

Filtre de Kalman Étendu Discret sur Groupe de Lie

Guillaume BOURMAUD, Rémi MEGRET, Audrey GIREMUS, Yannick BERTHOUMIEU

Laboratoire IMS, Bordeaux

{guillaume.bourmaud, remi.megret, audrey.giremus, yannick.berthoumieu}@ims-bordeaux.fr

Résumé — Dans ce travail, le formalisme du filtre de Kalman étendu discret (D-EKF) est généralisé au cas où l'état et les mesures évoluent sur des groupes de Lie matriciels. La solution proposée repose sur le formalisme d'une distribution Gaussienne concentrée sur groupe de Lie qui vise à étendre la distribution Gaussienne au cas d'un groupe de Lie. Le filtre de Kalman étendu discret sur groupe de Lie (D-LG-EKF) obtenu fournit des expressions analytiques à la fois pour la propagation discrète des paramètres de la distribution ainsi que pour l'étape de mise à jour fondée sur les mesures. Nous montrons également que le D-LG-EKF se réduit au D-EKF dans le cas où l'état et les observations évoluent sur des espaces Euclidiens. L'algorithme du D-LG-EKF peut être mis en œuvre facilement. Nous l'avons appliqué au problème de l'estimation de la pose d'une caméra. Les résultats obtenus sur données synthétiques montrent que le D-LG-EKF surpasse le D-EKF et permet effectivement de prendre en compte à la fois la géométrie des groupes de Lie ainsi que *a priori* que constitue le modèle d'état.

Abstract — In this paper, we generalize the Discrete Extended Kalman Filter (D-EKF) to the case where the state and the observations evolve on Lie group manifolds. We propose a new filter called Discrete Extended Kalman Filter on Lie Groups (D-LG-EKF). It assumes that the posterior distribution of the state is a concentrated Gaussian distribution on Lie group. Our formalism yields closed-form equations for both non-linear discrete propagation and update of the distribution parameters based on the likelihood. We also show that the D-LG-EKF reduces to the traditional D-EKF if the state and the observations evolve on Euclidean spaces. Our approach leads to a systematic methodology for the design of filters, which is illustrated by the application to a camera pose estimation problem. Results show that the D-LG-EKF outperforms both a constrained D-EKF and a D-EKF applied on the Lie algebra of the Lie group.

1 Introduction

Dans ce papier nous nous intéressons au problème du filtrage sur variétés. Ce travail est motivé par le besoin d'une méthodologie générique de filtrage s'appliquant notamment au mouvement de caméras portées utilisées pour l'observation d'activités¹, pour lequel les variables à estimer et les mesures considérées appartiennent à un groupe de Lie. Ce contexte applicatif reprend et étend l'approche décrite dans [1]. Un certain nombre de contributions ont déjà été apportées dans le domaine du filtrage particulière sur les variétés de Riemann, Stiefel et Grassmann. Cependant, pour notre application, le filtrage particulière n'est pas adéquat. En effet, le coût calculatoire supplémentaire induit à la fois par la géométrie des groupes de Lie (évolution des particules sur la variété) et par la vraisemblance piquée des observations est important. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers le filtrage de Kalman et proposons d'étendre le formalisme du filtre de Kalman étendu discret (D-EKF) [2] défini pour le cas où l'état et les observations évoluent sur des espaces Euclidiens au cas où l'état et les mesures évoluent sur des groupes de Lie ma-

triciels (GdL). Parmi les nombreuses applications d'un tel algorithme, se trouvent l'estimation de l'orientation d'objets en 3 dimensions (GdL $SO(3)$), du mouvement d'un solide en 3 dimensions (GdL $SE(3)$) et d'un modèle d'holographies (GdL $SL(3)$).

De nombreux travaux estimant un état évoluant sur un GdL ont été publiés pour des GdL spécifiques. Parmi eux, [3] a modifié le filtre Kalman sans parfum pour estimer un quaternion unitaire ($SU(2)$). Dans [4], un algorithme capable d'estimer la trajectoire d'un état évoluant sur $SE(3)$ est décrit. Enfin, dans [5], un filtre reposant sur les propriétés d'invariance des GdL et permettant d'estimer un quaternion unitaire ainsi qu'un moment angulaire est présenté.

Mis à part ces approches spécifiques, une autre manière de traiter le problème sur lequel porte cet article, serait d'appliquer un filtre de Kalman sous contrainte [6] en immergeant l'état dans un espace vectoriel puis en posant une contrainte d'égalité pour s'assurer qu'il reste sur la variété. Cependant une telle approche ne prend pas intrinsèquement en compte la géométrie des GdL ce qui pourrait conduire à des configurations dégénérées que nous discuterons à la section 4.1.

Contrairement à ces algorithmes, ce papier fournit un cadre à la fois générique et adapté à la géométrie des

1. Ce travail a reçu le support du septième programme-cadre de la Communauté Européenne (FP7/2007-2013) - subvention 288199 - Dem@Care

GdL. Afin de mettre en œuvre la méthode proposée, il suffit de définir le GdL sur lequel l'état évolue. Le formalisme présenté permet également de prendre en compte des observations évoluant sur un GdL. En approchant la distribution a posteriori de l'état par une distribution Gaussienne concentrée sur GdL, nous obtenons des expressions analytiques à la fois pour la propagation discrète des paramètres de la distribution ainsi que pour l'étape de mise à jour. Nous montrons également que le filtre obtenu, appelé filtre de Kalman étendu sur groupe de Lie (D-LG-EKF), se réduit au D-EKF dans le cas où l'état et les observations évoluent sur des espaces Euclidiens.

La suite de l'article est organisée de la manière suivante : La section 2 introduit les notions de groupes et algèbres de Lie ainsi que le formalisme de distribution Gaussienne concentrée sur GdL. La théorie du D-LG-EKF, ses différences avec le D-EKF et le cadre dans lequel il peut être employé sont présentés dans la section 3. Dans la section 4, les performances du D-LG-EKF sont illustrées sur un problème d'estimation de la pose d'une caméra. Finalement, la conclusion et les directions de recherche seront dépeintes dans une dernière section.

2 Prérequis

2.1 Introduction aux groupes de Lie et Algèbres de Lie matriciels

Dans cette partie, nous rappelons les définitions et les principales propriétés des GdL et de leurs algèbres de Lie. Nous référons le lecteur à l'ouvrage [7] pour une étude plus approfondie de ces derniers. Un GdL noté $G \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ est une variété différentielle munie d'une structure de groupe compatible où les opérateurs de composition et d'inversion correspondent à la multiplication et à l'inversion matricielle avec la matrice identité $Id_{n \times n}$ comme l'élément identité e . Grâce aux applications "logarithme de matrice" \log_G et "exponentielle de matrice" \exp_G , nous disposons localement d'un difféomorphisme entre un voisinage autour de l'identité du groupe et l'espace tangent à l'identité $T_e G$ du groupe, appelé algèbre de Lie \mathfrak{g} . Cette algèbre se trouve être isomorphe à un espace Euclidien \mathbb{R}^p où p est le nombre de degrés de liberté intrinsèque de la variété. En choisissant une base de \mathfrak{g} , il est donc possible de représenter un élément de \mathfrak{g} dans \mathbb{R}^p grâce à l'application linéaire $[\cdot]_G^\vee$. L'application inverse est notée $[\cdot]_G^\wedge$. Les GdL sont en général non commutatifs. En conséquence nous disposons des deux opérateurs suivants caractérisant cette non-commutativité ($X \in G$ et $a, b \in \mathbb{R}^p$) : $Ad_G(X)a = [X [a]_G^\wedge X^{-1}]_G^\vee$ et $ad_G(a)b = [[a]_G^\wedge [b]_G^\wedge - [b]_G^\wedge [a]_G^\wedge]_G^\vee$ où $Ad_G(X)$ est l'opérateur adjoint de G sur \mathbb{R}^p et $ad_G(a)$ est l'opérateur adjoint de \mathbb{R}^p sur \mathbb{R}^p .

2.2 Distribution Gaussienne Concentrée sur Groupe de Lie

Nous introduisons ici la notion de distribution Gaussienne concentrée sur GdL [8] pour un GdL unimodulaire et connecté de dimension p . Cette distribution paramétrique va nous permettre d'étendre simplement le formalisme de distribution Gaussienne au cas des GdL. Soit $X \in G$ de distribution Gaussienne concentrée sur GdL (notée $X \sim \mathcal{N}_G(\mu, P)$), alors elle peut s'écrire :

$$X = \mu \exp_G([\epsilon]_G^\wedge) \quad (1)$$

où $\mu \in G$ et $\epsilon \in \mathbb{R}^p$. La distribution de ϵ peut être approchée par $\epsilon \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^p}(\mathbf{0}_{p \times 1}, P)$ (où $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^p}$ représente une distribution normale dans \mathbb{R}^p) dans le cas où le déterminant de P est petit, d'où le nom de Gaussienne "concentrée". μ est appelée moyenne et ϵ erreur Lie-algébrique.

3 Filtre de Kalman Étendu Discret sur Groupe de Lie

La théorie du filtre de Kalman étendu discret sur GdL (D-LG-EKF) est présentée ci-après. La contribution principale de ce papier est la formulation récursive d'estimateurs fondée sur le formalisme de distribution Gaussienne concentrée sur GdL.

3.1 Modèle d'état et d'observation

Soit G et G' des GdL matriciels unimodulaires et connectés de dimension p et q respectivement. Nous considérons le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned} X_k &= f(X_{k-1}, u_{k-1}, n_{k-1}) \\ &= X_{k-1} \exp_G([\Omega(X_{k-1}, u_{k-1}) + n_{k-1}]_G^\wedge) \end{aligned} \quad (2)$$

où $X_k \in G$ représente l'état que l'on souhaite estimer à l'itération k , $u_k \in \mathbb{R}^w$ correspond à un contrôle et $n_{k-1} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^p}(\mathbf{0}_{p \times 1}, R_{k-1})$ à un bruit de modèle. $\Omega : G \times \mathbb{R}^w \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction \mathcal{C}^2 . Le modèle d'observation considéré est de la forme suivante :

$$z_k = h(X_k) \exp_{G'}([\omega_k]_{G'}^\wedge) \quad (4)$$

où $z_k \in G'$, $h : G \rightarrow G'$ est une fonction \mathcal{C}^1 et $w_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^q}(\mathbf{0}_{q \times 1}, Q_k)$. Les équations (3) et (4) généralisent les modèles Euclidiens $X_k = X_{k-1} + \Omega(X_{k-1}, u_{k-1}) + n_{k-1}$ et $z_k = h(X_k) + w_k$ en considérant que l'espace Euclidien est un GdL trivial pour lequel \exp et $[\cdot]^\wedge$ sont l'identité et la composition est l'addition vectorielle [2].

3.2 Solution proposée

Nous proposons d'approcher la distribution a posteriori de l'état par une distribution Gaussienne concentrée sur GdL : $p(X_k | z_1, \dots, z_l) \approx \mathcal{N}_G(\mu_{k|l}, P_{k|l})$. Posons

la distribution a priori suivante : $X_0 \sim \mathcal{N}_G(\mu_{0|0}, P_{0|0})$. Dans notre formalisme, l'estimation de X_k est représentée par $\mu_{k|k}$. L'objectif est de montrer comment propager les paramètres $\mu_{k-1|k-1}$ et $P_{k-1|k-1}$ de cette distribution et comment les mettre à jour en incorporant les mesures z_k . Par manque de place, nous ne détaillons pas les équations et proposons directement l'algorithme obtenu :

Algorithme 1 D-LG-EKF

Entrées : $\mu_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}, u_{k-1}, z_k$

Sorties : $\mu_{k|k}, P_{k|k}$

Propagation :

$$\begin{aligned} \mu_{k|k-1} &= \mu_{k-1|k-1} \exp_G \left(\left[\hat{\Omega}_{k-1} \right]_G^\wedge \right) \\ P_{k|k-1} &= \mathcal{F}_{k-1} P_{k-1|k-1} \mathcal{F}_{k-1}^T \\ &\quad + \Phi_G \left(\hat{\Omega}_{k-1} \right) R_{k-1} \Phi_G \left(\hat{\Omega}_{k-1} \right)^T \end{aligned}$$

Mise à jour :

$$\begin{aligned} K_k &= P_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T \left(\mathcal{H}_k P_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T + Q_k \right)^{-1} \\ m_{k|k}^- &= K_k \left[\log_{G'} \left(h \left(\mu_{k|k-1} \right)^{-1} z_k \right) \right]_G^\vee \\ \mu_{k|k} &= \mu_{k|k-1} \exp_G \left(\left[m_{k|k}^- \right]_G^\wedge \right) \\ P_{k|k} &= \Phi_G \left(m_{k|k}^- \right) \left(Id_{l \times l} - K_k \mathcal{H}_k \right) P_{k|k} \Phi_G \left(m_{k|k}^- \right) \end{aligned}$$

où l'on a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{k-1} &= \Omega \left(\mu_{k-1|k-1}, u_{k-1} \right) \\ \Phi_G(a) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} ad_G(a)^m \\ \mathcal{F}_{k-1} &= Ad_G \left(\exp_G \left(-\hat{\Omega}_{k-1} \right) \right) \\ &\quad + \Phi_G \left(\hat{\Omega}_{k-1} \right) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Omega \left(\mu_{k-1|k-1} \exp_G \left([\epsilon]_G^\wedge \right), u_{k-1} \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ \mathcal{H}_k &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\log_{G'} \left(h \left(\mu_{k|k-1} \right)^{-1} h \left(\mu_{k|k-1} \exp_G \left([\epsilon]_G^\wedge \right) \right) \right) \right]_G^\vee \Big|_{\epsilon=0} \end{aligned}$$

4 Applicabilité, Discussion & Résultats

4.1 Applicabilité du D-LG-EKF et comparaison avec d'autres filtres

Applicabilité : Le D-LG-EKF s'applique pour les GdL d'intérêt tels que : $SO(3)$ et $SU(2)$ (orientation), $SL(3)$ (homographies), $SE(3)$ (mouvement d'un solide), $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ (facteur d'échelle), $(\mathbb{R}^n, +)$ (un élément d'un espace Euclidien) ou des concaténations de tels espaces. Notons que pour $SO(3)$ et $SE(3)$, il existe des expressions analytiques pour les fonctions \log , \exp et Φ disponibles dans [9] par exemple. En ce qui concerne $SL(3)$, ces fonctions doivent être approchées numériquement.

Généralisation du D-EKF : Un espace Euclidien étant un GdL trivial $G \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que $ad_G(\cdot) = \mathbf{0}_{n \times n}$ et $Ad_G(\cdot) = Id_{n \times n}$, on peut montrer que le D-LG-EKF se réduit au D-EKF dans le cas où l'état et les observations appartiennent à des espaces Euclidiens ($X \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}^m$).

Différences avec d'autres filtres : Le fait d'estimer un état $X \in G \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ tout en considérant des observa-

tions $z \in G' \subset \mathbb{R}^{m \times m}$, où G et G' sont des GdL de dimension p et q respectivement, n'est pas cohérent avec la théorie du D-EKF. Cependant, en traitant chaque élément de X comme des composantes indépendantes et en considérant la géométrie du GdL comme une contrainte sur l'état, il est possible d'employer le formalisme du D-EKF contraint [6]. Un tel algorithme pose néanmoins certains problèmes liés à l'immersion de l'état dans un espace Euclidien de dimension $l > p$ qui n'apparaissent pas dans le formalisme du D-LG-EKF. En effet, la matrice de covariance de l'état se trouve sur-dimensionnée et donc potentiellement singulière et non inversible. Le calcul du gain de Kalman ne peut alors pas être effectué.

Un autre moyen pour employer un D-EKF est d'estimer $x = [\log_G(X)]_G^\vee$ au lieu de X . Une telle paramétrisation est valide uniquement si \log_G est défini sur la totalité du GdL. Si tel est le cas, ce D-EKF "Lie-algébrique" peut alors être appliqué au modèle traité dans ce papier. Cependant, les erreurs considérées par ce D-EKF "Lie-algébrique" sont algébriques et de la forme $\epsilon = [\log_G(A)]_G^\vee - [\log_G(B)]_G^\vee$ (où $\epsilon \in \mathbb{R}^p$ et $A, B \in G$). De plus, un problème théorique se pose concernant la discontinuité de l'application logarithmique qui occasionne des sauts dans l'erreur considérée.

Le coût calculatoire des 3 filtres se trouve être quasi-identique. En effet, par rapport à une mise en œuvre standard d'un D-EKF, le D-LG-EKF doit calculer les matrices Φ_G . Le D-EKF contraint effectue une projection de l'estimé de l'état et de la matrice de covariance et le D-EKF "Lie-algébrique" doit calculer des logarithmes matriciels supplémentaires.

4.2 Résultats : estimation de la pose d'une caméra sur données synthétiques

Nous avons choisi d'évaluer les performances du formalisme proposé sur un problème d'estimation de pose de caméra tel qu'il apparaît dans la localisation de caméra portée pour l'analyse d'activités [1]. L'objectif est d'estimer à la fois la position $T \in \mathbb{R}^3$ et l'orientation $R \in SO(3)$ de la caméra en considérant un modèle de propagation où l'accélération est un bruit blanc Gaussien. Par conséquent, la vitesse angulaire $\omega \in \mathbb{R}^3$ et la vitesse radiale de la caméra $v \in \mathbb{R}^3$ sont également estimées. Nous supposons également que R et T sont directement observés. Finalement, nous avons choisi de considérer les GdL suivant : $G = SO(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $G' = SO(3) \times \mathbb{R}^3$ avec pour base de l'algèbre de Lie de $SO(3)$ la base classique décrite dans [9] par exemple.

Afin de comparer les résultats du D-LG-EKF, nous avons implémenté deux autres filtres, un D-EKF contraint (D-EKF Constr) et un D-EKF "Lie algébrique" (D-EKF Lie Alg) (voir 4.1). Nous avons simulé une pièce d'une maison comme un nuage de points 3D représentant un cube. La caméra est également supposée calibrée. Des trajectoires sont générées au sein de ce cube et des séquences d'ob-

servations sont obtenues en utilisant un algorithme d'estimation de pose au sens du maximum de vraisemblance (acronyme "measurements" dans les résultats). La covariance de chaque mesure est estimée par rétro-propagation de la covariance à partir des points 3D observés. Pour tous les filtres, T et R sont parfaitement initialisés avec de petites covariances alors que ω et v sont initialisés à zéro avec de larges covariances.

La Figure 1 représente le RMSE ("root-mean-square error") de chaque filtre par rapport à la période d'échantillonnage des observations δt . Le RMSE est défini comme la racine carrée de la moyenne empirique des erreurs suivantes :

$$\|\mu_T - T\|_2^2 \text{ (erreur en position) et } \left\| \log_{SO(3)} \left([\mu_R^T R]_{SO(3)}^\vee \right) \right\|_2^2 \text{ (erreur en orientation).}$$

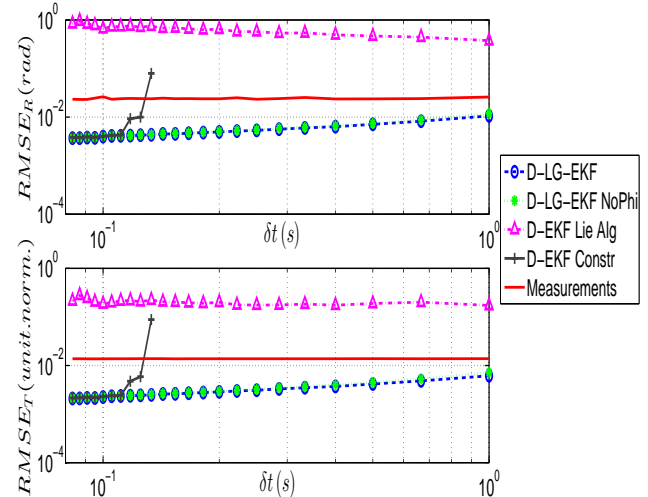
En cohérence avec les différences théoriques discutées dans la section 4.1, le D-EKF Constr et le D-EKF LieAlg ont de moins bonnes performances que le D-LG-EKF. En effet, dans le cas du D-EKF Constr, plus δt augmente, plus l'estimé de l'état est projeté loin de sa vraie position sur la variété ce qui conduit à des estimés erronés ainsi qu'à des instabilités numériques. Pour de faibles valeurs de δt , ces effets sont limités. Concernant le D-EKF LieAlg, quand la norme du vecteur décrivant l'orientation dans l'algèbre de Lie dépasse π , l'estimé devient erroné en raison de la discontinuité de l'application logarithmique de $SO(3)$ en cet endroit. Contrairement à ces deux filtres, le D-LG-EKF ne souffre d'aucune des deux limitations décrites précédemment et produit par conséquent de meilleurs résultats. Plus δt augmente, moins le modèle d'état est informatif ce qui explique pourquoi le RMSE du D-LG-EKF se rapproche de celui des observations.

Finalement, nous avons considéré le cas où les matrices Φ_G dans l'algorithme du D-LG-EKF sont remplacées par des matrices identité. Cette version de notre formalisme est appelée D-LG-EKF NoPhi. On se rend compte qu'en négligeant les matrices Φ_G les performances ne se dégradent que légèrement pour l'application considérée. Par conséquent, en fonction du degré de précision souhaité, il est possible de remplacer les matrices Φ_G par des matrices identité.

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons proposé un nouvel algorithme générique appelé filtre de Kalman étendu discret sur groupe de Lie. Ce filtre généralise le filtre de Kalman étendu discret au cas où l'état et les observations évoluent sur des groupes de Lie. En approchant la distribution a posteriori de l'état par une distribution Gaussienne concentrée sur groupe de Lie, nous avons montré comment propager et mettre à jour les paramètres de cette distribution. Les performances de l'algorithme proposé ont été testées sur un problème d'estimation de la pose d'une caméra. Les résultats ont montré que les performances du

FIGURE 1 – RMSE des filtres ($RMSE_R$: orientation et $RMSE_T$: position) calculées sur 2000 trajectoires



D-LG-EKF étaient supérieures à la fois à celles d'un D-EKF contraint ainsi qu'à celles d'un D-EKF appliqué sur l'algèbre de Lie du groupe considéré.

Dans nos recherches futures, nous souhaitons, comme nous l'avons fait avec le D-EKF, généraliser le filtre de Kalman étendu continu-discret (CD-EKF), les modèles d'évolution étant généralement régis par des équations différentielles.

Références

- [1] H. Wannous, V. Dovgalecs, R. Mégret, and M. Daoudi, "Place recognition via 3d modeling for personal activity lifelog using wearable camera," in *Advances in Multimedia Modeling*. Springer, 2012, pp. 244–254.
- [2] P. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation, and Control*. Academic Press, 1979.
- [3] J. Crassidis and F. Markley, "Unscented filtering for spacecraft attitude estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 26, pp. 536–542, 2003.
- [4] P. Smith, T. Drummond, and K. Roussopoulos, "Computing map trajectories by representing, propagating and combining pdfs over groups," in *ICCV*, 2003, pp. 1275–1282.
- [5] S. Persson and I. Sharf, "Invariant momentum-tracking kalman filter for attitude estimation," in *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*, 2012, pp. 592–598.
- [6] D. Simon, "Kalman filtering with state constraints : a survey of linear and nonlinear algorithms," *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 8, pp. 1303–1318, 2010.
- [7] G. Chirikjian, *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups*. Springer, 2012.
- [8] Y. Wang and G. Chirikjian, "Error propagation on the euclidean group with applications to manipulators kinematics," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 22, 2006.
- [9] J. Selig, "Lie groups and lie algebras in robotics," *Computational Noncommutative Algebra and Applications*, pp. 101–125, 2005.