

# Détection quasi-optimale d'anomalie dans une image tomographique

Rémi COGRANNE, Florent RETRAINT

ICD - LM2S - Université de Technologie de Troyes (UTT) - UMR STMR - CNRS

{remi.cogranne ; florent.restraint}@utt.fr

**Résumé** – Ce papier propose une nouvelle méthodologie pour la détection d'anomalies dans une projection tomographique basée sur un modèle paramétrique adapté au contenu des radiographies et sur la théorie des tests d'hypothèses. Les principales contributions sont : 1) en utilisant un modèle paramétrique adaptatif et générique, la totalité du processus de détection est automatisée et 2) l'utilisation de la théorie de tests d'hypothèses permet d'établir analytiquement les performances statistiques du test proposé afin, notamment, de garantir une probabilité de fausse-alarme prescrite et de démontrer que ce test est quasi-optimal. Les résultats numériques montrent la pertinence de l'approche proposée.

**Abstract** – This paper proposes a new methodology for detecting anomalies from a tomography projection based on a parametric statistical model adapted to the content of radiographs together with hypothesis testing theory. The main contributions are the following: 1) using a generic and adaptive parametric model, the whole non-destructive testing process is entirely automated and 2) by using hypothesis testing theory the statistical properties of the proposed test are analytically established ; this particularly allows the guaranteeing of a prescribed false-alarm probability and shows that the proposed test is almost optimal. Experimental results show relevance of the proposed methodology.

## 1 Introduction

L'inspection par tomographie à rayons-X ou gamma est largement utilisée depuis des décennies dans les méthodes de contrôle non-destructif. En général la prise de décision repose sur un opérateur humain, la nécessité de méthodes automatiques de détection d'anomalies est donc bien réelle.

Les méthodes proposées dans la littérature reposent sur 1) une image de référence 2) des méthodes génériques de traitement d'image pour améliorer le rendu visuel de l'anomalie ou 3) les méthodes statistiques Bayésiennes nécessitant la connaissance d'a priori sur la distribution du défaut et du contenu imagé. La méthodologie proposée dans ce papier repose sur la construction d'un modèle paramétrique du contenu de l'image inspectée et sur les méthodes de détection non-Bayésiennes.

Il faut noter que selon la structure interne de l'objet inspecté, la détection d'une anomalie (inconnue) peut être rendue délicate : la conception d'un modèle de l'arrière plan (sans anomalie) pour réjecter ce paramètre de nuisance est d'une importance cruciale. Les principales contributions sont les suivantes :

- Un modèle paramétrique (non-linéaire) original des projections tomographiques basé sur une analyse de la chaîne d'acquisition est présenté ; cette modélisation est générique pour une application à une vaste catégorie d'objets.
- Un test statistique, basé sur le modèle proposé, est proposé et ses performances sont établies afin de garantir une probabilité de fausse-alarme prescrite et de démontrer que la perte de puissance par rapport au test optimal est bornée.

La section 2 définit le problème de détection d'anomalie et présente le test optimal "théorique". La Section 3 présente le modèle paramétrique adaptatif exploité dans la Section 4 pour construire le test proposé et établir ses performances. Enfin,

la Section 5 présente des résultats numériques et la Section 6 conclut ce papier.

## 2 Position du problème et test optimal

Soit  $\mathbf{Z} = \{z_{m,n}\}$ ,  $(m, n) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$  une image numérique de  $M \times N$  pixels issue d'une projection tomographique par rayons X. Il est proposé dans le présent papier de regrouper les pixels en  $K$  vecteurs de  $L$  pixels consécutifs :  $\mathbf{z}_k = (z_{1,k}, z_{2,k}, \dots, z_{L,k})^T$ ,  $k = \{1, \dots, K\}$ . On supposera, dans cette section, que lorsque l'objet inspecté ne contient pas d'anomalie les segments peuvent être décomposés [3, 6] :

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\xi}_k \Leftrightarrow \mathbf{z}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{x}_k, \sigma_k^2 \mathbf{I}_L) \quad (1)$$

avec  $\mathbf{H}$  un matrice plein rang colonne de taille  $L \times p$ ,  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^p$  un paramètre déterministe et  $\boldsymbol{\xi}_k$  la réalisation de variables aléatoires Gaussiennes :  $\boldsymbol{\xi}_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2 \mathbf{I}_L)$  avec  $\mathbf{I}_L$  la matrice identité de taille  $L \times L$ .

À l'inverse, lorsqu'une anomalie est présente dans l'objet inspecté, l'espérance des observations en est modifiée ; ces derniers peuvent alors être décomposés ainsi

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{a}_k + \boldsymbol{\xi}_k \Leftrightarrow \mathbf{z}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{a}_k, \sigma_k^2 \mathbf{I}_L) \quad (2)$$

où  $\mathbf{a}_k$  représente l'anomalie qu'il est souhaité détecter. On notera dans la suite  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K)$  l'ensemble des paramètres définissant l'arrière-plan sans anomalie et  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K)$  la totalité de l'anomalie, si elle est présente. Il découle de (1) - (2) que le problème de détection d'anomalie consiste à choisir entre les hypothèses définies,  $\forall k = \{1, \dots, K\}$  par :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 = \left\{ \mathbf{z}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{x}_k, \sigma_k^2), \forall \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^p \right\} \\ \mathcal{H}_1 = \left\{ \mathbf{z}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{a}_k, \sigma_k^2), \forall \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^p, \forall \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^L \right\} \end{cases} \quad (3)$$

Le principal objectif de ce papier est la construction d'un test dont les performances statistiques peuvent être analytiquement établies. Ainsi définissons :

$$\mathcal{K}_{\alpha_0} = \left\{ \delta : \sup_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{K \cdot p}} \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}(\delta(\mathbf{Z}) = \mathcal{H}_1) \leq \alpha_0 \right\}, \quad (4)$$

la classe des tests dont la probabilité de fausse-alarme a pour borne supérieure  $\alpha_0$ . Dans ce papier  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_i}(E)$  représente la probabilité de l'évènement  $E$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_i, i = \{0, 1\}$ . Parmi tous les tests de la classe  $\mathcal{K}_{\alpha_0}$ , il est souhaitable de trouver le test  $\delta$  maximisant la fonction de puissance définie par :

$$\beta_\delta(\mathbf{A}) = \mathbb{P}_{\mathcal{H}_1}(\delta(\mathbf{Z}) = \mathcal{H}_1). \quad (5)$$

Le problème de la détection d'anomalie formulé dans les équations (3) - (5) met en évidence les principales difficultés. Premièrement, l'espérance des pixels, inconnue en pratique, est un paramètre de nuisance qui nécessite d'être réjecté à l'aide d'un modèle adapté. Deuxièmement, on ne dispose généralement pas d'information a priori sur l'anomalie potentiellement présente ; il est donc impossible de modéliser  $\mathbf{a}_k$ .

Pour des problème de test d'hypothèses tels que (3), Wald a proposé dans [11] le critère de test Uniformément le Plus Puissant (UPP) avec une fonction de puissance constante sur une famille de surface  $\mathcal{S}$ . Ce critère d'optimalité se justifie par le fait que la fonction de puissance dépend de l'arrière plan sans anomalie et de l'anomalie potentiellement présente.

Pour présenter ce critère, définissons  $R(\mathbf{H}) \subseteq \mathbb{R}^p$  le sous-espace engendré par  $\mathbf{H}$  et  $R(\mathbf{H})^\perp \subseteq \mathbb{R}^{J-p}$  son supplémentaire dans  $\mathbb{R}^L$ , dit "espace de parité" [7, 9]. La projection sur le sous-espace de parité est obtenue par  $\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{W}\mathbf{z}_k$  où la matrice  $\mathbf{W}$  engendre le noyau de  $\mathbf{H}$ , de dimension  $L-p$ , et vérifie les propriétés suivantes :  $\mathbf{W}\mathbf{H} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{I}_{J-p}$  et  $\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \mathbf{P}_{\mathbf{H}}^\perp = \mathbf{I}_L - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T$ . Les segments extraits de l'image inspectée sont donc projetés sur l'espace de parité  $R(\mathbf{H})^\perp$  par :

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{W}\mathbf{z}_k = \mathbf{W}\xi_k [+ \mathbf{W}\mathbf{a}_k], \quad (6)$$

ce qui montre qu'une réjection du paramètres de nuisance  $\mathbf{H}\mathbf{x}$  est aisément obtenue dès lors que la matrice  $\mathbf{H}$  est connue.

**Théorème 1** (démontré dans [7]). *Pour résoudre le problème de test d'hypothèses (3) le test défini par :*

$$\delta^*(\mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathcal{H}_0 & \text{si } \Lambda^*(\mathbf{Z}) = \sum_{k=1}^K \sigma_k^{-2} \|\mathbf{W}\mathbf{z}_k\|_2^2 < \tau_{\alpha_0}^* \\ \mathcal{H}_1 & \text{si } \Lambda^*(\mathbf{Z}) = \sum_{k=1}^K \sigma_k^{-2} \|\mathbf{W}\mathbf{z}_k\|_2^2 \geq \tau_{\alpha_0}^* \end{cases} \quad (7)$$

est, pourvu que  $\tau_{\alpha_0}^*$  soit correctement choisi (9), UPP dans la classe des tests  $\mathcal{K}_{\alpha_0}$  ayant une fonction puissance  $\beta_\delta(\mathbf{A})$  constante la surface  $S_\varrho \in \mathcal{S}$ , avec la famille de surfaces :

$$\mathcal{S} = \left\{ S_\varrho : \sum_{k=1}^K \sigma_k^{-2} \|\mathbf{W}\mathbf{a}_k\|_2^2 = \varrho^2 \right\} \quad (8)$$

**Théorème 2.** *Pour tout  $\alpha_0 \in ]0; 1[$  le seuil de décision suivant :*

$$\tau_{\alpha_0}^* = F_{\chi_{K(L-p)}^2}^{-1} \left( 1 - \alpha_0; 0 \right) \quad (9)$$

assure que  $\sup_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{K \cdot p}} \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[\Lambda^*(\mathbf{Z}) > \tau_{\alpha_0}^*] = \alpha_0$   $\delta^*$  (7) est dans la classe  $\mathcal{K}_{\alpha_0}$ . Ici,  $F_{\chi_{K(L-p)}^2}$ , et  $F_{\chi_{K(L-p)}^2}^{-1}$ , représentent resp. la fonction de répartition de la loi du  $\chi^2$  à  $K(L-p)$  degré de liberté et sa réciproque. En choisissant le seuil  $\tau_{\alpha_0}^*$  (9), la fonction de puissance associée au test  $\delta^*$  (7) est donnée par :

$$\beta^*(\varrho, \alpha_0) = 1 - F_{\chi_{K(L-p)}^2} \left( \tau_{\alpha_0}^*; \varrho^2 \right) \quad (10)$$

avec,  $\varrho^2 = \sum_{k=1}^K \sigma_k^{-2} \|\mathbf{W}\mathbf{a}_k\|_2^2$ .

Le Théorème 2 fournit une borne supérieure sur la puissance attendue d'un test visant à résoudre le problème (3). Cependant, le Théorème 2 suppose que sous  $\mathcal{H}_0$  l'espérance de chaque segment  $\mathbf{z}_k$ , peut être représenté par un même modèle paramétrique linéaire, ce qui manque de réalisme. Les sections 3 et 4 proposent un modèle paramétrique adapté aux objets inspectés.

### 3 Modèle statistique de l'image

Un objet est défini par sa fonction d'absorption  $a(x, y, z, \nu)$  où  $\nu$  est l'énergie des photons. Sans perte de généralité, le capteur est dans le plan  $z = 0$  et la source de photons à  $z = z_M$ . Il découle de la loi de Berr-Lambert [2] que le nombre "idéal" de photons, noté  $\omega(x, y)$ , traversant l'objet et incident sur le photo-détecteur à la position  $(x, y)$  est donné par [2] :

$$\omega(x, y) = N_0 \int_{R^+} \phi(\nu) \exp \left( - \int_0^{z_M} a(l(z), z, \nu) dz \right) d\nu.$$

avec  $N_0$  et  $\phi(\nu)$  resp. le nombre moyen de photons émis et le spectre d'énergie de la source et  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  le chemin des photons de la source au photo-détecteur. Le nombre moyen de photons observés,  $\mu(x, y)$ , diffère de  $\omega(x, y)$  à cause de phénomènes déterministes de dégradations (diffraction, diffusion, etc..). En tenant compte de ces phénomènes le nombre moyen de photons incidents est donné par [2] :

$$\mu(x, y) = \iint_{R^2} \omega(x, y) h_{(x, y)}(u - x, v - y) dx dy \quad (11)$$

où (11) représente une convolution bi-dimensionnelle (2D) de noyau  $h_{(x, y)}$  à la position  $(x, y)$ . La méthodologie proposée est applicable à tout noyau de convolution, pour l'application et les calculs un noyau Gaussien 2D sera considéré :

$$h(x, y; \varsigma_{\text{psf}}) = \frac{1}{2\pi\varsigma_{\text{psf}}} \exp \left( - \frac{x^2 + y^2}{2\varsigma_{\text{psf}}^2} \right) \quad (12)$$

où  $\varsigma_{\text{psf}} = \varsigma_{\text{psf}}(x, y) > 0$  est le paramètre local du noyau et représente la non-stationnarité des phénomènes de dégradations.

Dans ce papier il est proposé d'exploiter le fait que les objets inspectés sont constitués de différents matériaux [8] : 1) la fonction d'absorption est régulière sur les domaines définis par les matériaux ; 2) sur les frontières séparant les différents matériaux la fonction d'absorption est discontinue. Il découle de ces propriétés que le nombre idéal de photons sur le  $k$ -ième segment est une fonction continue par morceaux qui peut être

écrite :  $\omega_k(x) = \omega_k^{(c)}(x) + \omega_k^{(s)}(x)$  où  $\omega_k^{(c)}$  est une fonction régulière et  $\omega_k^{(s)}$  est constante par morceaux :

$$\omega_k^{(s)}(x) = \sum_{d=1}^{r_k} u_{k,d} \mathbf{1}_{R^+}(x - t_{k,d}) \quad (13)$$

avec  $r_k$  le nombre de discontinuités dans le  $k$ -ième segment  $\mathbf{z}_k$  et  $\mathbf{1}_{R^+}$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathbb{R}^+$ . Les paramètres  $u_{k,d}$  et  $t_{k,d}$  caractérisent resp. l'intensité et la position de la  $d$ -ième discontinuité dans le  $k$ -ième segment  $\mathbf{z}_k$ . Il découle de la linéarité de l'équation (11) que le nombre moyen de photons observés sur le  $k$ -ième segment est donné par :

$$\mu_k(x) = \mu_k^{(c)}(x) + \mu_k^{(s)}(x) \quad (14)$$

où  $\mu_k^{(c)}$  et  $\mu_k^{(s)}$  correspondent resp. à  $\omega_k^{(c)}$  et  $\omega_k^{(s)}$  après convolution par le système d'acquisition (11) - (12).

En notant  $\Phi(u) = \int_{-\infty}^u (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2) dx$  la fonction intégrale de Gauss, la fonction  $\mu_k^{(s)}$  peut être écrite [1, 4, 5] :

$$\mu_k^{(s)}(x) = \sum_{d=1}^{r_k} u_{k,d} \Phi\left(\frac{x - t_{k,d}}{\varsigma_{k,d}}\right) \quad (15)$$

avec  $\varsigma_{k,d}$  le paramètre local de flou à la position de la  $d$ -ième discontinuité du  $k$ -ième segment.

À l'inverse, la fonction  $\mu_k^{(c)}$  est « basse-fréquence » et donc modélisable avec une bonne précision par un polynôme de degré  $p-1$  [4, 5]. En utilisant ce modèle polynomial de  $\mu_k^{(c)}$  et l'équation (15) modélisant  $\mu_k^{(s)}$ , il découle de (14) que :

$$\mu_k(x) = \sum_{q=0}^{p-1} s_{k,q} x^q + \sum_{d=0}^{r_k} u_{k,d} \Phi(x; \eta_{k,d}) \quad (16)$$

où  $s_{k,q}$  sont les coefficients du polynôme représentant la partie régulière,  $\eta_{k,d} = (t_{k,d}, \varsigma_{k,d})$  représente les paramètres de la  $d$ -ième discontinuité et  $\Phi(x_k; \eta_{k,d}) = \Phi(x_k - t_{k,d}/\varsigma_{k,d})$ .

Après intégration sur la surface de chacune des cellules photosensibles, il découle de (16) que l'espérance des pixels du  $k$ -ième segment, notée  $\boldsymbol{\mu}_k$ , est donnée par :

$$\boldsymbol{\mu}_k = \mathbf{H}\mathbf{s}_k + \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_k)\mathbf{u}_k = \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}_k)\mathbf{v}_k. \quad (17)$$

Ici,  $\mathbf{H}$  est la matrice de taille  $L \times p$  dont l'élément  $(i, j)$  est  $x_i^{j-1}$  et  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_k)$  est la matrice de taille  $L \times r_k$  dont l'élément  $(i, d)$  est  $\Phi(x_i; \eta_{k,d}) = \Phi(x_i - t_{k,d}/\varsigma_{k,d})$ . Il est évident que  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}_k) = (\mathbf{H}|\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_k))$  et  $\mathbf{v}_k = (\mathbf{s}_k, \mathbf{u}_k)^T$ .

## 4 Formulation du test quasi-optimal

Estimer l'espérance  $\boldsymbol{\mu}_k$  à partir du modèle local adaptatif proposé (17) et des observations  $\mathbf{z}_k$  est délicat en raison de la non-linéarité des paramètres  $\boldsymbol{\eta}_{k,d} = (t_{k,d}, \varsigma_{k,d})$ . Pour surmonter cette difficulté, il est proposé d'adopter la méthodologie proposée dans [10] basée sur un développement en série de Taylor, autour d'une estimation  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_k$  des paramètres  $\boldsymbol{\eta}_k$ , permettant d'écrire :

$$\boldsymbol{\mu}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + u_k \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k) + u_k \dot{\mathbf{F}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k)(\boldsymbol{\eta}_k - \hat{\boldsymbol{\eta}}_k) + o(\|\boldsymbol{\eta}_k - \hat{\boldsymbol{\eta}}_k\|_1)$$

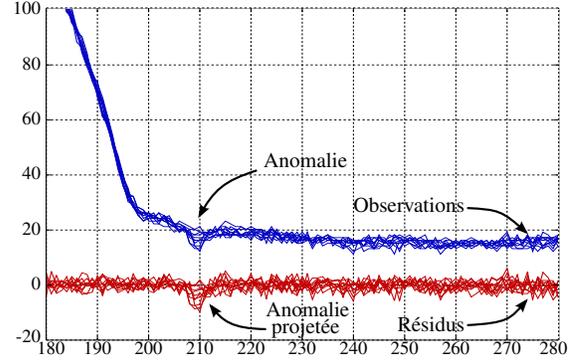


FIGURE 2 – Superposition de segments avec et sans anomalie et de leurs résidus : projection sur l'espace de parité.

où  $\dot{\mathbf{F}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k)$  est la matrice Jacobinne de taille  $N \times 2r_k$  de  $\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k)$  et  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_k$  est une estimation des paramètres de discontinuité  $\boldsymbol{\eta}_k$ . Cela amène au modèle "linéarisé" suivant :

$$\boldsymbol{\mu}_k = \dot{\mathbf{G}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k)\mathbf{v}_k + o(\|\boldsymbol{\eta}_k - \hat{\boldsymbol{\eta}}_k\|_1), \quad (18)$$

où  $\mathbf{v}_k = (\mathbf{x}_k | u_k | u_k(\boldsymbol{\eta}_k - \hat{\boldsymbol{\eta}}_k))^T$  et  $\dot{\mathbf{G}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k) = (\mathbf{H} | \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k) | \dot{\mathbf{F}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k))$ . L'exploitation de cette méthode de linéarisation (18) permet la construction du test :

$$\hat{\delta}(\mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathcal{H}_0 & \text{if } \hat{\Lambda}(\mathbf{Z}) = \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}_k^{-2} \left\| \mathbf{W}_{\dot{\mathbf{G}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k)} \mathbf{z}_k \right\|_2^2 < \hat{\tau}_{\alpha_0} \\ \mathcal{H}_1 & \text{if } \hat{\Lambda}(\mathbf{Z}) = \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}_k^{-2} \left\| \mathbf{W}_{\dot{\mathbf{G}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k)} \mathbf{z}_k \right\|_2^2 \geq \hat{\tau}_{\alpha_0} \end{cases} \quad (19)$$

avec  $\hat{\sigma}_k^2$  l'estimation de la variance obtenue, dans ce papier, suivant la méthode proposée dans [6].

Établir les propriétés statistiques du test  $\hat{\delta}$  (19) nécessite d'analyser le terme d'erreur  $o(\|\boldsymbol{\eta}_k - \hat{\boldsymbol{\eta}}_k\|_1)$ , dans (18). Pour la clarté, il est supposé qu'une discontinuité (au plus) est présente dans chaque segment  $\mathbf{z}_k$ ; l'extension au cas de plusieurs discontinuités complexifie les notations. Il est aussi supposé que l'estimation  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_k$  vérifie  $\|\boldsymbol{\eta}_k - \hat{\boldsymbol{\eta}}_k\|_1 \leq \zeta$ . Plusieurs méthodes ont été proposées fournissant de telles estimations comme [1] qui est utilisée dans ce papier. Cette dernière supposition permet d'écrire :

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{\hat{\sigma}_k^2} \left\| \mathbf{W}_{\dot{\mathbf{G}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k)} \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}_k) \mathbf{v}_k \right\|_2^2 \leq \sum_{k=1}^K \frac{u_k^2}{4\pi\varsigma_k^3 \hat{\sigma}_k^2} \zeta^2 = b_{\max} \quad (20)$$

En notant,  $\hat{\varrho}^2 = \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}_k^{-2} \left\| \mathbf{W}_{\dot{\mathbf{G}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_k)} \mathbf{a}_k \right\|_2^2$  et  $\Upsilon = K(L - p) - \sum_{k=1}^K 3r_k$ , l'équation (20) permet d'établir les propriétés statistiques du test proposé  $\hat{\delta}$  (19) données dans le Théorème 3.

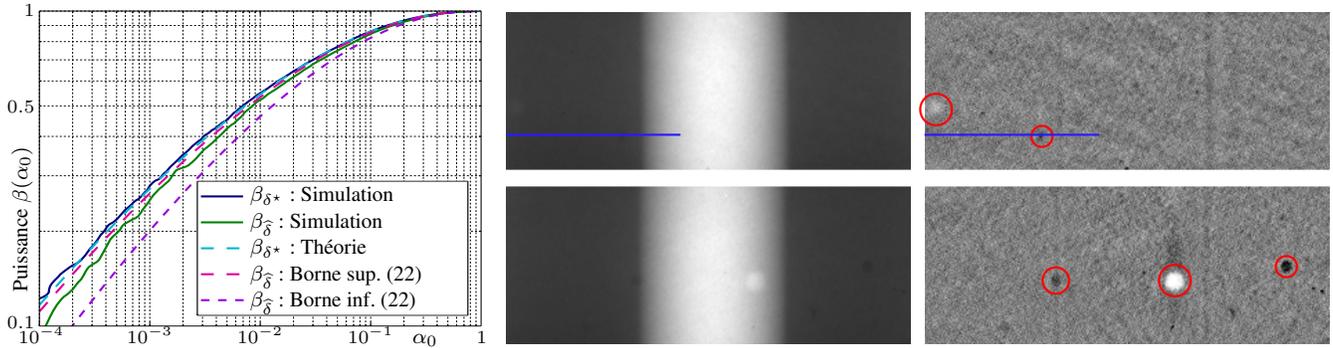
**Théorème 3.** *En admettant que les segments  $\mathbf{z}_k$  sont modélisés par (17) et que  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_k$  est un estimateur non-biaisé de  $\boldsymbol{\eta}_i$  satisfaisant  $\|\boldsymbol{\eta}_i - \hat{\boldsymbol{\eta}}_i\|_1 \leq \zeta$ , alors pour tout  $\alpha_0 \in ]0; 1[$  :*

$$\hat{\tau}_{\alpha_0} = F_{\chi_{\Upsilon}^2}^{-1}\left(1 - \alpha_0; b_{\max}\right) \quad (21)$$

assure que  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[\hat{\Lambda}(\mathbf{Z}) \geq \hat{\tau}_{\alpha_0}] \leq \alpha_0$  et donc  $\hat{\delta} \in \mathcal{K}_{\alpha_0}$ .

En choisissant le seuil  $\hat{\tau}_{\alpha_0}$  donné dans l'équation (21), la fonction de puissance associée au test  $\hat{\delta}$  (19) est bornée par :

$$1 - F_{\chi_{\Upsilon}^2}(\hat{\tau}_{\alpha_0}; \hat{\varrho}^2 + b_{\max}) \leq \hat{\beta}(\hat{\varrho}^2, \alpha_0) \leq 1 - F_{\chi_{\Upsilon}^2}(\hat{\tau}_{\alpha_0}; \hat{\varrho}^2). \quad (22)$$



(a) Comparaison des performances théoriquement établies et empiriquement obtenues (courbes COR). (b) Image obtenues par tomographie à rayons-X. (c) Réjection du paramètre de nuisance : résidus normalisés par la variance :  $\sigma_k^{-2} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{G}}(\hat{\eta}_k)}^\perp \mathbf{z}_k$ .

FIGURE 1 – Application de la méthodologie proposée pour l’inspection d’un crayon de combustible nucléaire.

Le Théorème 3 montre que la perte de puissance du test  $\hat{\delta}$  proposé, par rapport au test “théorique” optimal  $\delta^*$ , est due : d’une part au fait que la matrice  $\hat{\mathbf{G}}(\eta_i)$  compte plus de colonnes que la matrice  $\mathbf{G}(\eta_i)$  ce qui réduit le nombre de “degré de liberté”. D’autre part, la linéarisation du modèle proposée (18) cause une légère non-centralité, bornée supérieurement par  $b_{\max}$  (20), de la statistique  $\hat{\Lambda}(\mathbf{Z})$  sous  $\mathcal{H}_0$ .

## 5 Résultats numériques

L’application de la méthodologie proposée pour l’inspection de crayon de combustible nucléaire est présentée dans la Figure 1. La Figure 1b montre les projections tomographiques acquises et la Figure 1c présente les résultats obtenus par réjection du paramètre de nuisance à l’aide du modèle proposé (18).

La justesse des résultats théoriques est vérifiée en utilisant le segment illustré en bleu sur la Figure 1b. Cette ligne est modélisée par deux segments de 75 pixels modélisés par des polynômes de degré  $p-1 = 3$ . Un segment similaire (légèrement en dessous) est également utilisé pour l’obtention de résultats sous l’hypothèse  $\mathcal{H}_0$  dans une simulation de Monte-Carlo. La Figure 1a présente une comparaison des résultats théoriquement établis et des résultats empiriquement observés sous la forme d’une courbe COR :  $\beta(\alpha_0)$ . Les résultats présentés dans cette Figure 1a montrent l’exactitude des résultats théoriques.

Enfin, la Figure 2 présente quelques données utilisées pour la simulation Monte-Carlo avec les résultats obtenus après réjection du paramètre de nuisance. La Figure 2 montre la précision avec laquelle, grâce au modèle local adaptatif proposé, il est possible de rejeter le paramètre de nuisance, tout en préservant l’anomalie dans l’espace de parité.

## 6 Conclusion

Ce papier présente une nouvelle méthodologie pour la détection d’anomalies dans des projections tomographiques. Les principales contributions sont 1) la proposition d’un modèle paramétrique local et adaptatif de l’espérance des observations et 2) l’utilisation de ce modèle pour concevoir un test statistique

dont les performances sont établies. Les résultats numériques présentés attestent de la pertinence de l’approche.

## Références

- [1] C. Bruni & al. Identification of discontinuities in blurred noisy signals. *Circuits and Systems I, IEEE Transactions on*, 44(5) :422–434, 1997.
- [2] L. Bryant. *Nondestructive Testing Handbook*. Radiography and Radiation Testing. Vol. 3, ASNT 1985.
- [3] R. Cogranne and F. Retraint. An Asymptotically Uniformly Most Powerful Test for LSB Matching Detection. *Information Forensics and Security, IEEE Transactions on*, 8(3) :464–476, 2013.
- [4] R. Cogranne & al. A cover image model for reliable steganalysis. In *Information Hiding, 13th Intl. Workshop*. LNCS vol.6958, Springer, pages 178 – 192, 2011.
- [5] R. Cogranne and F. Retraint. A new tomography model for almost optimal detection of anomalies. In *IEEE Intl. Conf. on Image Processing (ICIP)* (accepté), 2013.
- [6] A. Foi & al. Practical poissonian-gaussian noise modeling and fitting for single-image raw-data. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 17(10) :1737–1754, Oct. 2008.
- [7] M. Fouladirad and I. Nikiforov. Optimal statistical fault detection with nuisance parameters. *Automatica*, 41(7) :1157–1171, 2005.
- [8] Mumford, D. and Shah, J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(5) :577–685, 1989.
- [9] L. Scharf and B. Friedlander. Matched subspace detectors. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 42(8) :2146–2157, aug 1994.
- [10] G. Seber and C. Wild. *Nonlinear Regression*. Wiley, 1989.
- [11] A. Wald. Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Transactions of the AMS*, 54(4) :426–482, 1943.