golub, C.F. Van Loan, "Matrix Computations", 3rd edition, Johns Hopkins University Press, ISBN 978-0-8018-5414-9, 1996.